

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

REVUE INTERNATIONALE

Organe officiel
de la Commission internationale de l'Enseignement Mathématique

Fondée en 1899

par

H. FEHR et C.-A. LAISANT

II^e SÉRIE

TOME IX

1963

GENÈVE
IMPRIMERIE KUNDIG

1963

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES MODERNES
OU
ENSEIGNEMENT MODERNE DES MATHÉMATIQUES?

par H. FREUDENTHAL, Utrecht

Vous savez que parmi les trois thèmes recommandés par la C.I.E.M. pour la période de 1954-1958 un seul était de nature didactique, savoir l'initiation à la géométrie, mais à Edimbourg le rapporteur général dut constater un intérêt assez médiocre pour l'enseignement de la géométrie. Quelques pays, bien connus pour leurs activités dans l'enseignement mathématique, ne présentaient aucun rapport, ou leur rapport ne témoignait guère de cette activité.

Dans la période présente, de 1958 à 1962, où la C.I.E.M. a proposé comme thème didactique l'arithmétique et l'algèbre, tout le monde s'occupe de géométrie — situation probablement pénible pour le rapporteur général du congrès de Stockholm et preuve attristante d'un manque d'organisation d'un côté et de discipline de l'autre.

Quant à notre groupe néerlandais je dois dire que depuis le congrès d'Edimbourg nous nous sommes occupés de l'enseignement d'arithmétique et d'algèbre. Tout ce que je pourrais vous présenter en géométrie, a été publié dans la période passée**), et il serait difficile pour moi, d'ajouter des détails importants à ces rapports.

D'autre part je n'aimerais pas relire les textes de conférences que j'ai faites il y a quelques années. En ce moment c'est l'algèbre dont l'enseignement m'intéresse. Mais vu le thème de cette

** 1) Report of a Conference on Mathematical Education in South Asia, held at Bombay, 22-28 February 1956. *The Mathematics Student*, 24 (1956), 83-97.

2) Report on Methods of Initiation into Geometry. Subcommittee for the Netherlands of ICMI, III, 1958.

3) Report on a comparative Study of Methods of Initiation into Geometry. *Euclides*, 34, 1959, 289-306 et *Enseignement mathématique*, V (1959), 119-139.

réunion j'ai jugé bon de choisir mon sujet dans un domaine qu'on pourrait caractériser comme l'intersection de la didactique de la géométrie et celle de l'algèbre. Mon intention est de faire des remarques générales sur la recherche didactique en mathématiques.

Dès ma première participation aux réunions de la C.I.E.M., j'ai souligné l'importance de sujets de didactique dans le programme de la C.I.E.M. Depuis son origine au début de ce siècle la C.I.E.M s'est principalement occupée de l'organisation de l'enseignement mathématique dans les différents pays, y compris les programmes d'études et d'exams, actuels ou désirables. L'histoire a démontré la stérilité des problèmes d'organisation pure. Dans ces dernières années l'accent s'est porté sur les programmes. C'est inquiétant, cette activité des programmeurs. A maintes reprises j'ai insisté sur les recherches franchement didactiques. Il est vrai que jusqu'alors le résultat de mes efforts est assez maigre.

On connaît bien l'abîme qu'il y a entre les mathématiques scolaires et les mathématiques modernes. C'est ce phénomène qui a effrayé bien des mathématiciens depuis le début de ce siècle et qui, à notre époque, a fait naître une foule de nouveaux programmes plus adaptés à l'état actuel des mathématiques. La plupart de ces programmes trahissent une indifférence sublime vis-à-vis des problèmes didactiques, mais même où l'intérêt didactique existe, c'est toujours la didactique de l'enseignement traditionnel qui domine les idées.

La didactique traditionnelle était bien adaptée aux mathématiques pour lesquelles elle fut inventée. Au cours des années on a introduit de nouveaux sujets dans les écoles sans ajuster les principes didactiques aux nouveaux sujets. Cela a causé cette détérioration effrayante de l'enseignement mathématique dont nous sommes les témoins. Notre devoir primordial est d'améliorer l'enseignement mathématique. De nouveaux sujets seront bienvenus à mesure qu'ils peuvent servir ce but, mais je ne crois pas que l'introduction d'un sujet moderne, par elle-même, signifie une amélioration.

Je suis sûr que les auteurs des nouveaux programmes ont souvent été guidés par certains principes ou considérations

didactiques, mais c'est un fait assez déplorable qu'ils s'en taisent, quoique les motivations sont la seule chose qui vaudrait la peine d'être publiée. Nous autres mathématiciens savons bien qu'il y a une algèbre linéaire et quelles matières elle traite. Nous pouvons bien imaginer qu'il y a un grand nombre de méthodes d'enseigner ce sujet, et nous sommes bien en état d'en construire autant de versions qu'on veut. Ces nouveaux programmes privés d'arguments didactiques sont comparables à des théorèmes mathématiques sans démonstrations. Comme sujet didactique une théorie mathématique ne se démontre pas par le fait qu'elle est logiquement consistante, mais par l'explication de la didactique où elle est basée.

2. Je dis que la didactique traditionnelle des mathématiques, et aussi celle qui est à la base d'un grand nombre de programmes nouveaux, est incompatible avec l'essence des mathématiques modernes. Voilà une proposition qui sent la dogmatique, mais que je vais justifier.

C'est une tradition que tout enseignement doit suivre un système et que ce système doit être le résultat d'une analyse logique de la matière à enseigner, ou plutôt le renversement de ce résultat. Par exemple si par l'analyse le langage est décomposé successivement en phrases, mots, syllabes, et sons, on conclut que l'enseignement d'une langue, maternelle ou étrangère, doit procéder par synthèse à partir des sons, par l'intermédiaire des syllabes, mots et phrases, à la lecture de textes cohérents. C'est d'après cette méthode que depuis des siècles les enfants ont appris à lire, jusqu'à nos jours, où elle a été remplacée par la méthode dite globale. Si l'analyse démontre l'existence de dix classes de mots, la grammaire doit être enseignée d'après ce système, commençant par un chapitre sur l'article (qui peut être omis si cette langue ne connaît pas d'article) et finissant avec un catalogue d'interjections. Si l'analyse découvre une structure déductive des mathématiques, les mathématiques seraient inculquées d'après cette structure déductive.

La logique de ce principe semble irréprochable. Mais c'est une logique appliquée à des concepts de langage et de mathématiques, nés par abstraction de leurs fonctions sociales. Des termes comme langage et mathématiques peuvent signifier ou

une activité ou le résultat de cette même activité. La solution classique est d'enseigner une langue ou les mathématiques comme si c'étaient des produits confectionnés. Si ce point de vue statique est adopté, il est tout à fait logique de baser l'enseignement d'une langue ou des mathématiques sur l'analyse de ces domaines en tant que fonds de connaissance au lieu d'activités. Si, au contraire, enseigner veut dire initier à une activité, l'analyse sur laquelle la méthode d'enseignement doit reposer, ne concerne pas les produits finis, mais les activités.

Les implications sociales de l'enseignement ont beaucoup changé pendant les dernières dizaines d'années. De plus en plus la tâche éducative se déplace; du transfert d'acquisitions culturelles à l'initiation aux activités culturelles. Pendant des siècles on appelait science le transfert de ce que les maîtres avaient créé, mais dans la terminologie présente la science est étroitement liée à l'invention créatrice. On fait des efforts pour adapter l'enseignement scientifique à cette nouvelle idée de la science. Cela veut dire que tout apprentissage doit embrasser des périodes d'invention dirigée, c'est-à-dire d'invention non au sens objectif, mais vu de la perspective de celui qui apprend. Les psychologues pédagogiques savent montrer pourquoi l'assimilation de nouveaux sujets est plus profonde et plus durable, si elle est de caractère réinventif; mais même par auto-observation bien des mathématiciens ont constaté que la méthode la plus efficace pour lire les travaux d'autrui est d'en inventer le contenu à nouveau. Dans l'enseignement mathématique, depuis Euclide, ce privilège n'est garanti qu'aux procédés de constructions. Vous savez que dans les *Eléments* chaque construction est précédée d'un schéma d'invention, appelée analyse. Quoique personne ne puisse nier la nécessité, encore plus urgente, de telles analyses précédant la démonstration ou même la proposition d'un théorème, une tradition a monopolisé ce privilège de l'apprentissage de l'invention en faveur de l'enseignement des méthodes de constructions. C'est une tradition devenue désuète depuis que la conception moderne dynamique des mathématiques a remplacé la conception traditionnelle, de caractère statique.

Si l'on adopte l'idée de l'apprentissage de l'invention, la

matière qui doit être analysée avant qu'on ne construise un système d'enseignement, n'est plus la matière à enseigner, mais le processus d'invention de cette matière. Malheureusement les mathématiques en tant qu'invention n'ont guère été étudiées. Les livres de Polya sont des documents importants, mais isolés de ce qu'on sait sur ce thème. L'histoire des mathématiques nous apprend la succession et les présuppositions historiques des notions mathématiques, mais ce serait une faute énorme d'enseigner les mathématiques d'après un schéma historique. L'invention originelle fut diffuse, mais l'invention dirigée doit profiter de l'expérience de celui qui la dirige. Des rapports sur des processus d'apprentissage seraient bienvenus, mais presque rien n'a été publié. La méthode de Polya de « Gedankenexperiment » (expérimentation imaginaire), est toujours l'outil le plus efficace dont nous pouvons nous servir pour l'analyse de la réinvention mathématique. On imagine un élève défini plus ou moins distinctement, on lui fait inventer une idée mathématique, on observe ses actions, et on analyse le résultat par des procédures franchement logiques.

3. Je vais donner un exemple instructif pris dans l'algèbre. Il y a des programmes et des manuels qui jugent utile d'enseigner le système axiomatique de Peano. Cela veut dire qu'on formule ces axiomes, qu'ensuite on en dérive le principe de l'induction complète et qu'on applique cet axiome à la démonstration de théorèmes, par exemple de celui du binôme. C'est un exemple de l'inversion antididactique. Il est évident que l'intelligence du principe de l'induction complète doit précéder celle du système de Peano. Mais il y a plus. Personne ne peut formuler ce principe très compliqué de l'induction complète, avant qu'il ne l'ait découvert, et pour le découvrir, il faut l'avoir appliqué au moins une fois. La didactique correcte serait: d'abord donner à l'élève des occasions d'appliquer ce principe instinctivement, puis lui faire découvrir l'élément commun dans ces applications, ensuite vérifier par de nouveaux exemples, s'il a assimilé le principe, enfin lui faire trouver une expression verbale de ce principe, c'est-à-dire sa formulation explicite. Après ces préparatifs on pourrait enseigner les axiomes de Peano, pourvu que l'élève dispose d'expérience axiomatique acquise au cours de

l'axiomatisation de systèmes plus simples que celui dont proviennent les axiomes de Peano.

4. L'analyse des mathématiques en tant que système présente une structure déductive dans laquelle les différents enchaînements sont essentiellement équivalents. Au contraire, l'analyse des mathématiques en tant qu'activité, montre une structure de couches. C'est une particularité qui a été formulée dans la théorie des Van Hiele sur les niveaux dans le processus d'apprentissage¹). Les étapes par lesquelles ce processus passe d'un niveau à l'autre, se distinguent par des critères pédagogiques, mais la relation entre un niveau et le suivant est essentiellement logique et peut être découverte par des méthodes logiques. L'induction complète en fournit un exemple. Après avoir été découverte intuitivement à un certain niveau, l'induction complète devient à un niveau supérieur l'objet de considérations conscientes et finalement d'une formulation explicite.

Des opérations sur des nombres entiers où l'on néglige des multiples d'un entier m , ou des opérations sur des paires d'entiers groupées en classes par la relation d'équivalence des fractions, peuvent être effectuées sans scrupule à un certain niveau. A un niveau supérieur elles peuvent devenir l'objet de discussions pour, finalement, être décrites par la méthode abstraite des classes d'équivalence. Sur un niveau encore plus élevé la relation d'équivalence et l'abstraction des classes d'équivalence peuvent devenir des objets d'étude. Ce qui caractérise la hiérarchie des niveaux en général, c'est que la technique des opérations d'un certain niveau devient matière à réflexion à un niveau supérieur — relation apparentée à celle qui, en logique, est caractérisée par les mots « théorie et métathéorie ». Souvent le niveau supérieur se trahit par les quantifications lourdes qu'il exige — dans le cas de l'induction complète c'est la quantification le long de toutes les propriétés de nombres naturels, dans les autres exemples ce sont des quantifications dans la classe des classes d'équivalence. (Voir *Euclides* 35,241-272,1959-1960. Logik als Gegenstand und Methode, in I.C.M.I.-Seminar, Aarhus 1960.)

i) Voir par exemple: Dina VAN HIELE-&ELDOF, *De didactiek van de Meetkunde in de eerste klas van het VMO*, Utrecht 1957. P. M. VAN HIELE, *De problematiek van het inzicht*, Utrecht 1957. Ou l'abrégé dans le rapport cité dans 2, p. 1).

Ce n'est pas par hasard que les Van Hiele ont eu cette idée. Autant que je sache, ils ont été les premiers auteurs d'un manuel dans lequel le processus d'apprentissage est conçu comme un processus de réinvention. La théorie des niveaux est étroitement liée à la conception moderne des mathématiques comme activité. Les méthodes traditionnelles tendent à une inversion des niveaux: on descend des niveaux supérieurs aux inférieurs au lieu de monter de bas en haut.

5. L'inversion didactique des niveaux peut être pénible pour celui qui apprend. Mais ce qui est vraiment funeste, c'est l'habitude de négliger les problèmes de montée à partir du niveau zéro. Je pense que c'est ce qui explique la faillite presque complète de notre enseignement — faillite démontrée par le fait qu'à une minorité presque négligeable près, on est absolument incapable d'appliquer les mathématiques qu'on a apprises même aux problèmes les plus simples qui se présentent hors des mathématiques.

Aux yeux de certains mathématiciens ce n'est pas un inconvénient. Pour moi cette indifférence par rapport aux applications manifestée dans les programmes modernes, est un danger. J'ai peur qu'un jour ceux qui appliquent les mathématiques ne se révoltent contre la tyrannie des mathématiciens et qu'ils ne réussissent à retrancher aux mathématiciens le droit d'enseigner les mathématiques au niveau secondaire.

Dans beaucoup de pays les professeurs des lycées confrontés avec les résultats de l'enseignement primaire se plaignent des instituteurs. Il est vrai qu'il y a des plaintes bien fondées. Mais quoi qu'il en soit, personne ne peut nier que, à l'école primaire, la vaste majorité de nos contemporains ont appris, non seulement le calcul arithmétique, mais aussi ses applications et — je me hâte d'ajouter — des applications non triviales et dont on ne doit pas déprécier la difficulté et l'importance. Prenez les problèmes suivants.

- 1) Jean a 10 ans. Dans combien d'années aura-t-il 16 ans?
- 2) Jean a 16 ans. Combien d'années sont passées depuis qu'il avait 10 ans?
- 3) Jean a 10 ans et Pierre a 16 ans. De combien d'années Pierre est-il plus âgé que Jean?

- 4) Jean a 10 ans et Pierre a 16 ans. De combien d'années Jean est-il plus jeune que Pierre?
- 5) Jean a 10 ans et Pierre a 16 ans. Dans combien d'années Jean aura-t-il l'âge actuel de Pierre?
- 6) Jean a 10 ans et Pierre a 16 ans. Combien d'années se sont passées depuis que Pierre avait l'âge de Jean?
- 7) En 1916 Jean avait 10 ans. Quand était-il né?
- 8) Jean est né en 1910. Quel âge avait-il en 1916?

Voilà une liste de problèmes autour de la simple soustraction $16-10$ qu'on pourrait aisément centupler — une liste ridicule aux yeux du monde, même d'intelligence moyenne. Evidemment tous ces problèmes sont des variations légères sur le même thème. Mais si quelqu'un juge ainsi, cela prouve seulement qu'il a appris ses leçons. En effet chaque instituteur lui dira qu'il a eu une époque de sa vie où il ne connaissait pas cette équivalence et qu'il a coûté assez de peine pour la lui faire comprendre.

Comment expliquer ces succès des instituteurs, vu la faillite de l'enseignement secondaire des mathématiques? Le calcul arithmétique est presque la seule matière où l'enseignement respecte les niveaux et où l'élève est autorisé de passer d'un niveau à l'autre par les efforts réinventifs qui lui sont propres. En arithmétique le niveau zéro est celui des quantités concrètes. On y séjourne longuement, on ne s'en éloigne pas trop pendant des années et on y retourne chaque fois que des notions nouvelles sont introduites. L'élève découvre les additions et les soustractions dans le monde concret et il invente les moyens de les exécuter abstraitement. Des applications comme celles que je viens d'énumérer n'ont pas le caractère de problèmes nouveaux, par ce que, vu l'ordre de l'enseignement, appliquer le calcul, ce n'est que retourner aux principes dont on est parti. J'admets que dans l'enseignement des multiplications et des divisions on est parfois moins diligent, et que, arrivé aux fractions, l'instituteur a oublié les leçons apprises au début. Il n'a plus la patience d'attendre l'assimilation des notions et des opérations au niveau zéro, le niveau des fractions concrètes, mais il essaie le tour de force de pousser ses élèves du niveau 0 au premier niveau, en leur enseignant

des algorithmes qu'ils ne savent ni comprendre ni appliquer. Cela se répète en algèbre et en géométrie. On s'efforce de partir du premier niveau, celui des notions abstraites ou même de niveaux plus élevés. Ce qui devrait être le point de départ, apparaît après coup, sous le titre d'applications. On fait un dessert non digérable de ce qui aurait été bon pour hors d'œuvre. En posant à l'élève des problèmes appliqués, on lui demande de retourner à un niveau où il ne s'est jamais exercé.

Permettez-moi d'illustrer ce que j'ai dit par deux anecdotes. La scène de la première est un guichet où je vais expédier un télégramme pour l'étranger, au tarif de 17 cents (de florins) par mot. Le fonctionnaire comptait les mots et il trouvait 23. Il faisait habilement et sans erreur la multiplication 23×17 . Il la contrôlait plusieurs fois et il la trouvait exacte. Je lui payais le montant. Mais après cela il se rappelait que d'après les règles officielles deux de ces 23 mots ne valaient qu'un seul, tel que je n'aurais dû payer que pour 22 mots. Alors il revint à l'arithmétique en calculant le produit 22×17 et soustrayant le résultat du résultat originel. La différence apparut être 17 cents qu'il me rendit gentiment.

L'autre anecdote se passe à une station d'essence où j'avais fait graisser ma voiture. L'un des articles que j'avais à payer, était six quarts d'huile à 43 cents (de dollar). L'employé écrivait six fois le nombre 43, l'un sous l'autre, et faisait l'addition.

Je vous dis franchement que c'est à ce dernier garçon que s'adresse ma sympathie. Où l'un sait multiplier comme une machine à calculer mais ne sait pas ce qu'est une multiplication, l'autre se méfie, se moque d'algorithmes raffinés et réduit la multiplication à sa définition. Le second type vaut précisément ce qu'il a l'air, quelque peu que ce soit. Le premier est mieux instruit, grâce à une instruction qui lui permet d'opérer par algorithme à un niveau où il ne se trouve pas. Ces machines à calculer humaines, indispensables jadis, ont été remplacées successivement par des outils meilleur marché, mécaniques, électriques, électroniques. L'homme qui opère à un niveau surfait, ne peut plus entrer en concurrence avec la machine et il ne rapporte plus de pousser des hommes artificiellement à un niveau supérieur.

6. En géométrie le niveau zéro absolu est celui des expériences spatiales naïves, non analysées. L'enfant sait distinguer ou même nommer certaines structures géométriques à peu près comme il connaît la différence entre un chien et un chat et leurs noms. Les objets plus concrets lui sont plus familiers. Il saurait formuler des caractéristiques distinguant le chien et le chat, mais pour le carré et le losange ce serait difficile, sinon impossible. Il n'est même pas sûr qu'il reconnaisse les structures simples géométriques dans chaque position, par exemple qu'il identifie un cube placé sur une face et un cube pendu à un de ses sommets. D'autre part il doit apprendre que les espèces géométriques sont plus importantes et plus faciles du point de vue des définitions formelles que les espèces biologiques. Dans les manuels classiques ce développement est coupé court. On commence la géométrie par quelques définitions formelles à un moment où ni le besoin ni le caractère de définitions formelles ne peut être clair. Il y a même des manuels qui énoncent une définition de ce qu'est une définition. C'est un niveau encore plus élevé.

Les expériences spatiales de l'enfant ne sont pas seulement perceptionnelles. L'enfant sait se mouvoir dans l'espace et sait opérer avec des structures géométriques, par exemple en bâtissant avec des cubes ou en faisant des mosaïques de carreaux. Ce sont ces dernières facultés dont on se sert particulièrement dans les cours modernes d'initiation à la géométrie. Il y a des arguments convainquants en faveur de la géométrie de l'espace comme point de départ, mais dont je ne veux pas endiscuter en ce moment, et une des méthodes est de faire faire aux enfants des modèles de cartons de corps solides. Vous trouvez des détails sur cette technique dans le rapport cité sous 1), p. 1. Une autre méthode est celle de l'étude de la symétrie, où les seuls outils non-mathématiques dont on se sert sont le miroir et le pliage et où l'on arrive assez vite à l'usage de la règle, du compas et de l'équerre (voir p. 1). Une troisième méthode est celle du pavage avec des carreaux. Il est particulièrement intéressant parce qu'il a été l'objet d'une étude détaillée. Je vous rappelle ce rapport merveilleux de feu MM^e van Hiele-Geldof sur renseignement de ce sujet pendant un trimestre, source inépuisable d'enchan

tement et de découvertes didactiques. C'était l'objet principal de sa thèse (voir 4 p. 1 et l'abrégé dans 2 p. 1).

J'en donne encore une fois un bref résumé.

1^{ère} leçon. Discussion de la notion de congruence. Résultat: des figures sont congruentes si elles ne peuvent être distinguées. Tâche: dessiner un trottoir pavé par des carreaux carrés. Deux dessins sont trouvés: celui à deux faisceaux de fissures parallèles continues, et l'autre avec un seul faisceau.

Discussion de la notion de parallèle.

2^e-3^e leçons. Discussion de la notion de polygone régulier. On donne aux enfants quelques sacs contenant un grand nombre de figures de papiers congruentes, à savoir des triangles, pentagones, hexagones, octogones réguliers. Les enfants doivent donner des réponses écrites aux questions: est-il possible de paver un plancher avec des triangles réguliers congruents? etc. Ils construisent ces pavés. Ils découvrent les losanges dans le pavé triangulaire.

4^e-5^e leçons. La même chose avec des triangles, quadrilatères, pentagones, hexagones irréguliers.

6^e-8^e leçons. Dans les pavés triangulaires et quadrilatères on peint des angles égaux avec la même couleur. Par raisonnement les enfants découvrent que les angles du triangle font ensemble 180° ; les faits analogues pour les autres polygones et la relation entre ces faits. Ils découvrent la raison pour laquelle on ne peut paver avec certaines formes de carreaux. Les relations logiques sont représentées schématiquement, en faisant usage de la flèche.

9^e-11^e leçons. Les élèves découvrent des « scies » et des « escaliers » dans les dessins des pavés. Elles sont identifiées par des angles de même couleur. L'égalité des angles opposés dans un parallélogramme est reconnue comme conséquence des phénomènes « scie » et « escalier ». Cette relation est représentée schématiquement par exemple: « scie » \rightarrow dans un parallélogramme les angles opposés sont égaux. Ou: « scie » \rightarrow la somme des angles d'un triangle est 180° .

On construit des arbres « généalogiques » plus longs.

12^e-16^e leçons. Comparaison d'aires par décomposition. Combien de carreaux y a-t-il dans une certaine surface?

L'expérience fut terminée par une épreuve écrite de deux heures.

7. Cette espèce d'initiation est parfois appelée géométrie expérimentale. Je n'aime pas cet adjectif qui évoque à tort l'expérimentation des sciences naturelles. Mais l'expérimentation de l'enfant apprenant la géométrie est tout à fait différente de celle du physicien. Dans la première leçon il y en a qui n'oublie pas dans le dessin du trottoir les grains de sable. Mais une simple remarque du professeur suffit pour qu'ils comprennent que ce n'est pas essentiel. Dès ce moment ils ont saisi le contexte de la géométrie, et leur activité expérimentale va diverger radicalement de ce qu'on appelle des expériences physiques. Ils ne sont pas gênés par de mauvais ajustements de carreaux mal coupés, ils corrigent mentalement tout ce qu'il y a de contraire aux exigences idéales de la géométrie dans les figures concrètes, et ils terminent la construction concrète des pavés dès qu'ils ont compris leur structure.

Ce qu'on appelle géométrie expérimentale, c'est en réalité l'acte d'organiser mathématiquement une matière. En général cette activité est considérée comme un prélude aux mathématiques, qui commenceraient au moment où la mathématisation de la matière est terminée, c'est-à-dire avec la présentation du système déductif. Si c'était correct, la création mathématique qui est souvent l'organisation d'une matière avec des moyens mathématiques, n'appartiendrait pas aux mathématiques, tandis que la lecture passive d'un mémoire serait une activité mathématique. C'est vrai que dans nos publications nous ne rendons pas compte des développements qui nous ont conduits à nos résultats. Par cette discrétion nous forçons le lecteur de réinventer nos inventions. Mais au début des mathématiques, avec des élèves qui n'ont point eu d'expériences réinventives, cette méthode est funeste. En dictant le système déductif à l'élève, nous le privons d'un bénéfice unique, notamment d'apprendre à organiser mathématiquement une matière brute. Cette didactique est fautive du point de vue des mathématiques parce qu'elle ne respecte pas la hiérarchie des niveaux, et du point de vue des applications parce qu'elle étouffe les germes psychologiques de l'applicabilité des mathématiques.

8. La géométrie dite expérimentale n'est rien d'autre que le processus de l'organisation de la matière brute des phénomènes spatiaux. Au début de la géométrie cette activité peut être réalisée avec du matériel concret que l'élève sait manipuler, c'est-à-dire où il peut travailler avec ses mains. C'est assez naturel. Plus tard on peut se passer de ce matériel concret, mais cela ne veut pas dire qu'il n'y ait plus d'expérimentation. L'organisation de la matière brute doit se répéter dans chaque phase. L'analyse des divers concepts d'angle — il y en a au moins quatre dans les mathématiques scolaires — est un thème presque inépuisable et plus approprié à exciter l'activité réinventive que bien des thèmes classiques ou même leurs remplaçants modernes qu'on propose. Un autre sujet de ce genre sont les notations d'ordre. L'analyse de tels concepts peut être reprise à plusieurs niveaux. Elle peut conduire à des systèmes axiomatiques, quoique ce ne soit pas son importance primordiale.

Si l'activité créative en mathématiques se bornait à constater que telle proposition soit vraie et telle autre soit fausse, nous pourrions céder les mathématiques aux machines à calculer. Nos méthodes d'instruction suggèrent cette image distordue des mathématiques. Est-il étonnant que nous ne réussissions pas à combattre des idées fausses sur les mathématiques dont nous avons été les auteurs ?

Les problèmes les plus importants dont le mathématicien s'occupe ne sont pas ceux où la réponse est «vrai » et «faux », mais ce sont les problèmes d'organisation, la recherche des définitions formelles, qui peuvent être bonnes ou mauvaises, ou meilleures ou pires. Mais dans notre enseignement l'élève n'apprend pas à formuler des définitions. On les énonce et on force l'élève de les accepter. Et cela se passe déjà à un niveau où l'élève ne peut comprendre l'utilité d'une définition pour l'organisation de ses connaissances.

Au début de la géométrie il n'y a pas de définitions formelles. L'enfant a appris ce qu'est une chaise par le fait même que certains objets ont été appelés tels. Il sait ce qu'est un losange dès qu'on lui dit: voici un losange. Dans les pavages ou pliages il est confronté avec des losanges d'origines variées. Il apprend qu'un losange peut être décomposé en deux triangles isocèles

congruents de deux manières différentes ou en quatre triangles droits congruents, qu'il a des côtés égaux, des diagonales orthogonales et partageant l'une l'autre en parties égales, des angles égaux opposés, des côtés opposés parallèles etc. Le losange est le symbole de toutes ces propriétés. Leur nombre est grand, mais heureusement elles ne sont pas isolées l'une de l'autre, mais liées par des relations. Au moyen de ces relations on peut organiser l'ensemble des propriétés du losange, et c'est une découverte fondamentale qu'une seule propriété, par exemple, celle des côtés égaux, suffit à en dériver toutes les autres. Quand l'élève est passé par ces phases, il a compris le sens de la définition formelle et il sera en état d'accomplir des actes semblables d'organisation. Mais la méthode traditionnelle, c'est de lui offrir des définitions dans un domaine où il n'a pas eu d'expériences, et même avant qu'il ne puisse saisir la raison de définitions formelles — méthode tout à fait contraire à celle que nous observons en créant des mathématiques. Nous savons bien qu'il est impossible de faire des définitions utiles dans un domaine qui n'est pas encore exploré, mais nous demandons à l'élève de commencer l'exploration où elle devrait aboutir.

9. Cette inversion anti-didactique est poussée à l'extrême dans les programmes récents de géométrie axiomatique. Je nie absolument que quelque axiomatique que ce soit puisse être un des buts de l'enseignement scolaire en géométrie, mais j'admettrais bien l'axiomatisation. Il faut distinguer axiomatique et axiomatisation. J'ai expliqué cela dans les discussions d'Aarhuus, et la meilleure chose que je peux faire, c'est de répéter mes arguments pour ceux qui n'ont pas assisté à ce colloque.

Dans un processus d'apprentissage réinventif, l'organisation mathématique de la matière empirique serait suivie par l'organisation des faits mathématiques acquis. Guidés par des besoins logiques, on remplace des définitions par d'autres, on essaye des systématisations. C'est ce qu'on pourrait appeler l'organisation logique locale (locale pour la distinguer de l'axiomatisation qui est plutôt globale). Ni l'organisation mathématique de la matière empirique ni l'organisation logique de la matière mathématique ne sont exercées à l'école. On présente à l'élève des systèmes

pré-organisés localement et on renonce volontiers à l'occasion d'exercer ces facultés d'organisation qui d'après toutes les expériences pédagogiques ouvrent les perspectives les plus vastes pour la réalisation d'exercices. Ce système sera couronné par la présentation d'un système axiomatique. En effet, le professeur qui n'a pas appris à initier des élèves d'un niveau plus bas aux méthodes d'invention et d'organisation, sera-t-il en état de faire autre chose que de confronter l'élève de nouveau avec un système préfabriqué? Il est vrai que ceux qui proposent ces nouveaux programmes, ajoutent qu'on ne doit pas laisser tomber ces systèmes du ciel, mais c'est une remarque qui ne sert qu'à apaiser leur conscience pédagogique et celle des autres, parce que si c'était vraiment sérieux, ils s'occuperaient beaucoup plus longuement de ce qui devrait précéder la présentation de l'axiomatique elle-même. En effet c'est le seul point où l'on pourrait être original et où l'on pouvait vraiment secourir ceux qui doivent enseigner le sujet.

Les partisans de la géométrie axiomatique à l'école aiment à dire que la géométrie traditionnelle est déjà axiomatique, mais que son axiomatique est mauvaise, abuse des suppositions gratuites et sous-entendus. Pourquoi pas l'honnêteté dès le début? Avec elle on irait le plus loin.

On s'imagine que le défaut principal de l'enseignement de la géométrie se trouve dans la matière à enseigner. Remplacer le système axiomatique mauvais par un système meilleur, ce serait améliorer l'enseignement. Mais cet argument prouve qu'on n'a point envisagé le problème du point de vue didactique. Il y a une différence importante entre le système traditionnel et les systèmes axiomatiques — la différence entre l'organisation locale et l'organisation globale. On sait combien de peine il coûte à un élève moyen d'embrasser d'un coup d'œil une simple démonstration, il est encore plus difficile de saisir les connexions d'un théorème spécial avec d'autres. Grâce à nos méthodes brusques de présentation, la plupart n'atteignent pas ce niveau. Mais on aimerait à les pousser plus haut, à l'organisation globale, dont ils ne comprennent rien. Toujours on espère que cela fonctionnera automatiquement. Mais si c'est le but, il vaut mieux de construire et dresser des machines. On se vante même des dispositifs

secrets qu'on a su interpoler dans le système — des délicatesses pour le connaisseur, mais inexplicables à celui qui apprend, et motivées par la croyance dans leur fonctionnement automatique. Je sais bien que c'est une attitude très commune dans notre enseignement mais c'est 'une mauvaise pédagogie, et l'axiomatique est le domaine par excellence où l'on peut la cultiver.

Je reviens à cet argument en faveur de la géométrie axiomatique à l'école. On dit qu'il ne faut que remplacer les mathématiques mauvaises par les bonnes mathématiques. Avec honnêteté on ira plus loin. Mais cette honnêteté absolue est un fantôme. En exactitude les méthodes traditionnelles ne diffèrent des proposées que graduellement. Il n'est pas vrai que l'axiomaticien se passe de suppositions gratuites et de sous-entendus. Particulièrement en géométrie les systèmes axiomatiques sont tellement compliqués qu'il faut remplacer de grandes parties de la déduction par des formules apprises par cœur par l'élève telles que « nous avons, omis la démonstration qui n'offre pas de points de vue nouveaux ». C'est un verbalisme plus dangereux que celui du système traditionnel.

Mais il y a plus. Tous ces systèmes acceptent sans aucune critique la syntaxe et la sémantique de la langue commune dans laquelle les axiomes sont formulés. On définit « deux droites... sont parallèles... » (adjectif), on continue à parler sur « ... une parallèle » (substantif) et on fait une projection « ... parallèlement » (adverbe). On définit des « droites... sécantes » et on continue à parler des « droites... concourantes », etc.

C'est complètement justifié à ce niveau. Mais cela prouve aussi qu'il n'y a pas d'exactitude absolue. A chaque niveau correspond une forme d'exactitude qui lui est propre. Exiger de l'élève l'exactitude d'un niveau où il ne se trouve pas, est malhonnête au nom de l'honnêteté.

10. Les prétentions des partisans de l'axiomatique à l'exactitude absolue sont aisément réfutées par le degré médiocre de formalisation de leurs systèmes, qui sont tout à fait naïfs et mal organisés du point de vue linguistique. A Aarhus je me suis demandé si ce n'est pas plutôt la formalisation que l'axiomati-

sation que nous devrions favoriser à l'école. J'ai apporté deux arguments: premièrement que la formalisation se faisant localement est plus facile que l'axiomatisation, globale; deuxièmement que la formalisation est l'organisation, non des mathématiques, mais du langage, et par conséquent se prête à la réalisation d'exercices plus que l'axiomatisation. Aussi en formalisation il y a des degrés. Par tradition celle du langage géométrique est particulièrement basse, mais doit-on respecter cette tradition quand on se met à en bouleverser tant d'autres? Quoi qu'il en soit, il est étonnant que le besoin de formalisation dans l'enseignement mathématique secondaire ne soit même pas discuté.