Revue d'histoire des mathématiques
27 (2021), p. 229–296
doi:10.24033/rhm.235

TEXTES & DOCUMENTS

UN COURS INÉDIT DE CHASLES EN SORBONNE 'CONSIDÉRATIONS SUR LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES', DISCOURS D'OUVERTURE DU COURS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE (1847–1848)

Nicolas Michel & Ivahn Smadja

Résumé. — Nous présentons une transcription et un commentaire d'un cours inédit du géomètre français Michel Chasles (1793–1880), dont le manuscrit est conservé aux Archives de l'Académie des sciences. Il s'agit du discours d'ouverture du cours de 'Géométrie supérieure' pour l'année scolaire 1847–1848. Le cours de cette année portait sur la théorie des sections coniques. Dans cette première leçon, Chasles présente une histoire des méthodes employées pour l'étude des coniques et justifie le choix qu'il fait pour ce cours de revenir à la « Méthode des Anciens » pour former une théorie à la fois pleinement générale et purement géométrique de ces courbes.

Abstract (An unpublished lecture by Chasles at the Sorbonne: 'Considerations on the theory of conical sections', Opening lecture of the higher geometry course (1847–1848))

We present an annotated transcription of an unpublished lecture given by the French geometer Michel Chasles (1793–1880), obtained from a manuscript preserved at the archives of the Académie des sciences. This was the opening lecture for the course of higher geometry for the academic year 1847–1848.

Texte reçu le 14 septembre 2020, accepté le 12 janvier 2021, révisé le 24 février 2021.

N. Michel, Mathematisch Instituut, Utrecht Universiteit, Hans Freudenthalgebouw, Room 609, 6, 3584CD Utrecht.
Courrier électronique : n.p.r.michel@uu.nl
I. Smadja, (1) Université de Nantes, CAPHI (EA 7463), Chemin de la Censive du Tertre, 44312 Nantes, (2) Université de Paris, SPHERE (UMR 7219), Campus Grands Moulins.
Courrier électronique : ivahn.smadja@univ-nantes.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 00A30, 51–03.

Mots clefs : Géometrie, coniques, Chasles, Terquem, histoire des mathématiques.

Key words and phrases. — Geometry, conics, Chasles, Terquem, history of mathematics.

That year's teaching dealt with the theory of conic sections. In this lecture, Chasles presents a history of the methods used in the study of conic sections, and justifies his choice in his teaching to go back to the "Method of the Ancients," which he viewed necessary to form a fully general and purely geometrical theory of these curves.

INTRODUCTION

Le présent document est une retranscription, augmentée de quelques notes explicatives, d'un texte manuscrit conservé dans les archives scientifiques de Michel Chasles (1793–1880), à l'Académie des sciences de Paris. Ce manuscrit correspond à une version retravaillée du discours prononcé par Chasles à la Faculté des sciences de Paris (c'est-à-dire en Sorbonne), en ouverture de son cours pour l'année universitaire 1847–1848, en sa capacité de professeur de Géométrie supérieure. L'enseignement de Chasles, cette année, se voulait une théorie purement géométrique des sections coniques. Dans ce discours d'ouverture, Chasles a deux objectifs : le premier est de discuter l'histoire de la théorie des sections coniques, ou, plus exactement, l'histoire des méthodes par lesquelles cette théorie a été traitée jusqu'au célèbre *Traité des propriétés projectives* de Jean-Victor Poncelet (1788–1867). Le second objectif, qui découle du premier, consiste à discuter, sur la base de cette étude historique, des mérites respectifs desdites méthodes ; de manière à faire valoir, ultimement, la nécessité d'un retour à la « Méthode des Anciens » pour l'étude de la géométrie des coniques.

Ce texte est intéressant à plus d'un titre. Il constitue un maillon manquant entre deux phases de la carrière scientifique du géomètre français, qui ont pu apparaître disjointes. Dans l'œuvre de Chasles, le travail historiographique sur les méthodes de la géométrie, engagé dès l'*Aperçu historique* publié en 1837, aussi bien que les thèses de nature épistémologique qui le sous-tendent, sont liés de manière originale aux mathématiques produites. La complexité de cette œuvre a, ces dernières années, suscité un intérêt croissant [1]. L'historiographie et l'épistémologie de Chasles permettent ainsi une meilleure compréhension de sa pratique mathématique telle qu'on peut l'observer dans son *Traité de Géométrie supérieure*, publié en 1852, mais largement appuyé sur le contenu des cours dispensés en Sorbonne dès 1846. On sait également que Chasles, dans les années 1850, s'est

1 Voir par exemple Nabonnand [2011], Chemla [2016], Smadja [2016], Bussotti [2019], Michel [2020a], Michel & Smadja [2021a ;b].

tourné vers l’étude des courbes et surfaces géométriques, et en particulier des coniques et des quadriques. Ce travail devait par la suite culminer avec d’une part la publication en 1865 d’un *Traité des Sections coniques*, et d’autre part, l’élaboration entre 1864 et 1867 de la célèbre théorie des caractéristiques ; une méthode générale pour l’énumération des coniques du plan satisfaisant cinq conditions géométriques. Cependant, de cette théorie des coniques, seule était jusqu’ici disponible l’« exposition dogmatique » que Chasles en proposait dans les années 1860, mais sans les réflexions historico-philosophiques dont elle se nourrissait. Ce texte constitue donc une pièce importante pour la compréhension de la trajectoire mathématique de Chasles, de sa défense des méthodes purement géométriques, ainsi que de son rejet partiel des travaux de certains de ses contemporains, dont notamment Poncelet.

Avant de donner notre retranscription de ce document, nous discuterons brièvement le contexte dans lequel Chasles enseignait la géométrie, le statut du manuscrit retranscrit ici, et le débat épistémologique qui sous-tend le contenu de ce cours.

Le cours de Géométrie supérieure de Michel Chasles (1846–1880)

Le cours de Géométrie supérieure, dont ce texte est issu, fut créé en 1846 spécialement pour Chasles, sous l’influence de Louis Poinsot (1777–1859) [2]. Dès 1868, Pierre-Ossian Bonnet (1819–1892) commença à régulièrement suppléer Chasles dans ses charges d’enseignement [3]. En 1878, Bonnet fut élu à la chaire d’Astronomie laissée vacante par le décès de Le Verrier ; et Gaston Darboux commença à assurer les cours de Chasles. Après

2 Cf. [Boudin 1869, p. 6]. Cette dette envers Poinsot est aussi exprimée par Chasles dans son *Rapport sur les progrès de la géométrie,* [Chasles 1870, p. 219–220]. Chasles et Poinsot partageaient de nombreuses thèses sur le mérite des méthodes géométriques par rapport à l’analyse ; voir par exemple [Chasles 1837a, p. 415–416 ; 614–615] et [Poinsot 1842, p. 352–353].

3 Après le décès de Charles-François Sturm (1803–1855), Joseph Liouville (1809–1882) entreprit de devenir professeur à la Faculté des Sciences à son tour. Pour cela, il écrivit à Chasles en 1856 pour proposer de l’assister dans l’enseignement de la géométrie supérieure. Ce dernier refusa, invoquant notamment le petit nombre d’étudiants qui suivaient ce cours et le statut trop peu prestigieux de cette position pour un mathématicien de la stature de Liouville (qui finit par obtenir une chaire de mécanique l’année suivante) ; cf. [Lützen 1990, p. 195–196]. En outre, Liouville suivit le cours de Chasles lors de l’année 1847–1848, c’est-à-dire celui dont nous présentons ici la première leçon. Les notes qu’il prit à cette occasion sont conservées à la Bibliothèque de l’Institut de France (Ms 3618, p. 18v-39r).

le décès de ce dernier en 1880, c'est Darboux qui obtint la chaire de Géométrie supérieure ; il en sera aussi le dernier détenteur [4].

De ce cours, quelques traces publiées subsistent. Le discours inaugural de l'année scolaire 1846–1847 fut reproduit dans le *Journal de Liouville*, puis inséré avec quelques légères modifications dans le *Traité de Géométrie supérieure*. Ce *Traité*, quant à lui, est présenté comme fondé sur l'enseignement que Chasles délivrait en Sorbonne. Les notes prises par Liouville alors qu'il suivait l'enseignement de Chasles permettent d'ailleurs de confirmer la présence et la centralité, dès 1847, de la plupart des théories que Chasles allait placer au cœur dudit *Traité* [5] (cf. fig. 1). En fait, une part importante des publications scientifiques de Chasles entre 1846 et 1867, que ce soit sous la forme de livres ou de communications à l'Académie des sciences de Paris, furent d'abord préparées en vue de ces leçons en Sorbonne. Ce cours constituait ainsi un véritable laboratoire dans lequel Chasles pouvait faire varier à loisir le sujet de son enseignement d'année en année, élaborer de nouvelles façons d'écrire et de présenter la géométrie auprès d'étudiants ayant reçu au préalable une formation générale en mathématiques.

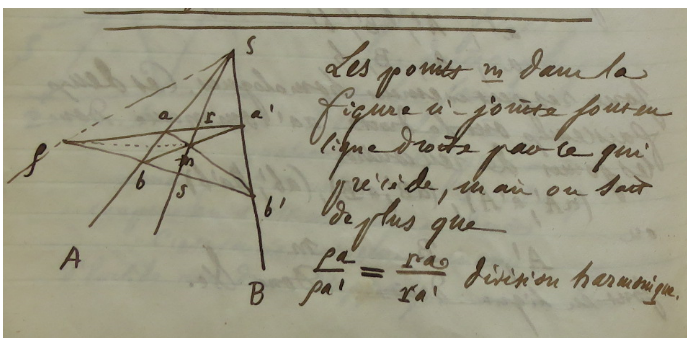


Figure 1. Extrait des notes prises par Liouville lors du cours de Géométrie supérieure de Chasles, 1847–1848. Bibliothèque de l'Institut Ms 3618, 22v.

Il est difficile d'établir avec précision un profil socio-professionnel de l'auditoire de Chasles. Les cours à la Faculté des Sciences, à cette époque,

4 Cf. [Croizat 2016, p. 713–716]. Le contenu des cours changea complètement après la passation de cette chaire à Darboux, qui choisit d'enseigner la géométrie infinitésimale et les méthodes analytiques plutôt que la géométrie pure de Chasles.

5 C'est le cas des théories du rapport anharmonique, de la division homographique, ou encore de l'involution. Cependant, comme nous le verrons plus loin, les notes de Liouville attestent que le principe des signes n'était pas encore acquis en 1847.

sont des cours publics; et l'inscription n'y est requise que pour le passage d'examens (licence ou doctorat ès sciences). Ce format permit en revanche à divers militaires de passage ou à d'occasionnels amateurs de mathématiques de suivre ces cours de manière irrégulière. Ainsi, le vice-amiral de la Marine Ernest de Fauque de Jonquières (1820–1901) put suivre quelques uns des cours de Chasles lors de ses passages ponctuels à Paris, mais également emporter avec lui des notes desdits cours lors de ses multiples expéditions militaires et coloniales [6]. Au-delà du seul cas De Jonquières (et du cours de géométrie supérieure), les facultés françaises dans les années 1840 attirent un public divers, comprenant aussi bien des lycéens préparant le baccalauréat que des auditeurs libres en quête de distraction [7].

En outre, se trouvaient dans l'auditoire de Chasles bon nombre d'étudiants étrangers [8]. Mentionnons-en deux qui non seulement assistèrent aux cours de Chasles, mais en propagèrent ensuite les enseignements dans leurs pays respectifs. Le premier est Thomas Archer Hirst (1830–1892). Ce dernier avait quitté son Angleterre natale au jeune âge de vingt ans sur le conseil de John Tyndall (1820–1893) pour étudier la géométrie à Marburg, puis à Göttingen et à Berlin (auprès, notamment, de Jakob Steiner (1796–1863)). Sur le chemin du retour, en 1853, il s'arrêta à Paris pour suivre les cours de Liouville et de Gabriel Lamé (1795–1870), mais aussi pour nouer des liens avec divers mathématiciens parisiens dont Chasles. Peu après son mariage en 1854, sa femme Anna Hirst (née Martin) tombera gravement malade, et le jeune couple s'installera dans le sud de la France à la recherche d'un traitement. Après le décès tragique de sa femme durant l'été 1857, Hirst passera près d'un an à Paris, où il suivra les cours de géométrie supérieure de Chasles, et échangera avec Poinsot, Liouville, ou encore Joseph Bertrand (1822–1900). Peu après son retour définitif en Angleterre en 1859, Hirst deviendra une figure incontournable de la scène mathématique londonienne où, connu comme l'un des rares partisans de la géométrie pure, il se verra attribuer diverses

6 Dans une lettre ouverte publiée dans le cadre d'une polémique contre celui qui avait été son 'maître' en géométrie, De Jonquières affirmait ne pas avoir assisté au cours de Chasles « dans toute [sa] vie, plus de six ou sept fois réparties sur plusieurs années différentes » ; cf. [de Jonquières 1867, p. 11]. Ses multiples publications, préparées en mer ou depuis diverses postes coloniaux, montrent toutefois qu'il était en possession de copies des communications et cours de Chasles.

7 Cf. Noguès [2008].

8 Le Paris du XIXe siècle, en particulier au lendemain de la monarchie de Juillet, occupait une place de choix sur le « marché universitaire mondial », et attirait des étudiants aux origines sociales et géographiques diverses, auxquels était réservé un « accueil très libéral » ; cf. [Moulinier 2012, p. 33–75].

positions de pouvoir aussi bien à l'ancienne *Royal Society* qu'à la nouvelle *London Mathematical Society*. Non content de publier et d'enseigner des méthodes inspirées par celles de Steiner et de Chasles, il fut également l'artisan principal de l'attribution de la médaille Copley à Chasles [9].

L'autre étudiant étranger de quelque renom à fréquenter les classes de Chasles est le mathématicien Hubert Anson Newton (1830–1896). En 1855, ce dernier devint professeur (*full professor*) de mathématiques à l'Université Yale, où il avait été étudiant seulement quelques années plus tôt. Avant de prendre ses nouvelles fonctions, toutefois, il eut la possibilité de passer une année en Europe pour perfectionner sa formation scientifique, et il y suivit notamment les cours de Chasles, dont il reprit à son compte la défense de la géométrie pure, ainsi que les méthodes relatives à la théorie des courbes planes. Cette relation à Chasles est d'autant plus importante historiquement qu'à son retour aux États-Unis, Newton fut le professeur de Josiah Willard Gibbs (1839–1903) et d'Eliakim Hastings Moore (1862–1932), deux savants qui furent amenés à jouer un rôle majeur dans la formation de la « communauté de recherche mathématique américaine [10] ».

Au-delà des seules personnes physiquement présentes à la Faculté des Sciences lors de ces leçons, la géométrie supérieure de Chasles se diffusa auprès d'un public étudiant plus large dans le reste de la France. Sa position privilégiée comme membre de l'Académie des Sciences (à partir de 1851) et le relatif retrait de Poncelet des questions de géométrie pure firent de lui une autorité en la matière pour les nombreux rédacteurs de manuels, traités, et livres d'exercice à destination du secondaire et des classes préparatoires. Pour autant, si plusieurs des méthodes de Chasles furent rapidement intégrées dans ces ouvrages d'enseignements (à l'instar des théories de la division homographique ou de l'involution), ce fut toujours en étant mêlées avec des méthodes d'inspiration très différente (comme les transversales de Carnot, ou même des techniques algébriques). Les thèses plus proprement historiques ou épistémologiques de Chasles, quant à elles, disparurent presque complètement au cours de ces adaptations pour des publics et des contextes didactiques nouveaux [11]. Par ailleurs, parmi toutes les thèses

---

9 Cf. [Gardner & Wilson 1993, p. 723–731]. Malgré l'admiration que Hirst portait aux traités de Chasles, il se montra bien plus critique quant aux capacités didactiques et professorales de ce dernier. Sur l'attribution de la médaille Copley à Chasles, cf. [Michel 2020b, p. 228–233].

10 Cf. [Parshall & Rowe 1994, p. 21–23], en particulier.

11 Cf. [Moussard 2015, p. 211–230].

de mathématiques soutenues en France lorsque Chasles enseignait en Sorbonne, presque aucune ne vise à utiliser, prolonger, ou discuter les méthodes et concepts de la géométrie supérieure [12].

Hors de France, l’enseignement de Chasles rencontre un public étendu et trouve de nombreux relais par le biais de ses traités ou des publications qu’il en tire. Citons notamment Luigi Cremona (1830–1903), qui obtint en 1860 une chaire de géométrie supérieure à l’Université de Bologne, pensée sur le modèle de celle de Chasles. Le traité que Cremona publia deux ans plus tard, sur la théorie des courbes planes, revendique clairement cette filiation, tout en la mâtinant de références à la littérature germanophone dont Chasles était notoirement ignorant [13]. En Irlande, George Salmon (1819–1904), dans la préface de la première édition de son traité sur les courbes planes publié en 1852, mentionne son désir de voir enfin paraître le *Traité de Géométrie supérieure*, et en particulier les textes de Chasles sur les courbes cubiques (qui, finalement, ne figureront pas dans ledit *Traité*, mais seront publiés en 1853 dans les *Comptes-rendus de l’Académie des sciences*) [14]. Enfin, aux États-Unis, Newton mobilise le contenu de ces mêmes cours sur les courbes cubiques (qu’il a pu suivre en personne) dans son propre enseignement et dans ses publications [15].

Deux leçons d’ouverture, entre histoire et géométrie

Les leçons d’ouverture de Chasles étaient mises au service d’une tâche bien précise : il s’agissait, en 1846 comme en 1847, de situer historiquement ce qui allait faire l’objet des leçons suivantes, qu’il s’agisse d’une branche de la géométrie ou d’une famille de courbes. Ce faisant, Chasles visait à dégager l’importance théorique de son édifice par rapport aux travaux de ses prédécesseurs, mais aussi à justifier le choix des méthodes employées dans la constitution dudit édifice. Ainsi, le cours de géométrie supérieure tel que Chasles l’envisageait dans son discours inaugural de 1846 se présentait comme une continuation de l’« analyse géométrique »

---

12 La seule véritable exception est la thèse défendue en 1871 par Sylvère Nicolas Maillard, qui portait sur l’application de la théorie des caractéristiques aux courbes cubiques ; cf. [Michel 2020b, p. 252–254]. Pour autant, Chasles n’était pas membre du jury de cette thèse. Maillard était un normalien (promotion 1864) et un agrégé de mathématiques (1867, 3e rang). Il devint par la suite professeur de mathématiques et d’astronomie à la Faculté de Poitiers. En outre, cinq thèses portant sur l’attraction des ellipsoïdes furent soutenues en France entre 1840 et 1863 ; elles contiennent toutes une mention plus ou moins brève des travaux de Chasles sur ce sujet.

13 Cf. [Cremona 1862, p. 1–3].

14 Cf. [Salmon 1852, p. v].

15 Cf. Newton [1861].

des Grecs par des moyens autres que ceux fournis par les outils algébriques développés par Descartes et ses successeurs. Depuis le début du XIXᵉ siècle, selon Chasles, la géométrie pure s'était dotée de maintes méthodes qui lui permettaient enfin de rivaliser avec l'analyse sur le terrain de la généralité ; et notamment celles de Gaspard Monge (1746–1818) et de Lazare Carnot (1753–1823). Ces méthodes formaient néanmoins un ensemble disparate et décousu, auquel il fallait apporter ordre et système. C'est ce que Chasles se proposa de faire en réorganisant le discours géométrique autour des théories du rapport anharmonique, des divisions homographiques, et de l'involution. Ce recentrage théorique s'appuyait parallèlement sur la constitution d'une nouvelle technique de description des figures géométriques, dont le principe des signes allait fournir plus tard le fondement, de sorte à en capturer d'un même coup l'ensemble des configurations possibles sans pour autant recourir à l'emploi d'un système de coordonnées et aux équations de l'algèbre.

Pour autant, si la destination propre de cet enseignement était la réorganisation (ou mise en ordre rationnel) de ce savoir géométrique accumulé, la méthode réglant la constitution de cette archive du savoir géométrique était, quant à elle, essentiellement fondée sur les techniques historiographiques de Chasles et sur sa lecture méticuleuse de manuscrits mathématiques anciens [16]. Ainsi, les discours historiques placés en amont de l'exposition de ses nouvelles méthodes n'étaient pas pour Chasles simple affaire de motivation pédagogique ou de curiosité humaniste, mais bel et bien une composante à part entière de sa recherche mathématique. C'est exactement le sens de cette remarque, donnée dans les premières pages de la leçon inaugurale de 1846 :

> Où trouverons-nous les éléments dispersés de cet enseignement nouveau ? Dans l'étude attentive des travaux de nos devanciers. Nous devrons consulter les ouvrages des Grecs, qui se présentent les premiers dans la carrière, qu'ils ont parcourue avec un grand succès ; puis suivre les développements de la science chez les Modernes ; puis enfin aborder les doctrines du XIXᵉ siècle [17].

La Géométrie supérieure telle qu'elle fut enseignée en 1846 (et telle qu'elle devait être présentée dans le *Traité* de 1852) se limitait à ce travail de réorganisation et de réécriture des propositions et méthodes de la géométrie ; elle n'était en outre appliquée – à de rares exceptions près – qu'à des figures rectilignes ou à des systèmes de cercles. Dans le cours de

---

16 Sur la nature de ces techniques et les liens qui les unissent au travail proprement mathématique de Chasles, voir Michel & Smadja [2021a].

17 Cf. [Chasles 1847, p. 3].

l’année 1847–1848, Chasles chercha à poursuivre ce premier effort pour en tirer une méthode nouvelle pour l’étude de la théorie des sections coniques, c’est-à-dire la première espèce de courbes qui se présente lorsqu’on cherche à dépasser le cadre des figures rectilignes. Les coniques étaient, aux yeux de Chasles, des courbes d’une importance capitale, et ce pour au moins deux raisons. Elles jouent un rôle majeur dans bon nombre d’applications de la géométrie à des phénomènes physiques (que ce soit en mécanique ou en optique) ; elles servent en outre à la « résolution des questions qui admettent trois ou quatre solutions », qu’il s’agisse de la construction de courbes ou de la construction des équations, ce qui constituait même pour Chasles leur « destination philosophique et essentielle [18] ». La question soulevée par Chasles est alors celle de la méthode qu’il faut adopter pour étudier ces courbes. Pour répondre à cette question, comme de coutume, Chasles se propose de retracer leur histoire. Et au terme de cette étude historique, il conclut qu’il faut là encore poursuivre la « Méthode des Anciens ».

Ces deux discours introductifs jouent donc des rôles analogues dans la construction par Chasles d’édifices théoriques pourtant distincts. Bien que les terrains historiques ne se recoupent que partiellement (et qu’ainsi, Apollonius joue un rôle bien plus important dans le discours de 1847 que dans celui de 1846, et inversement pour Pappus), on y trouve des schémas historiographiques comparables. Ces derniers sont, dans chaque cas, structurés par trois moments phares que sont la géométrie des Anciens, l’introduction de nouvelles méthodes par les Modernes, puis le renouveau de l’analyse géométrique des Anciens au XIXe siècle. De plus, ces récits sont dans les deux cas (et au même titre que l’*Aperçu Historique* de 1837) construits à travers le prisme des *méthodes* géométriques, bien plus celui des théorèmes ou des concepts [19]. Enfin, ces méthodes étudiées dans leur succession historique et dans leur fonctionnement mathématique sont évaluées à l’aune d’une série de critères épistémiques tels que leur systématicité ou leur généralité [20] ; et ainsi leur adoption ou leur rejet dans le cadre de la géométrie supérieure moderne est justifiée.

---

18 Cf. [Chasles 1855, p. 678]. Chasles a ici en tête deux catégories de problèmes qui renvoient à des contextes historiques différents, mais entre lesquels il établira précisément de fructueuses connexions dans une série d’articles échelonnés entre 1853 et 1857, à savoir la construction des courbes (cubiques et quartiques) et ce que jusque vers le milieu du XVIIIe siècle, on appelait la « construction des équations » ; cf. Bos [1984]. Nous y reviendrons dans une contribution à venir.

19 Sur l’importance du concept de « méthode géométrique » au XIXe siècle, cf. [Moussard 2015, 1–6 ; 19–21].

20 Nous reviendrons sur ces critères ci-dessous.

En cela, le cours dont nous présentons ici la toute première trace matérielle posait les fondements historiques et épistémologiques d'une théorie des coniques que Chasles allait abondamment mettre à profit lors des deux décennies suivantes. Le *Traité des Sections coniques* qu'il publia en 1865 était explicitement présenté comme une suite au *Traité* publié treize ans auparavant[21] ; lequel se voulait aussi être une exposition systématique des mé-

21 Cf. Chasles [1865], dont le titre complet est « Traité des Sections coniques, faisant suite au Traité de Géométrie supérieure ».

thodes enseignées en Sorbonne. Mais ce *Traité des Sections coniques* n'avait été initialement conçu que comme le premier volume d'un diptyque finalement resté inachevé. Le second volume envisagé par Chasles devait être centré autour de la théorie des caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second degré, dont il avait déjà fait le sujet de son enseignement lors de l'année 1863–1864, et qu'il avait publiée en partie dans les *Comptes-rendus de l'Académie des sciences* entre 1864 et 1867 [22]. Quelques années auparavant, l'enseignement de Chasles avait également pris pour objet la théorie des coniques sphériques (et des surfaces du second ordre) homofocales [23]. En somme, le manuscrit ici reproduit constitue la première justification historique d'un parti pris méthodologique au cœur d'un programme de recherche poursuivi (et progressivement affiné) par Chasles sur une période de presque vingt ans.

Un manuscrit à deux voix

Le manuscrit que nous retranscrivons ici est selon toute vraisemblance un document que Chasles destinait à la publication. Ce sont bien davantage que de simples notes de cours. En effet, les références à des pages précises de certains ouvrages anciens, ainsi que les nombreuses réécritures, semblent indiquer un texte conçu pour la diffusion écrite dans un journal savant, plutôt que pour la déclamation orale. On ne sait du reste rien du rapport entre ce texte et le contenu réel de l'enseignement prodigué par Chasles en Sorbonne. Néanmoins, ce manuscrit n'est pas un texte achevé, prêt à être imprimé. Il s'agit plutôt d'une version assez avancée, mais toujours en chantier, d'un article qui ne parut jamais.

Le corps de ce texte est écrit à l'encre sur 21 pages, et comporte de nombreuses ratures et rajouts, d'au moins deux types. Il y a des ratures à l'encre, qui sont souvent doublées d'une réécriture du passage barré. Parfois, ce sont des paragraphes entiers qui sont barrés d'un trait à l'encre, lesquels donnent lieu à réécriture au verso, sur des feuilles volantes insérées, ou encore sur des paperolles – c'est-à-dire de petits morceaux de papier pliés et collés sur les feuillets du texte (voir *infra* fig. 4). Ces réécritures comptent de simples changements lexicaux (« ces lignes » devient par exemple « ces courbes »), des précisions quant aux sources et ouvrages auxquels Chasles fait référence, mais aussi parfois des changements plus substantiels quant à la présentation d'un même argument. Nous avons fait le choix de ne retranscrire qu'une fraction minime de ce travail de réécri-

22 Sur la genèse de la théorie des caractéristiques, voir [Michel 2020b, ch. 3 & 4].

23 Cf. [Chasles 1870, p. 231].

ture, afin de préserver la lisibilité du texte. N'ont été préservées les formulations rejetées que lorsqu'elles indiquent des proximités intéressantes ; par exemple, lorsque Chasles hésite entre les adjectifs « expérimental » et « naturel » pour décrire le type de représentation de certains phénomènes physiques que permet la théorie des coniques. Toutefois le contenu des paperolles et des feuilles insérées a été le plus souvent substitué aux passages barrés, de sorte que l'on ait un texte unique sans doublons. Dans les marges, nous indiquons les références et commentaires faits par Chasles au verso de son texte.

On trouve également dans ce manuscrit des incises, soit dans les marges, soit directement dans le corps du texte, qui ne sont pas faites à l'encre mais au crayon (voir *infra* fig. 4). Ces remarques, pour la plupart, ne sont pas de la main de Chasles, mais d'un second auteur. Ces notes ne sont pas signées, et aucune information dans le dossier des Archives n'indique leur provenance (ni même leur finalité) de manière explicite. Cependant, plusieurs indices suggèrent très fortement qu'elles ont pu être l'œuvre du mathématicien Olry Terquem (1782–1862). De manière générale, le contenu de ces notes marginales est très similaire à certains commentaires de Terquem, aussi bien au sujet de la géométrie supérieure de Chasles que de l'histoire des mathématiques en général. Une de ces notes, en particulier, fait référence à « un article sur Apollonius », qui correspond très vraisemblablement à une notice consacrée par Terquem au géomètre grec [24]. Nous indiquons dans les notes ci-dessous les différents points de contact entre ces incises anonymes faites sur le manuscrit et les textes publiés de Terquem. Plus spécifiquement, certains détails significatifs disséminés ici ou là dans ces notes marginales confirment encore cette hypothèse et finissent à notre sens par emporter la conviction. Qu'il s'agisse de la mention incidente d'un pseudonyme (*Strebor*, une référence au mathématicien irlandais William Roberts, cf. *infra*), du recours à une métaphore inusitée (« l'océan sans bords »), ou encore de la référence à une question posée au concours général, tous ces indices, dont chemin faisant nous donnerons les clés, semblent en effet désigner Terquem, l'éditeur des *Nouvelles annales de mathématiques*. Mais ce faisceau de présomptions convergentes est encore renforcé par la comparaison des écritures. La correspondance de Terquem en atteste, comme par exemple les lettres adressées au mathématicien franco-belge Eugène Catalan (1814–1894) [25],

24 Cf. Terquem [1844a].

25 Plus d'une cinquantaine de lettres de Terquem à Eugène Catalan, qui s'échelonnent entre 1839 et 1862, sont en effet conservées dans le fonds d'archives Catalan-Jongmans à l'univesité de Liège (MS 1307 I, II et VIII). Elles sont en outre numérisées

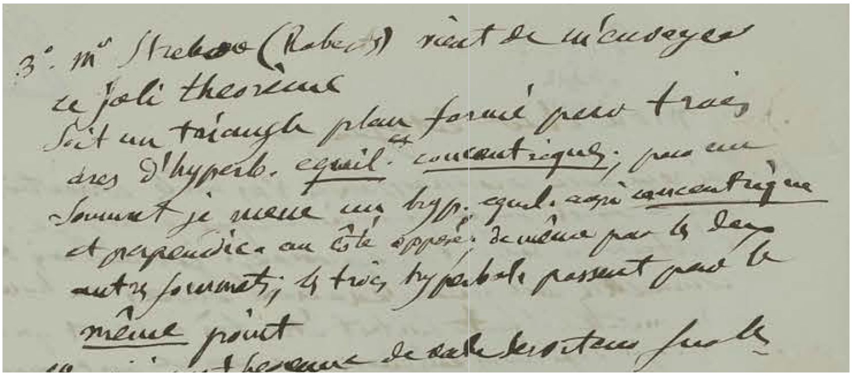

3°. Mr Strebor (Roberts) vient de m'envoyer
ce joli théorème
Soit un triangle plan formé par trois
arcs d'hyperb. equil. et concentriques; par un
sommet je mène une hyp. équil. aussi concentrique
et perpendic. au côté opposé; de même par les deux
autres sommets; les trois hyperboles passent par le
même point

Figure 2. Extrait d’une lettre de Terquem à Eugène Catalan, Fonds Catalan-Jongmans, Université de Liège, MS 1307 I, lettre nº 87.

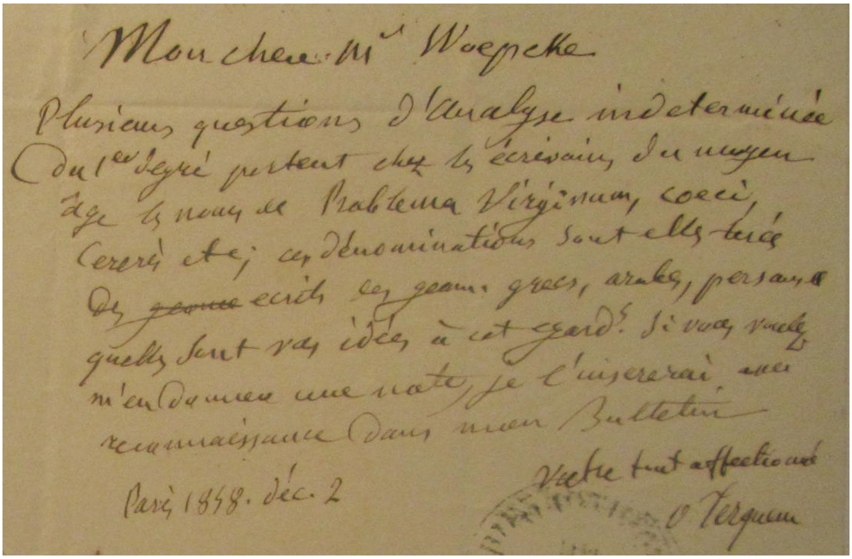
dont celle datée du 22 juillet 1848 dans laquelle l’anagramme « Strebor (Roberts) » apparaît sous la plume de Terquem lui-même (voir fig. 2) [26], ou encore cette courte lettre à Franz Woepcke, datée du 2 décembre 1848, et conservée dans le fonds d’archives de l’Académie des sciences (voir fig. 3). Nous choisissons de reproduire ces documents de préférence à d’autres parce qu’ils permettent d’étayer notre démonstration à plus d’un titre, notamment en raison de la proximité des dates. Dans ces lettres, comme dans les notes marginales du manuscrit présenté ici, on retrouve en effet les mêmes spécificités graphologiques (les s ouverts, les o dont la boucle donne sur le flanc droit, les points d’interrogation dont la courbure est tournée à l’envers, etc.) Dans un article célèbre [27], Carlo Ginzburg montrait comment l’attention portée aux détails apparemment infimes, par exemple à la forme des oreilles dans les tableaux dont on cherche à identifier formellement l’auteur, devait conduire à l’émergence d’un nouveau paradigme dans les sciences humaines, qu’il nomme le « paradigme indiciaire ». Par la gamme des méthodes qu’elle est susceptible de mettre en œuvre, l’histoire des mathématiques semble pour une part devoir en relever aussi.

---

et accessibles sur le site DONUM. Cette correspondance a été analysée et en grande partie retranscrite par Norbert Verdier, cf. [Verdier 2009a, p. 258–268]. Pour une présentation et un inventaire du fonds Catalan-Jongmans, voir Verdier [2015].

26 Il s’agit de la lettre référencée, MS 1307 I, 87, du fonds Catalan-Jongmans.

27 Cf. Ginzburg [1980].


Mon cher Mr Woepcke

Plusieurs questions d'analyse indéterminée
du 1er degré portent chez les écrivains du moyen
âge les noms de Problema Virginum, coeci,
Cereri etc; ces dénominations sont elles tirées
des ~~gramm~~ écrits des gramm. grecs, arabes, persans
quelles sont vos idées à cet égard? si vous voulez
m'en donner une note, je l'insérerai avec
reconnaissance dans mon Bulletin

votre tout affectionné

Paris 1858. déc. 2

O Terquem

Figure 3. Une lettre de Terquem à Franz Woepcke, Bibliothèque de l'Institut de France, Ms 2236.

Toujours est-il, et c'est un fait remarquable, que nombre de ces incises sont fortement critiques à l'égard du texte de Chasles. Par moment, ces notes signalent ce que Terquem perçoit comme des erreurs ou des imprécisions dans le texte de Chasles (telle que l'absence d'une date, une construction grammaticale inélégante, ou encore une phrase ambiguë). D'autres, en revanche, marquent un désaccord profond entre Terquem et Chasles sur les mérites respectifs des méthodes analytiques et synthétiques, sur le rapport aux Anciens, et sur les vertus épistémologiques de l'étude historique. Ce désaccord, dont nous dirons quelques mots ci-dessous, dépasse de loin ce manuscrit, et mériterait d'être étudié plus systématiquement. Dans cette transcription, nous reproduisons en italiques ces notes au crayon imputées à Terquem, que ce soit dans les marges, ou dans le corps du texte. Les quelques notes en marge au crayon qui sont de la main de Chasles, en revanche, sont indiquées en caractères droits. Enfin, nous indiquons par des barres verticales (|) la pagination originale du manuscrit. Dans tout ce qui suit, les notes de bas de page sont réservées pour nos commentaires éditoriaux, et n'appartiennent pas au manuscrit.

La génétique de ce manuscrit est assez complexe. La version que Terquem a eu entre les mains était sans doute moins chargée de paperolles et de feuilles insérées, car, à une exception près, on n'y trouve aucune remarque au crayon ; ce qui tendrait à laisser penser que la plupart des ratures et réécritures sont probablement postérieures à la réception par Chasles des commentaires de Terquem. Certaines réécritures répondent d'ailleurs directement à des critiques faites au crayon : par exemple, Chasles supprime dans un passage l'adjectif « homogène » suite à une moquerie de Terquem ! Ailleurs il insère un nom propre [28] (Mydorge) pour répondre à une question inscrite dans les marges. Ce manuscrit a donc été composé au moins en trois étapes : un premier jet, sur lequel Terquem aurait fait des remarques, puis une réécriture du texte (partiellement) en réaction auxdites remarques.

Pourquoi ce texte a t-il été envoyé à Terquem pour relecture ? Chasles n'a jamais publié dans les *Nouvelles annales* lorsque Terquem en était, avec Camille-Christophe Gerono (1799–1891), l'éditeur; c'est-à-dire entre 1842 et 1862, année de sa mort [29]. Chasles publiait régulièrement dans le *Journal de Liouville* [30] (du moins entre 1836 et 1855), et surtout dans les *Comptes-rendus de l'Académie des sciences*. Il semble peu probable que ce manuscrit soit le produit d'une collaboration éditoriale inachevée.

En revanche, Terquem était une figure incontournable du paysage mathématique dans lequel évoluait Chasles, à plusieurs titres [31]. Ses activités

28 Il s'agit du mathématicien français Claude Mydorge (1585–1647), correspondant de Mersenne et auteur en 1631 d'un ouvrage sur les coniques.

29 La première publication de Chasles pour ce journal n'est autre qu'une notice bibliographique sur Terquem, écrite juste après le décès de ce dernier; cf. Chasles [1863].

30 Des 30 articles que Chasles a publiés dans ce journal, 28 le furent entre 1836 et 1855. Outre ses publications en nom propre, Chasles servait occasionnellement à Liouville de relecteur, et les deux hommes furent très proches jusque dans les années 1870; cf. [Lützen 1990, p. 102; 256].

31 Nous renvoyons aux travaux de Norbert Verdier qui brosse un portrait saisissant de Terquem en « patron de presse » au centre du paysage éditorial français qu'il contribue à structurer avec Liouville, dont il fait partie de la garde rapprochée (cf. [Verdier 2009a, p. 230–233]), et l'imprimeur-éditeur Bachelier (cf. Verdier [2013]). Mais Terquem fut aussi un infatigable « passeur de science » prenant une part active dans la mise en circulation des idées mathématiques du XIXe siècle tant par son activité éditoriale aux *Nouvelles annales de mathématiques* qu'il anime de 1842 à sa mort, que par la position qu'il occupait au croisement de plusieurs réseaux de correspondances et d'échanges internationaux, laquelle lui permit d'exercer une forme de « veille » éditoriale, repérant ceux des articles publiés dans les principales revues mathématiques étrangères (surtout allemandes et anglaises) qui méritaient à son sens d'être connus en France. En prodiguant conseils et suggestions, Terquem orientait ainsi les textes vers la publication la plus appropriée, selon leur teneur et leur objet, le plus souvent en coordination avec Liouville. Sur ces arbitrages et la complémentarité éditoriale entre les *Nouvelles Annales* et le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, voir en particulier [Verdier 2009a, p. 286–290, 359–363], [Verdier 2009b, p. 115–116].

éditoriales, aussi bien aux *Nouvelles annales* qu'au *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie de Mathématiques*[32], et le grand nombre de traductions (que ce soit depuis l'anglais ou l'allemand) qu'il publia ou diligenta[33], en font un acteur central des mathématiques du milieu du XIXe siècle en France. À travers ces journaux, Terquem facilita la circulation de questions de géométrie[34], mais aussi de l'étude érudite des mathématiques anciennes, y compris non-occidentales. Terquem avait notamment introduit en France les premières analyses britanniques de l'algèbre indienne, à travers une traduction d'un texte de Charles

---

32 Ce *Bulletin*, démarré en 1855 et arrêté en 1862, était aussi publié comme supplément aux *Nouvelles annales*, avec une pagination séparée.

33 Terquem traduisit ou fit traduire des articles importants de mathématiciens de premier plan, tels que par exemple Dirichlet, Sylvester ou Kummer. Dans une lettre à Liouville que ce dernier décida de publier dans son journal après qu'elle eut fait sensation dans les cercles mathématiques parisiens, Dirichlet loue « l'élégante traduction que M. Terquem a bien voulu faire de mon *Mémoire sur la progression arithmétique* [i.e. Lejeune-Dirichlet [1839]] » (cf. Lejeune-Dirichlet [1830]). Dans certains cas, les articles publiés en français sous le nom de leur auteur étranger étaient des transpositions ou des adaptations plutôt que des traductions proprement dites. C'est le cas par exemple pour un article du mathématicien anglais James Joseph Sylvester que Terquem fit paraître dans les *Nouvelles annales* en 1852 sous le titre « Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes » (cf. Sylvester [1852]), et à propos duquel Chasles écrivit à Sylvester dans une lettre du 26 août 1852 : « J'ai vu hier M. Terquem ; il m'a parlé avec joie et enthousiasme du beau théorème que vous lui avez envoyé ; et sachant que j'allais vous écrire il m'a chargé de vous faire des compliments et de vous dire qu'il va insérer sans retard votre communication dans son Recueil » (cité par Karen Hunger Parshall, cf. [Parshall 1998, p. 59]). Dans d'autres cas enfin, Terquem faisait traduire par d'autres les articles qu'il jugeait dignes de l'être. Ainsi par exemple sollicite-t-il Eugène Édouard Dewulf (1831–1896), ancien élève de l'École polytechnique (promotion 1851) et capitaine du génie, pour traduire un article de Kummer, « Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes », dont il justifie ainsi la publication dans les *Nouvelles annales* par cette note liminaire du rédacteur : « Ce Mémoire est un modèle de géométrie analytique d'une grande fécondité théorique et physique et il est élémentaire. Je donne ce nom à tout ce qui est bien étagé, bien éclairé, à ce qui n'exige point des pas trop élevés. » (cf. [Kummer 1860, p. 362].) La publication de cette traduction dans les *Nouvelles annales* est d'ailleurs révélatrice du fait que la complémentarité éditoriale entre Terquem et Liouville n'était pas exempte d'accrocs, comme en témoigne la note liminaire de Terquem, caractéristique de la conception qu'il se faisait du travail d'édition : « M. Chasles traitera cette année en Sorbonne les propriétés des lignes dans l'espace ; ce qui attache un nouvel intérêt au Mémoire Kummer, que l'exiguïté de l'espace nous a forcé de morceler. Sa véritable place était dans le Journal de M. Liouville ; mais le célèbre géomètre, ainsi que M. Poncelet, repoussent les déterminants » ; cf. [Kummer 1862, p. 31–32] cité et commenté dans [Verdier 2009a, p. 362].

34 Terquem et Gerono tous deux contribuèrent largement aux *Nouvelles annales* ; et plusieurs de leurs publications sont des preuves de théorèmes énoncés ici et là par Chasles. Le nom de ce dernier apparaissait donc fréquemment dans ce journal entre 1842 et 1863, mais hors de la rubrique « auteur ».

Hutton. Chasles avait très tôt pris connaissance de cette contribution, qu'il mit à profit pour développer sa propre interprétation géométrique de ces textes sanskrits [35].

Au delà du cas des mathématiques indiennes, Chasles et Terquem correspondaient fréquemment sur des questions d'histoire des sciences [36]. L'un et l'autre contribuèrent régulièrement, chacun à leur manière, à encourager la traduction et la publication de manuscrits scientifiques issus de traditions non-occidentales. Dans leur échange autour du cours de Géométrie supérieure de 1847, ils appelèrent ainsi de leurs vœux l'édition par la Société Asiatique de ces Livres des *Coniques* d'Apollonius qui n'avaient subsisté jusqu'au XIXᵉ siècle que par l'intermédiaire de traductions arabes. Les différentes strates d'écriture de l'*Aperçu historique* dont la publication différée conduisit Chasles à enrichir le corps principal de son texte par un grand nombre de notes complémentaires, permettent de documenter précisément les circonstances qui ont vu naître cet intérêt partagé pour les sciences arabes. Dans l'une de ces notes qui par sa richesse et son étendue constitue en elle-même un petit mémoire, à savoir la Note XII intitulée « Sur la Géométrie des Indiens, des Arabes, des Latins et des Occidentaux au moyen âge », Chasles désavoue résolument le parti pris qui avait guidé la première rédaction de son ouvrage. Chasles y avait en effet d'abord très largement passé sous silence la contribution des Arabes à l'histoire des mathématiques, lesquels, évoqués furtivement à la charnière entre la première période consacrée aux Grecs et la seconde qui commence après la période supposée de stagnation qui se serait étendue de la fin de l'École d'Alexandrie au début de la Renaissance, n'auraient eu d'autre titre de gloire que de traduire et conserver les œuvres des Grecs [37].

La tonalité de la Note XII est entièrement différente et, comme Chasles le rappelle d'ailleurs lui-même dix ans plus tard dans la leçon d'ouverture

---

35 Cf. [Smadja 2016, p. 254–258].

36 Cf. [Chasles 1863, p. 249–250].

37 Cf. [Chasles 1837a, p. 50] : « Les arts et les sciences d'affaiblissaient déjà, lorsque l'Égypte devint la conquête des Arabes, et que l'embrasement de la fameuse bibliothèque des Ptolémes, dépôt précieux, depuis dix siècles, de toutes les productions du génie et de l'érudition, fur le signal de la barbarie et des ténèbres qui enveloppèrent l'esprit humain. Cependant, ces mêmes Arabes, après un ou deux siècles, reconnurent leur ignorance, et entreprirent eux-mêmes la restauration des sciences. Ce sont eux qui nous transmirent soit le texte, soit la traduction dans leur langue, des manuscrits qui avaient échappé à leur fureur fanatique. Mais c'est là, à peu près, la seule obligation que nous leur ayons. Car la Géométrie, à l'exception toutefois du calcul des triangles sphériques, resta stationnaire entre leurs mains, leurs travaux se bornant à admirer et à commenter les ouvrages grecs, comme s'ils marquaient le terme le plus élevé et le plus sublime de cette science. »

du cours de 1847–1848 (voir *infra*), ce revirement est imputable à la lecture des travaux de Louis-Amélie Sédillot (1808–1875). Succédant à son père Jean-Jacques Sédillot, le jeune orientaliste et historien des sciences avait en effet découvert à la bibliothèque royale un manuscrit arabe comprenant notamment un fragment d'algèbre dans lequel les équations du troisième degré étaient résolues géométriquement, ainsi qu'un *Traité des connues géométriques de Hassan ben Haithem*[38]. Grâce à Sédillot, Chasles prit donc dès 1837 la mesure de l'importance de ces sources pour l'histoire des mathématiques[39].

Dans les années suivantes, un autre jeune orientaliste et historien des mathématiques allait jouer un rôle important pour faire connaître les mathématiques arabes. Il s'agit de Franz Woepcke (1826–1864). Lorsque Chasles inaugure sa chaire en Sorbonne en décembre 1846, Woepcke est encore étudiant à l'université de Berlin. Il n'arrive à Paris qu'en mai 1850 pour étudier les manuscrits orientaux de la bibliothèque royale, et obtient aussitôt le soutien de Chasles qui rédige pour lui une lettre pour l'aider dans ses démarches[40]. À partir de cette date, Woepcke travaille à un rythme intense, édite de nombreux textes arabes, fait des traductions, publie lui-même dans le journal de Liouville, et collabore activement aux *Nouvelles annales*[41]. Commentant un article de Woepcke, paru dès mars 1850 dans le journal de Crelle, au sujet d'un manuscrit d'Al Khayyam[42], Terquem lui rend cet hommage explicite : « M. Woepeke possède les sciences de calcul, comprend l'idiome arabe, et écrit avec clarté notre

[38] Il s'agit du manuscrit aujourd'hui conservé sous la cote « Arabe 2458 » au Département des Manuscrits de la bibliothèque nationale de France. Louis-Amélie Sédillot le désignait en utilisant l'ancienne cote du fonds arabe de la Bibliothèque royale, à savoir « MS 1104 ». L'analyse précise des opuscules mathématiques qui y sont contenus fait l'objet des deux publications suivantes de Sédillot, cf. Sédillot [1834] et Sédillot [1837].

[39] Sur le travail de Louis-Amélie Sédillot et sa réception dans le contexte des controverses à l'Académie des sciences qui ont opposé Chasles à Libri, cf. [Charette 1995–2003, p. 116–158].

[40] La lettre de soutien de Chasles de novembre 1850 est citée dans [Dehérain 1911, p. 372] : « Ayant eu connaissance, par des communications successives, depuis deux mois, des travaux scientifiques auxquels se livre M. Woepcke avec autant d'ardeur que d'intelligence, et qui ont pour objet principalement l'étude des manuscrits arabes qui traitent des différentes parties des Mathématiques, j'estime que ces recherches peuvent faire espérer des résultats utiles à l'histoire et à la science elle-même et qui feront honneur à M. Woepcke. Plusieurs de ces résultats offrent déjà un véritable intérêt; et il serait à regretter vivement que des travaux qui ont exigé de longues éludes préparatoires et qui demandent de la continuité fussent interrompus. »

[41] Cf. [Verdier 2009a, p. 318].

[42] Cf. Woepcke [1850].

langue. La Société asiatique devrait engager et encourager ce jeune professeur à publier le texte d’Alkhâyâmi, avec une traduction française. C’est un nouveau service que cette illustre Société rendrait à l’érudition orientale [43] ». Quatre ans plus tard, dans le compte rendu qu’il publie de la traduction par Woepcke de l’algèbre d’Omar Al Khayyam, [44] il salue la contribution décisive de celui qu’il nomme l’« excellent géomètre arabiste [45] », avant d’y associer dans le même éloge la publication des tables astronomiques d’Ulugh Beg par Sédillot, [46] ce « savant professeur qui combat avec succès l’opinion si longtemps accréditée, que les Arabes n’avaient aucune espèce de spontanéité [47] », mais dont il déplore que les ressources à la fois scientifiques et linguistiques ne soient pas bien employées dans la France de l’époque, faute d’être reconnues à leur juste valeur [48]. S’agissant des sciences arabes, Chasles et Terquem partageaient donc les mêmes convictions et l’on retrouve l’écho de leur communauté de vues, du moins à cet égard, dans le dialogue qu’ils nouent au fil des annotations en marge du cours retranscrit dans les pages qui suivent.

On peut donc sans doute expliquer le fait que ce texte soit passé dans les mains de Terquem par les raisons suivantes : c’était un mathématicien dont Chasles reconnaissait l’érudition et le rôle majeur dans la promotion de l’étude historique de la géométrie. Ces intérêts communs, néanmoins, s’accompagnaient d’un désaccord de fond important. L’objectif principal de Chasles, dans cette leçon inaugurale, était d’appeler au retour à la « Méthode des Anciens » dans l’étude des coniques. À cet appel, Terquem opposait une fin de non-recevoir : Archimède ressuscité, affirmait Terquem, n’emploierait pas plus que nous lesdites anciennes méthodes, eût-il accès aux travaux de Descartes et de ses successeurs. Par sa génétique polyphonique, ce texte permet donc de saisir *in vivo* une tension épistémologique

43 Cf. [Terquem 1850, p. 390].

44 Cf. Woepcke [1851].

45 Cf. [Terquem 1854, p. 149] : « Les vrais philosophes, ceux qui s’intéressent aux sciences exactes, méritant seuls ce nom, doivent donc applaudir aux efforts de M. Woepcke pour nous faire connaître l’état des mathématiques chez les Arabes. »

46 Cf. Sédillot [1847].

47 Cf. [Terquem 1854, p. 156].

48 Cf. [Terquem 1854, p. 156–157] : « Pourquoi M. Sédillot, savant si laborieux, si consciencieux, versé dans les sciences astronomiques et dans les deux langues orientales qui en contiennent les plus précieux documents, pourquoi un homme d’un talent si rare ne peut-il employer tous ses moments à des occupations de prédilection ? Pourquoi l’astreindre à une besogne vulgaire que cent autres pourraient faire ? Nous nous évertuons sans cesse à tirer le meilleur parti possible des forces naturelles, de l’eau, du vent, de la vapeur, de l’électricité, etc. Quand saurons-nous faire bon emploi des forces intellectuelles ? »

méconnue, mais importante pour l'histoire de la géométrie au milieu du XIX^e siècle.

Les vertus de la géométrie

En quoi consiste l'argument de Chasles dans ce manuscrit ? Il s'agit en premier lieu de comparer la méthode des Grecs, et notamment d'Apollonius, à diverses méthodes plus tardives ; dont notamment les méthodes géométriques de Philippe de la Hire (1640–1718) ou de Poncelet. L'approche analytique, c'est-à-dire l'étude des propriétés algébriques de l'équation cartésienne de la conique générale, est rejetée d'emblée par Chasles. Tous les traités qui se fondent sur cette équation, explique-t-il, sont des applications de la méthode analytique à ces courbes, mais non pas de véritables traités géométriques [49].

Pour justifier le choix de la méthode des Anciens, Chasles invoque une constellation de valeurs épistémologiques qui mérite qu'on s'y attarde quelque peu. La généralité des méthodes est un véritable *leitmotiv* de ses écrits sur la géométrie et son histoire ; ce n'est donc pas une surprise que de voir cette généralité invoquée pour justifier ledit choix. La généralité d'une méthode, le plus souvent, signifie chez Chasles l'uniformité de son application à toutes les propriétés qu'on peut en tirer, mais aussi sa centralité au sein de la théorie étudiée.

Cependant, il est à première vue quelque peu étonnant de voir ici Chasles diagnostiquer cette généralité chez les Anciens. C'est justement le manque de généralité de la pratique géométrique d'Euclide ou de Pappus que Chasles décriait à de nombreuses reprises dans l'*Aperçu Historique* en 1837 [50]. La dépendance envers les spécificités concrètes d'un diagramme, notamment, faisait qu'un même théorème – selon Chasles – nécessitait chez les Grecs plusieurs énoncés (et plusieurs preuves), selon les configurations particulières dans lesquelles se trouvent par exemple trois points alignés. C'est ce genre de recours nécessaire à la considération de cas particuliers que Chasles cherchait à évacuer de la Géométrie au fil de ses cours. Ce qui change ici, c'est qu'Apollonius a identifié une propriété

---

49 Dans son *Traité des Sections coniques*, Chasles met un point d'honneur à démontrer que l'équation cartésienne de la conique, comme toutes les autres équations qu'on peut former de cette courbe (coordonnées homogènes, barycentriques etc.), découlent d'une même propriété fondamentale, à savoir le fait que le rapport anharmonique des quatre droites tirées de quatre points sur une conique vers un cinquième point de la conique ne dépend pas du choix du cinquième point ; cf. [Chasles 1865, p. 23–24].

50 Cf. [Chasles 1837a, p. 51–52 ; 94–95 ; 117–120].

(celle du *latus rectum*) qui, selon Chasles, sert d’équation de la conique générale. En d’autres termes, on a chez les Grecs une unique propriété qu’on peut déplier à l’infini, pour obtenir de manière uniforme (et aisée) toutes les propriétés de ces courbes.

On pourrait dire la même chose de l’équation cartésienne de la conique. Cependant, avec Apollonius, l’enchaînement des propositions reste purement géométrique, et donc évite ce que Chasles voit comme le principal défaut des méthodes analytiques, à savoir leur caractère artificiel, et donc, ultimement, leur manque de clarté. Il ne s’agit jamais pour Chasles de douter de la validité des résultats ou des preuves produits par l’analyse, mais uniquement de critiquer leur caractère épistémologique. « L’Analyse », écrit Chasles dans un passage particulièrement suggestif de l’*Aperçu Historique*, « n’éclaire pas toujours suffisamment l’esprit; elle laisse ignorer les vérités intermédiaires qui rattachent le point de départ avec la vérité trouvée, et qui doivent former, avec l’un et l’autre, un ensemble complet et une véritable théorie » [51]. En somme, l’Analyse procède par l’introduction d’un système de coordonnées artificiel dans le raisonnement géométrique, et ainsi fournit un outil puissant et efficace pour la dérivation de résultats, mais qui ne fournit nullement un savoir géométrique tel qu’on serait en droit de l’espérer. Un raisonnement géométrique, au contraire, n’a droit à nul auxiliaire de la sorte, et se doit de procéder par l’enchaînement continu des transformations et des corollaires d’une proposition initiale à la vérité recherchée. Le gain que l’on tire de cette contrainte est formulé par Chasles en des termes sans équivoque : c’est seulement ainsi qu’on obtiendra non seulement « le savoir qu’une chose est vraie », mais aussi le savoir du « pourquoi et comment elle l’est, et quelle place elle occupe dans l’ordre des vérités auquel elle appartient [52] ».

Le pari de Chasles, c’est donc de miser sur la possibilité d’une méthode qui conserve la puissance déductive et la généralité de l’analyse tout en conservant la clarté d’une approche purement géométrique ; et c’est dans cette perspective qu’il chercha, notamment dans son cours de Géométrie supérieure et dans les publications qu’il en tira, à développer un concept d’équation géométrique. Une telle équation, alors, sera une proposition géométrique dont les transformations (comme les transformations algébriques d’une équation cartésienne) fournissent comme mécaniquement toutes les propriétés de la courbe générale que l’on étudie. Il s’agit là d’un

51 Cf. [Chasles 1837a, p. 114].

52 *Ibid.*

projet de recherche qui occupera Chasles pendant plus d'une dizaines d'années à la suite de cette leçon, et la propriété du *latus rectum* identifiée par Apollonius en est, dans cette reconstruction, le premier exemple historique.

En sus de la valeur de la généralité, on trouve aussi dans ce texte une apologie de la lenteur en géométrie, inédite par ailleurs sous la plume de Chasles. Ce dernier défend en effet une marche qui risquerait de paraître lente face à l'Analyse, mais qui promet de récompenser ce pas modéré par la richesse du paysage théorique qu'elle permet d'observer. Ce n'est pas là vaine métaphore, mais une proposition que Terquem, dans ses notes manuscrites (ainsi que dans des textes polémiques publiés, tels que sa *Notice sur la découverte des logarithmes*[53]) prit suffisamment au sérieux pour la réfuter au nom de la « promptitude » nécessaire au progrès des sciences modernes. C'est là un débat qui trouvera ses échos lorsque Chasles, en 1860, publiera sa restitution des *Porismes* d'Euclide, ce texte perdu dont Pappus, dans le Livre VII de ses *Collections*, donnait un bref commentaire. Dans un échange polémique qui parut dans les pages du *Bulletin* édité par Terquem, ce dernier s'opposa à De Jonquières, à coup de recensions interposées. De Jonquières se présentait alors comme disciple de Chasles, même s'il n'eut guère l'occasion d'en suivre les cours professés en Sorbonne. Contre Terquem, et avec Chasles, De Jonquières défendait aussi les vertus d'une marche lente dans les recherches géométriques :

> L'analyse appliquée à la géométrie, surtout depuis qu'elle a simplifié et perfectionné quelques-uns de ses symboles, a pris des allures si vives, et en apparence si sûres ; elle a parfois si bien réussi à présenter à sa manière, qu'elle dit être la meilleure, les résultats que souvent la géométrie pure avait d'abord découverts ; elle fait, en un mot, des promesses si brillantes et si séduisantes, que bien des personnes seraient tentées de faire passer dans ses mains, disons de lui faire usurper, le sceptre de la géométrie. Cette tendance, qu'à bien des égards je regarde comme une illusion décevante, est peut-être, dans cette branche des mathématiques, un symptôme de cette fièvre d'activité, de ce besoin d'atteindre un but quelconque, qui est un des caractères dominants de notre époque.
> Mais il est bon pourtant, dans l'intérêt même de la science, d'y apporter quelque tempérament. Car, en admettant même que la palme de la célérité dans les investigations appartienne aux méthodes analytiques, la science ne saurait encore s'en accommoder d'une façon exclusive. Pour me servir d'une comparaison vulgaire, on acquiert assez promptement la connaissance générale d'une contrée

[53] Cf. [Terquem 1855, p. 1], où Terquem compare « l'introduction de l'algorithme algébrique » à celle des chemins de fer et des télégraphes, toutes trois permettant (à la pensée, aux hommes, et aux messages) « le parcours de grands espaces en peu d'instants ».

> en parcourant les grandes voies de communications ferrées qui la sillonnent ; mais pour bien en approfondir les détails, les productions, les ressources, il faut quitter la locomotive, et se résoudre à suivre à pied les anciennes routes et les chemins de traverse. Cela même donne des habitudes de patience, d'observation et de critique, qu'on risquerait de perdre, si l'on ne savait se résigner à ce mode primitif de pérégrination [54].

Bien que Chasles n'ait jamais revendiqué dans ses publications une telle apologie de la lenteur, la présence de ce terme dans cette leçon inédite semble suggérer une transmission orale (ou, du moins, par la voie d'échanges privés) de cet idéal épistémologique à De Jonquières. Par ailleurs, les termes choisis pour caractériser le différend qui oppose les deux camps établissent un lien direct entre l'industrialisation croissante (illustrée ici par les chemins de fer) et la modalité de l'enseignement et de la poursuite des savoirs mathématiques. Il est à noter que Chasles était un opposant public et systématique à la plupart des réformes de l'enseignement des sciences en France soutenues par les lobbys industrialistes au milieu du XIX^e siècle, de la réforme de la « Bifurcation » à celle du cours des Machines, en passant par la nomination de Urbain Le Verrier (1811–1877) à la direction de l'École polytechnique [55].

Quelques éléments de mise en perspective

Pour finir, il peut être utile d'appeler l'attention sur trois points du texte retranscrit ici qui permettront de mieux cerner la spécificité du travail de

---

54 Cf. [de Jonquières 1861, p. 8–9].

55 Voir par exemple la note finale du *Rapport* publié par Chasles en 1870, [Chasles 1870, p. 378–381]. (« Il nous préoccupe d'autant plus que l'état de nos études classiques de Mathématiques a éprouvé, depuis une vingtaine d'années, un affaiblissement que l'on ne peut se dissimuler et dont nous devons dire ici nettement les causes. Ces causes se trouvent dans la malheureuse pensée, si essentiellement contraire à l'esprit et au but des Mathématiques, qui a fait substituer aux études intellectuelles et théoriques sérieuses des études tronquées, formées de lambeaux de théories ayant pour objet suprême et immédiat *des applications pratiques* »). Le choix de Chasles de placer le début de déclin « une vingtaine d'années » avant la rédaction de ce rapport est vraisemblablement une allusion transparente à ces diverses réformes. La réforme dite de la bifurcation, menée en 1852 par Hippolyte Fortoul (alors ministre de l'Instruction publique) a conduit à la séparation des baccalauréats ès sciences et ès lettres. Cette réforme, alors très critiquée, était motivée par une « conception utilitaire de l'enseignement des sciences », mais aussi par le désir de « sciences idéologiquement saines » ; cf. [Hulin 1982, p. 219–220]. Le Verrier, quant à lui, était membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique dirigé par Fourtol, et il fit partie des soutiens majeurs de cette réforme. Sur les liens entre Le Verrier et les savants industrialistes, voir également [Belhoste 2003, p. 97–102].

Chasles sur les coniques en jetant un éclairage particulier tant sur son rapport aux sources que sur sa réception.

Dans la leçon d'ouverture du cours de 1847, comme, dix ans plus tôt, dans l'*Aperçu historique*, Chasles attribue à Desargues le mérite d'avoir le premier considéré les intersections du cône par des plans coupants arbitraires, alors qu'Apollonius n'aurait pris en compte que les sections coniques obtenues en prenant le plan coupant perpendiculaire au triangle par l'axe. Bien qu'il ait consacré à Apollonius une riche notice bibliographique, publiée dans les *Nouvelles annales* en 1844 et à laquelle Chasles se réfère expressément, Terquem ne trouve manifestement rien à y objecter. Aucune note marginale ne vient tempérer ces affirmations. C'est à Hieronymus Georg Zeuthen (1839–1920) qu'il revint d'y reconnaître explicitement une erreur d'appréciation de la part de Chasles [56]. Dans son ouvrage sur la théorie des sections coniques dans l'Antiquité (1886), il explique en effet que, contrairement à ce que Chasles prétendait, Apollonius considérait bel et bien le cône oblique et des plans coupants arbitraires, lesquels pouvaient donc ne pas être perpendiculaires au triangle par l'axe, de sorte que le diamètre lui non plus ne fût pas nécessairement perpendiculaire aux cordes parallèles [57]. Il est intéressant de noter à cet égard que Zeuthen renvoie de son côté au contexte français, en l'espèce au mathématicien (et normalien) Charles Housel (1817–1887) qui aurait été le premier à faire remarquer l'erreur de Chasles dans un article « Sur les Coniques d'Apollonius », paru en 1858 dans le Journal de Liouville [58]. Ayant pris part, dans le courant des années 1850, à la controverse sur la question des porismes d'Euclide, au cours de laquelle Chasles devait croiser le fer avec l'ingénieur polytechnicien Paul Émile Breton de Champ (1814–1885), mais en y tenant toujours un rôle de conciliation, Housel ne mentionne cependant nulle part nommément l'académicien qu'il reprenait de fait sur un point d'histoire des mathématiques [59]. Comme le note Zeuthen, et comme nous l'avons d'ailleurs vu plus haut, les recherches principales de Chasles visaient en effet un autre but que la simple exactitude philologique. Dans une note en marge du texte de Chasles, Terquem de son côté s'interroge simplement sur un

56 Zeuthen, au même titre que Hirst et Newton, a eu l'occasion de suivre les cours de géométrie de Chasles en Sorbonne. Il vécut à Paris plusieurs mois en 1863, avant d'être rappelé au Danemark par le devoir militaire alors que venait d'être déclarée la Guerre des Duchés ; cf. [Zeuthen 1866, p. 93].

57 Cf. [Zeuthen 1886, p. 64–65] ; voir aussi [Hogendijk 1991, p. 42].

58 Cf. [Housel 1858, p. 155].

59 Nous analysons en détail cette controverse dans Michel & Smadja [2021b].

nom propre qui lui échappe. Contrairement à ce qu'il croit se rappeler, il ne mentionne pas Mydorge dans sa notice sur Apollonius, mais dans l'un des deux articles sur les propriétés des diamètres conjugués et des foyers qui lui font suite, et d'ailleurs pour avoir introduit le terme d'« ombilic », non celui de « paramètre [60] ». C'est Chasles lui-même qui, comme nous l'avons dit plus haut, fait référence à Mydorge en réponse à la note de Terquem, en empruntant sans doute cette information à Frans van Schooten, dont les commentaires au second livre de la Géométrie de Descartes comprennent un abrégé des propriétés des sections coniques qui énumère les principaux résultats d'Apollonius dont Descartes fait usage. Il y est en effet précisé que « ce qui est nommé côté droit [*latus rectum*] par Apollonius est appelé paramètre par Mydorge [61] ». De Mydorge, Chasles ne retenait pour sa part dans l'*Aperçu historique* que le mérite d'avoir été « le premier en France qui écrivit un traité des sections coniques et qui entreprit de simplifier les démonstrations des Anciens », notamment en comprenant « dans une seule démonstration des propositions qui en demandaient trois à Apollonius [62] ».

Un autre point mérite d'être souligné. Dans les pages qui suivent, Chasles esquisse une histoire à long terme de la propriété des coniques *ad tres aut quatuor lineas*, dont il suggère, à demi-mots, qu'elle constitue un fil conducteur privilégié de la Géométrie des Anciens à celle des Modernes. Des diverses solutions anciennes imputées à Euclide, Apollonius et Pappus jusqu'aux célèbres lemmes de la section V du premier livre des *Principia mathematica* de Newton [63], Chasles retrace un même courant de pensée géométrique dans la continuité duquel il inscrit explicitement son propre travail mathématique. C'est le sens du retour à la méthode des Anciens dont, comme nous l'avons dit, il fait son mot d'ordre en ouverture de son cours de Géométrie supérieure. Ainsi écrit-t-il au §4 :

> On trouve dans les Collections mathématiques de Pappus (sur la fin du 4e siècle) divers théorèmes sur les sections coniques, dont une partie sont des lemmes relatifs au traité d'Apollonius. On y voit qu'Euclide n'avait pas démontré complètement une propriété des coniques que Pappus appelle ad tres aut quatuor lineas, mais qu'Apollonius y avait réussi. Voici quelle était cette question que Descartes a rendue célèbre en la prenant pour première application de sa Géométrie. Étant données 3 ou 4 droites de position dans un plan,

---

60 Cf. [Terquem 1844b, p. 416]

61 Cf. [Schooten 1651, p. 210].

62 Cf. [Chasles 1837a, p. 88–89].

63 Sur le traitement géométrique du problème de Pappus élaboré par Newton en opposition au traitement cartésien, cf. [Guicciardini 2009, II, 5. p. 89].

trouver le lieu d'un point tel, que le produit de ses distances à deux droites soit à sa distance à la troisième, ou au produit de ses distances à la troisième et à la quatrième, dans une raison donnée. Il s'agissait de montrer que ce lieu est une section conique. Cette proposition est d'autant plus belle, qu'elle exprime une propriété générale de six points quelconques d'une conique.

Descartes, venons-nous de dire, l'a prise pour premier exemple de la facilité de démonstration que procurait sa nouvelle méthode. Newton l'a démontrée aussi, mais par de simples considérations de Géométrie, dans son livre des Principes où il a eu à en faire usage.

En s'appuyant sur la Notice de Terquem, Chasles récapitule ce que l'on savait à l'époque des recherches des Grecs sur les coniques, et passe ainsi en revue les contributions respectives, documentées ou supposées, d'Aristée, Euclide, Apollonius et Pappus. S'agissant des *Coniques* d'Apollonius, il se référait à la traduction latine de Federico Commandino de 1566 [64] ainsi qu'à l'édition augmentée d'une nouvelle traduction d'Edmond Halley de 1710 [65]; et pour ce qui est de la *Collection Mathématique* de Pappus, on ne disposait alors que de la traduction commentée de Commandino de 1588 [66]. Mais plus spécifiquement, pour ce qui nous intéresse ici, au début du passage reproduit ci-dessus, Chasles fait implicitement allusion à la dédicace à Eudème qui ouvre le premier livre des *Coniques* d'Apollonius et dont Terquem avait donné une traduction française dans sa Notice.

Par occasion, [*affirmait en effet Apollonius s'agissant de son livre III,*] nous devons faire observer qu'Euclide n'a pas bien fait la synthèse du lieu aux trois et quatre lignes, il n'en a traité qu'une petite partie et cela sans beaucoup de succès. Cette synthèse ne peut même bien se faire sans les théorèmes que nous avons inventés [67].

Terquem poursuivait en commentant ainsi cette affirmation :

On voit qu'Apollonius avait une opinion très-haute mais très-juste de ses découvertes. Pappus taxe Apollonius d'arrogance, et trouve qu'il ne parle pas avec

64 Cf. Apollonius [1566].

65 Cf. Apollonius [1710].

66 Cf. Pappus [1588].

67 Cf. [Terquem 1844a, p. 480–481]. Ce passage de la dédicace à Eudème est cité intégralement par Pappus dans la section du livre VII de sa *Collection Mathématique*, consacrée aux *Coniques* d'Apollonius, cf. [Jones 1986, p. 118], dans la traduction d'Alexander Jones : « The locus on three and four lines that he says, in (his account of) the third (book), was not completed by Euclid, neither he nor anyone else would have been capable of; no, he could not have added the slightest thing to what was written by Euclid, using only the conics that had been proved up to Euclid's time, as he himself confesses when he says that it is impossible to complete it without what he was forced to write first. »

convenance d’Euclide, son prédécesseur , tandis que celui-ci s’est montré très-juste envers Aristée, qui avait écrit sur les coniques avant Euclide ; voici les paroles de Pappus, au commencement du septième livre des collections :

[*Terquem cite ici le passage du livre VII de la Collection mathématique de Pappus dans la traduction latine de Commandino (1588), cf. [Pappus 1588, p. 164–165], nous en donnons en note la traduction anglaise due à Alexander Jones*[68].]

Pappus fait cette sortie à cause de la manière dont Apollonius parle ci-dessus d’Euclide, à l’occasion du problème *des trois et quatre lignes*. Il est bien possible qu’Apollonius n’ait pas toujours rendu justice suffisante à ses devanciers et ait cherché à les primer et à démolir leurs travaux (*antevertere* et *destruere*) ; cela s’est vu, même chez d’éminents géomètres, en tout temps. Voici comment ils s’y prennent de nos jours. Vous avez découvert, je suppose, une propriété du triangle importante, inconnue ; ils circonscrivent votre triangle dans un polygone, s’évertuent à généraliser votre propriété, et la signalent ensuite comme un petit cas particulier ; et toutefois, sans le triangle, jamais ne leur serait venue l’idée du polygone. C’est ce qu’on peut appeler la passion *absorbante*, une des innombrables ramifications de la cupidité. Apollonius peut avoir eu cette faiblesse : le génie n’en exempte pas ; mais le passage incriminé par Pappus ne prouve rien, et même plutôt le contraire ; car Apollonius dit expressément que les quatre premiers livres sont consacrés à l’exposition des éléments, et on n’invente pas les éléments[69].

Toutes les pièces du dossier étaient donc déjà clairement sur la table. Terquem et Chasles avaient en effet identifié les données essentielles d’un épineux problème que plus tard les historiens des mathématiques allaient chercher à affronter. Hormis les quelques indications qui précèdent, à peu près rien n’a été conservé des recherches d’Euclide et d’Apollonius sur le lieu à trois ou quatre lignes. Zeuthen fut le premier à en proposer une reconstruction ambitieuse dans son livre de 1886, en cherchant à mettre en lumière quels avaient pu être les théorèmes du livre III des *Coniques* qui, selon Apollonius, ouvraient la voie à une solution complète du problème *ad tres aut quatuor lineas*[70]. Du fait de sa complexité, la reconstruction de

---

68 Cf. [Jones 1986, p. 118–120] : « But either Euclid, out of respect for Aristaeus as meritorious for the conics he had published already, did not anticipate him, or, because he did not desire to commit to writing the same matter as he (Aristaeus), – for he was the fairest of men, and kindly to everyone who was the slightest bit able to augment knowledge, as one should be, and he was not at all belligerent, and though exacting, not boastful, the way this man (Apollonius) was, – he wrote (only) as far as it was possible to demonstrate the locus by means of the other’s Conics, without saying that the demonstration was complete. »

69 Cf. [Terquem 1844a, p. 481–482].

70 Cf. [Zeuthen 1886, section VII et VIII, p. 126–184]. Zeuthen suggérait en particulier qu’Euclide pouvait avoir été empêché de trouver une solution générale par le

Zeuthen fit elle-même par la suite l'objet d'un travail d'élucidation et d'explicitation par plusieurs autres historiens des mathématiques, parmi lesquels signalons Thomas Heath (1861–1940) [71] d'abord, puis, plus près de nous, Wilbur Richard Knorr (1945–1997) [72]. Ce n'est pas le lieu ici d'en discuter. Indiquons simplement, en suivant une analyse de Knorr, que la reconstruction de Zeuthen fait jouer un rôle essentiel au premier porisme d'Euclide, ou plutôt à son extension au cas où les deux points fixes dont partent les rayons sont sur une conique [73]. Une intuition directrice guidait l'interprétation de Zeuthen. « Les Anciens [*prétendait-il en effet,*] ont eu une connaissance complète de la génération des sections coniques par le moyen des faisceaux projectifs, bien qu'ils n'en aient pas eu une compréhension globale sous le concept générique de projectivité [74] ». Il ne saurait pas davantage être ici question d'évaluer la légitimité de cette position, ni même simplement d'en exposer les difficultés. Nous nous contenterons de remarquer que cette voie n'est précisément pas celle que Chasles choisit d'emprunter, mais qu'au contraire, dans l'*Aperçu historique* déjà, il affirmait, contre Poncelet, l'absence chez les Anciens de considérations fondées sur les principes de la perspective. Tout son effort, comme nous l'avons suggéré plus haut, avait au contraire consisté, tout en reconnaissant la différence des méthodes, à élaborer à nouveaux frais des concepts et des notations qui puissent permettre d'identifier un même fil conducteur des solutions anciennes du problème *ad tres aut quatuor lineas* à la génération organique des coniques chez Newton et Maclaurin, puis de celle-ci à la Géométrie supérieure dont il se ferait le promoteur dans ses cours à la Sorbonne. Une étude resterait à mener qui montrerait dans quelle mesure la reconstruction de Zeuthen fut tributaire de la manière originale dont Chasles avait fait de ce problème *ad tres aut quatuor lineas* un point nodal de son historiographie, mais dans quelle mesure aussi elle s'en émancipait par une approche différente.

---

fait qu'il ne concevait pas les deux branches de l'hyperbole comme une seule et même courbe.

71 Cf. [Heath 1896, Chap. V].

72 Cf. [Knorr 1986, p. 120–127]. Sur l'interprétation du passage cité plus haut du livre VII de Pappus, voir aussi [Jones 1986, Vol. 2, Part C. §5, p. 587].

73 Cf. [Knorr 1986, p. 125].

74 Cf. [Zeuthen 1886, p. 163] : « *Die Alten die Erzeugung von Kegelschnitten durch projektivische Büschel, abgesehen von deren Zusammenfassung durch den Gattungsbegriff Projektivität, vollständing gekannt haben.* » Wilbur Knorr discute en détail ce parti pris de Zeuthen, et plus généralement la question de savoir si les porismes des Anciens ont pu constituer l'anticipation d'une forme de géométrie projective avant la lettre, cf. [Knorr 1986, p. 116–120].

Venons-en à présent à notre troisième et dernier point. La leçon d'ouverture de 1847 semble marquer une inflexion dans la réflexion de Chasles quant à l'appréciation de la valeur et de l'indépendance supposée des méthodes de la Géométrie descriptive dans le contexte de ce qu'il nomme Géométrie rationnelle. Dans l'*Aperçu historique*, il tenait en effet la balance égale entre deux genres de méthodes, selon qu'elles se fondent sur les propriétés descriptives ou métriques.

> §21. Les figures que considère la Géométrie, et leurs parties, ont entre elles deux sortes de relations : les unes qui concernent leurs formes et leurs situations, appelées relations *descriptives*, et les autres qui concernent leurs grandeurs, appelées relations *métriques*. … Ces deux sortes de propriétés descriptives et métriques des figures, suffisent individuellement pour la solution d'un grand nombre de questions. Mais il est toujours utile, et souvent indispensable, de les considérer, en même temps, les unes et les autres. La science de l'étendue doit les comprendre sans distinction, ou serait incomplète [75].

Desargues, Pascal et De La Hire étaient cités en exemple pour avoir su « procéd[*er*] des deux manières [76] ». À peine une courte note dans le *Mémoire de Géométrie*, faisant suite à l'*Aperçu*, esquissait-elle une première réserve, comme l'amorce d'un démenti encore à venir.

> En général, [*précisait en effet Chasles,*] les relations métriques des figures sont encore plus importantes et plus utiles à connaître que leurs relations purement descriptives, parce qu'elles sont susceptibles d'un plus grand nombre d'applications, et que d'ailleurs elles suffisent presque toujours pour arriver à la connaissance des relations descriptives. Aussi nous regardons comme le côté faible de l'école de Monge, en géométrie spéculative, de s'appuyer spécialement et par principe, sur les propriétés descriptives des figures. La méthode des transversales est plus féconde, et procure des résultats plus variés, plus généraux et plus complets. Un examen comparatif de quelques théorèmes obtenus par les deux méthodes justifierait constamment cette observation [77].

Mais en 1847, le ton est sensiblement différent, et l'on trouve désormais sous la plume de Chasles des formulations fortes qui trahissent une position nettement plus tranchée. À la fin du §12 de la leçon d'ouverture retranscrite ici, Chasles va même jusqu'à risquer un jugement de valeur.

---

75 Cf. [Chasles 1837a, p. 211–212].

76 *Ibid.*

77 Ce passage se trouve dans la deuxième partie consacrée au principe d'homographie, au §XVII « Théorie des figures homologiques », art. 305 cf. [Chasles 1837b, p. 775].

> Voilà pourquoi sans doute les méthodes fondées sur les procédés de la Géométrie descriptive, que nous venons d'indiquer, n'ont point été mises en usage ; puisque sans être différentes au fond de celles de la Géométrie ordinaire, elles sont plus compliquées et moins directes, et ne conduiraient du reste qu'à des choses déjà parfaitement connues. [*et très restreintes de leur nature*]
>
> Mais lors même que la Géométrie descriptive posséderait quelque méthode régulière à laquelle on pût recourir parfois, on conçoit qu'elle ne serait que d'un usage très rare et très restreint. Car on n'y considérerait que des intersections de lignes, et partant, qu'un genre de propriétés des figures, celles qu'on a appelées propriétés descriptives. On y négligerait les relations de grandeur, ou propriétés métriques, infiniment plus nombreuses et utiles que les premières, et sans lesquelles on peut dire qu'il n'y a point à songer à aucun édifice mathématique. [*ce serait simplement un amusement puéril et impuissant*]

Le point de vue que Chasles exprime sans fard dans ces lignes fournit un éclairage rétrospectif sur la réception de l'œuvre du géomètre français en Allemagne. L'*Apercu historique*, traduit en allemand dès 1839 par Ludwig Adolph Sohncke (1807–1853) [78] avait suscité l'enthousiasme du jeune Hermann Hankel (1839–1873), lequel affirmait en 1875 qu'« aucun ouvrage n'a[*vait*] davantage contribué, même en Allemagne, aux progrès de la Géométrie [79] ». Mais il ajoutait aussitôt que les ouvrages ultérieurs de Chasles, à partir du *Traité de Géométrie supérieure*, « n'eurent pas, chez nous du moins [*c'est-à-dire en Allemagne*,] le même succès que l'*Aperçu* [80] ». D'une manière caractéristique, dans l'introduction historique de ses *Éléments de géométrie projective, traités de manière synthétique*, Hankel construit une opposition entre Chasles et le mathématicien allemand Karl von Staudt (1798–1867).

> À l'inverse de tous ses prédécesseurs et notamment de Chasles, qui a fondé son *Traité de Géométrie supérieure* sur le double rapport, qui a fait un usage constant des *relations métriques* et, par suite, du *calcul*, von Staudt s'est proposé, dans son Opuscule [*Geometrie der Lage* (1847)], de « faire de la Géométrie de situation une science indépendante et pouvant se passer des mesures », (Préface). Il a voulu fonder la nouvelle Géométrie sans aucune considération de relations métriques et exclusivement sur des relations de rapports de situation ; il a voulu démontrer par la seule Géométrie de situation tous les théorèmes qui ne se rapportent pas immédiatement aux propriétés des grandeurs. (...)
>
> Au point de vue des sciences exactes, un Français vaut certainement un Allemand, mais il prend ses aides là où il les trouve ; il ne sacrifie pas l'intuition à la manie de systématiser, ni la facilité d'une démonstration à la pureté de ta

---

78 Cf. Chasles [1839].

79 Cf. [Hankel 1875, p. 28], [Hankel 1885, p. 236–237].

80 Cf. [Hankel 1875, p. 29], [Hankel 1885, p. 237].

méthode. Dans la paisible ville d'Erlangen, von Staudt, tout absorbé dans sa pensée, a pu développer pour lui-même son savant système qu'il a eu quelquefois l'occasion d'exposer à un ou deux auditeurs assis devant son bureau ; mais, à Paris, dans le milieu vivifiant de nombreux auditeurs et de savants, il eût été impossible de donner naissance à ce système [81].

Hankel ici se montre perspicace. La liberté de ton du cours de 1847 témoigne de la résistance que Chasles aurait opposée à toute velléité d'émancipation d'une géométrie fondée sur les seules propriétés descriptives, et par suite, en eût-il eu connaissance, à l'idéal de pureté poursuivi loin de Paris. En dépit de son rôle de premier plan dans la réception de Chasles en Allemagne, Hankel se démarque toutefois nettement du géomètre français pour deux raisons au moins, lesquelles sont d'ailleurs étroitement liées. Contrairement à Chasles, il considère que la différence qui existe entre l'ancienne et la nouvelle Géométrie est bien plus grande que celle qui oppose cette nouvelle Géométrie à la Géométrie dite analytique, et c'est ce qui l'amène à proposer de définir comme projective la géométrie nouvelle.

La Géométrie ancienne construit avec la règle et le compas, la Géométrie nouvelle ne se sert que de la règle. La Géométrie ancienne se borne a la recherche des propriétés des figures géométriques qui subsistent dans les figures congruentes ou semblables, la nouvelle Géométrie s'occupe des propriétés que la projection n'altère pas. C'est pourquoi la nouvelle Géométrie pourrait, à juste titre, être nommée *Géométrie de situation*, comme on l'a fait souvent, ou encore *Géométrie projective* [82].

Tout au long de sa carrière mathématique, Chasles en revanche semble avoir maintenu la cohérence d'un projet, formé dès l'*Aperçu historique*, qui donnait un sens neuf au retour à la méthode des Anciens.

Conclusion

De l'exposition dogmatique des méthodes de la géométrie supérieure que Chasles a présentée dans son Traité de 1852, l'histoire est notoirement absente. Pourtant, le texte que nous publions ci-dessous, ainsi que les notes de cours prises par Liouville les mois suivants, montrent que des réflexions d'inspiration historiographique irriguaient constamment l'enseignement et la genèse de ces méthodes. Ainsi, dans un passage typique,

---

81 Cf. [Hankel 1875, p. 29–30], [Hankel 1885, p. 237–238].

82 Cf. [Hankel 1875, p. 32], [Hankel 1885, p. 239].

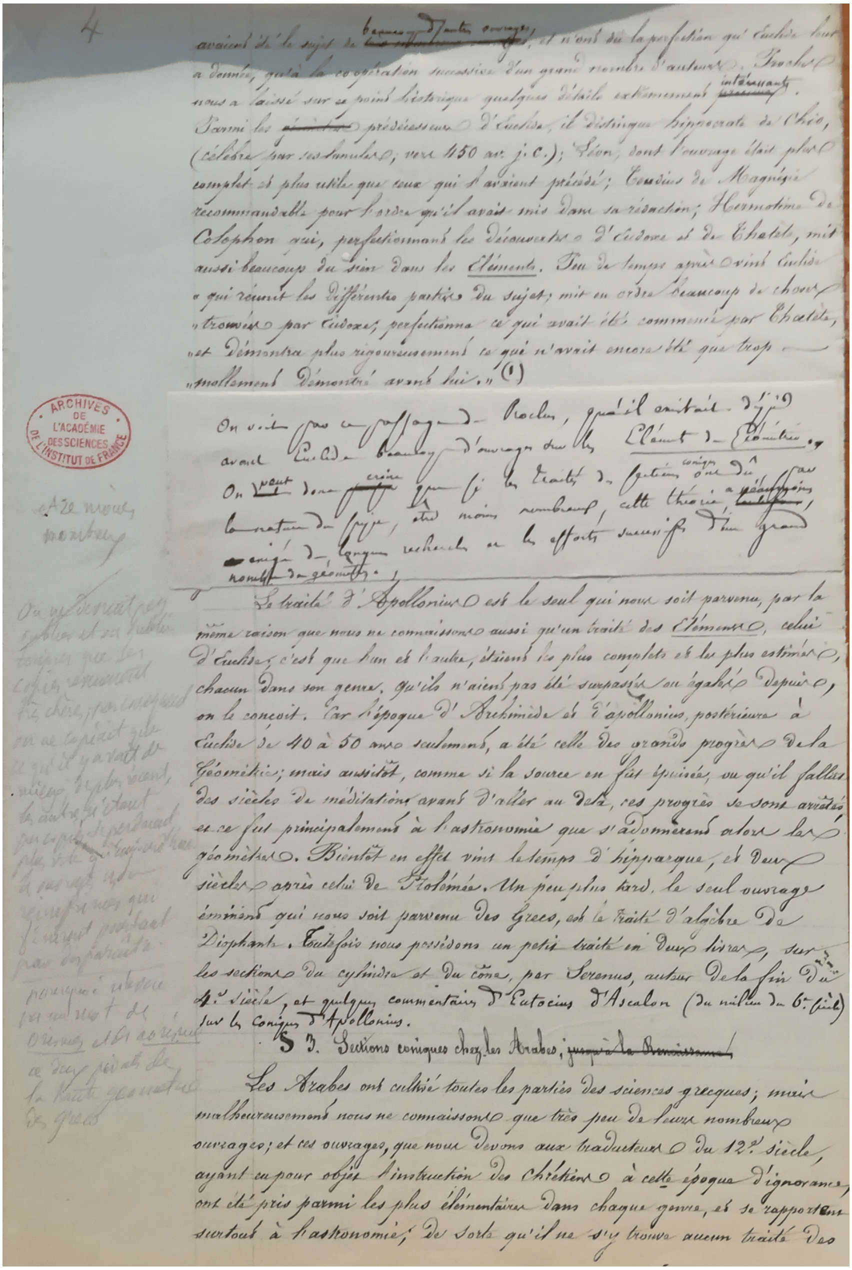
après avoir noté une propriété concernant l'intersection des droites joignant les points homologues de deux divisions homographiques, Liouville recopie la remarque suivante de Chasles : « C'est (mais autrement énoncé) un porisme d'Euclide cité dans Pappus [83] ». Les méthodes et les théories de la géométrie moderne de Chasles ont donc toujours été conçues dans un double rapport avec celles des anciens : il s'agissait de regrouper les propositions de ces derniers et de les réorganiser autour de nouveaux principes rationnels et méthodiques, mais également d'indiquer comment déployer lesdits principes pour marquer les points de contact avec ce passé reconstruit. C'est là le sens des analyses poussées que propose Chasles du rôle du *latus rectum* ou encore de celui du rapport harmonique dans les textes d'Euclide, de Pappus, ou d'Apollonius.

Pour autant, ce constat soulève à son tour toute une série de nouvelles questions. La géométrie de Chasles, telle qu'on peut la lire dans les articles et ouvrages parus à partir des années 1850, est écrite dans un langage et avec des notations largement absents des documents susmentionnés. En particulier, le principe des signes, dont le rôle crucial pour l'écriture de propositions générales sera souligné avec force par Chasles dès l'introduction du *Traité* en 1852, semble avoir émergé après l'année 1848 [84]. Ainsi, si le contenu théorique de la géométrie supérieure était déjà, en partie du moins, mis en place dans le cours de 1847–1848, il reste à comprendre comment la poursuite de cette double entreprise historiographique et mathématique a participé à l'élaboration de cette nouvelle technique d'écriture. C'est donc une dynamique de recherche originale, dans laquelle ces deux activités épistémiques se nourrissent mutuellement et constamment, que ce texte nous invite à penser. Gageons, par ailleurs, que cette dynamique, par l'intérêt qu'elle pourra susciter parmi les historiens tout comme les praticiens des mathématiques, mérite qu'on y porte attention au-delà du seul cas de Chasles.

---

83 Bibliothèque de l'Institut, Cod Ms 3618, 21v. Cette proposition, sous une forme plus générale, sera réinterprétée comme un « mode de description d'une ligne droite par points » par Chasles dans le *Traité de Géométrie supérieure*; cf. [Chasles 1852, p. 72].

84 Le principe des signes est une notation consistant en l'écriture de segments orientés : deux points a et b étant sur une même ligne droite, Chasles dénote ab le segment dont l'*origine* est le point a. Il pose ainsi la convention d'écriture $ab = -ba$, et cette notation lui permet d'exprimer au travers d'une seule et même équation une proposition qui porte sur toutes les configurations (c'est-à-dire, les positions relatives) des points qui y figurent; cf. [Chasles 1852, p. iii-xi; 1–6]. Une notation analogue est introduite pour le signe d'angles issus d'une même origine.


4

avaient été le sujet de ~~...~~ beaucoup d'autres ouvrages, et n'ont dû la perfection qu'Euclide leur a donnée, qu'à la coopération successive d'un grand nombre d'auteurs. Proclus nous a laissé sur ce point historique quelques détails extrêmement ~~précieux~~ intéressants.
Parmi les ~~...~~ prédécesseurs d'Euclide, il distingue Hippocrate de Chio, (célèbre par ses lunules; vers 450 av. J.C.); Léon, dont l'ouvrage était plus complet et plus utile que ceux qui l'avaient précédé; Teudius de Magnésie recommandable pour l'ordre qu'il avait mis dans sa rédaction; Hermotime de Colophon qui, perfectionnant les découvertes d'Eudoxe et de Théétète, mit aussi beaucoup du sien dans les Éléments. Peu de temps après vint Euclide « qui réunit les différentes parties du sujet; mit en ordre beaucoup de choses trouvées par Eudoxe, perfectionna ce qui avait été commencé par Théétète, et démontra plus rigoureusement ce qui n'avait encore été que trop mollement démontré avant lui. » (1)

On voit par ce passage de Proclus, qu'il écrivait d'après ... avant Euclide beaucoup d'ouvrages sur les Éléments de Géométrie. On peut donc croire que si les traités des sections coniques ont dû par la nature du sujet, être moins nombreux, cette théorie a cependant exigé de longues recherches et les efforts successifs d'un grand nombre de géomètres.

ARCHIVES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE

Le traité d'Apollonius est le seul qui nous soit parvenu, par la même raison que nous ne connaissons aussi qu'un traité des Éléments, celui d'Euclide; c'est que l'un et l'autre, étaient les plus complets et les plus estimés, chacun dans son genre, qu'ils n'aient pas été surpassés ou égalés depuis, on le conçoit. Car l'époque d'Archimède et d'Apollonius, postérieure à Euclide de 40 à 50 ans seulement, a été celle des grands progrès de la Géométrie; mais aussitôt, comme si la source en fût épuisée, ou qu'il fallût des siècles de méditations avant d'aller au delà, ces progrès se sont arrêtés et ce fut principalement à l'astronomie que s'adonnèrent alors les géomètres. Bientôt en effet vint le temps d'Hipparque, et deux siècles après celui de Ptolémée. Un peu plus tard, le seul ouvrage éminent qui nous soit parvenu des Grecs, est le traité d'algèbre de Diophante. Toutefois nous possédons un petit traité en deux livres, sur les sections du cylindre et du cône, par Serenus, auteur de la fin du 4e siècle, et quelques commentaires d'Eutocius d'Ascalon (du milieu du 6e siècle) sur les Coniques d'Apollonius.

§ 3. Sections coniques chez les Arabes, ~~jusqu'à la Renaissance~~

Les Arabes ont cultivé toutes les parties des sciences grecques; mais malheureusement nous ne connaissons que très peu de leurs nombreux ouvrages; et ces ouvrages, que nous devons aux traducteurs du 12e siècle, ayant eu pour objet l'instruction des Chrétiens à cette époque d'ignorance, ont été pris parmi les plus élémentaires dans chaque genre, et se rapportent surtout à l'astronomie; de sorte qu'il ne s'y trouve aucun traité des

Figure 4. Une page du manuscrit de la leçon d'ouverture du cours de Géométrie supérieure (1847–1848), Fonds Michel Chasles, archives de l'Académie des sciences.

TEXTE

1 Considérations sur la théorie des sections coniques,
et particulièrement sur la méthode par laquelle il convient de traiter
cette théorie dans un cours de Géométrie.

(Discours prononcé à la faculté des Sciences de Paris le **9**bre 1847,
à l'ouverture de l'année scolaire 1847–1848.)

La théorie des sections coniques paraît être aujourd'hui un sujet si rebattu, que nous croyons devoir entrer ici dans quelques considérations pour en justifier l'introduction, dans un cours de Géométrie supérieure. Ensuite nous jetterons un coup d'œil sur l'histoire de cette partie des mathématiques, en cherchant particulièrement à apprécier la nature des différentes méthodes que l'on a suivies à diverses époques, dans l'étude de ces courbes, et nous dirons quelle est celle qui nous paraît devoir être adoptée dans un enseignement didactique des méthodes géométriques.

§1. Nécessité d'introduire la théorie des sections coniques dans un cours de géométrie supérieure.

La connaissance des sections coniques est indispensable dans toutes les parties des mathématiques ; elle est notamment ~~une introduction naturelle et très utile~~ une préparation nécessaire à l'étude des courbes d'un ordre supérieur, et à la théorie des surfaces du second ordre, ~~et la connaissance des propriétés de ces courbes et de ces surfaces est souvent une condition des progrès et des découvertes que le géomètre pourra faire dans le sujet qu'il traite~~. Les lois de Kepler, et l'usage que Newton a fait des propriétés des coniques dans son livre des Principes, attestent que l'étude de ces courbes était indispensable.

La belle loi mathématique ~~des phénomènes~~ de la double réfraction, découverte par Huygens, et les travaux de Fresnel sur les phénomènes de la polarisation, sont des exemples de l'intervention fréquente des surfaces du second ordre dans les questions de philosophie naturelle, car ces phénomènes correspondent souvent à de simples propriétés soit de l'ellipsoïde [85], soit des cônes du second ordre, et sont, en quelque sorte, une représentation ~~expérimentale~~ naturelle de ces propriétés.

---

[85] Chasles avait, entre 1837 et 1840, travaillé sur l'attraction des ellipsoïdes, voir Michel [2020a].

La solution élégante du problème de la rotation d'un corps, donnée par M. Poinsot, est encore un exemple non moins frappant de la nécessité de se livrer à une étude approfondie des propriétés des surfaces du second ordre, et par conséquent des propriétés des sections coniques qui en sont les préliminaires ~~naturels et indispensables nécessaires~~.

Dans ce moment surtout où la théorie des lignes de courbure et des lignes géodésiques des surfaces, a fixé l'attention de plusieurs géomètres qui y ont appliqué des méthodes diverses, on reconnaît combien les coniques sont utiles, soit pour donner l'idée des propriétés analogues sur les surfaces, soit pour aider dans la démonstration de celles-ci.

~~L'étude des sections coniques est donc du plus haut intérêt, à raison des applications propres des propriétés de ces courbes, dans toutes les parties des mathématiques, et particulièrement comme formant l'un des éléments indispensables dans l'étude des surfaces du second ordre.~~

2 Aussi, dans tous les temps, ces courbes ont été cultivées | avec soin et ont pris rang immédiatement après les Éléments de Géométrie.

Chez les Grecs elles donnaient lieu, avec certaines questions développées dans des traités spéciaux, à un ensemble de théories et de méthodes qui devaient guider le géomètre dans ses recherches, et qui constituaient une Géométrie supérieure que les Grecs distinguaient des Éléments, ainsi que nous l'avons dit avec quelques détails l'an dernier [86]. Chez les Modernes la science a changé de forme (†) ~~l'analyse le calcul~~ † Voir le V° ~~algébrique a remplacé les méthodes géométriques ; mais l'étude des sections coniques a subsisté ; toutefois, en appliquant à cette théorie les méthodes analytiques, on ne l'a plus considérée que seulement on y appliqué les méthodes analytiques~~ [87].

~~Ferons-nous double emploi en réintroduisant l'étude des sections coniques dans un cours de pure Géométrie. Évidemment non. Car~~ ce ne sont pas précisément les énoncés de telles ou telles propriétés des coniques qui sont utiles et nécessaires en Géométrie, pour l'application théorique qu'on doit en faire ; ~~dans l'étude soit des courbes d'un ordre supérieur, soit des surfaces du second ordre~~ ; c'est surtout le mode de démonstration de ces propositions, ce sont les rapports et l'enchaînement qui les lient entre elles, qu'il importe de connaître. C'est une théorie géométrique, c'est-à-dire une coordination méthodique et complète de toutes les parties du sujet, qu'il faut posséder, pour passer de cette théorie

86 Voir [Chasles 1847, p. 3–5] ; ou encore [Chasles 1852, p. xxxv-lxxxiii].

87 Cette affirmation se retrouve dans le *Rapport sur les progrès de la Géométrie* écrit par Chasles en 1870, sur une requête du Ministère de l'Instruction Publique, voir [Chasles 1870, p. 266].

à celle des surfaces du second ordre, et faire des applications de l'une à l'autre dans toutes les parties des mathématiques.

D'une autre part, la théorie des sections coniques, telle qu'on l'enseigne en Géométrie analytique, est beaucoup trop restreinte. Une partie des propriétés qui au 17e siècle entraient dans les ouvrages de Pascal, de Desargues, de de Witt, de Delahire, et que plusieurs géomètres anglais, R. Simson notamment, reproduisaient dans le siècle dernier, ne s'y trouvent plus. C'est en vain même qu'on y chercherait les propriétés que Newton a réunies dans son premier livre des Principes, et sur lesquelles il a fondé les développements synthétiques de ~~sa Mécanique des corps célestes~~ sa loi de la gravitation ~~universelle~~, qui sont le sujet de ce magnifique ouvrage.

Ces propriétés omises dans les traités modernes sont précisément les plus générales et les plus fécondes, celles dont on a à faire le plus d'applications dans les recherches géométriques. Mais elles sont délaissées aujourd'hui dans l'enseignement classique, et la théorie des coniques est réduite à ses plus simples termes, à peu près aux seules propriétés anciennes des foyers et des diamètres conjugués, parce que cette théorie n'étant plus cultivée pour elle-même et sous le point de vue géométrique, on ne l'a plus guère considérée, que comme un simple exercice de calcul en Géométrie analytique. †† Voir le V°

~~Loin donc que nous fassions double emploi, en traitant ici des sections coniques, qu'on n'a que très superficiellement vues dans les cours de Mathématiques spéciales, ce que nous ferons sera nouveau, tant par la méthode, que par la nature des matières qui doivent entrer dans la théorie des sections coniques et que nous aurons soin d'y comprendre.~~

Avant de présenter nos vues sur la méthode qu'il nous paraît convenable de suivre pour former un système complet et régulier des sections coniques, nous allons jeter un coup d'œil sur l'histoire de la science, et chercher à distinguer les méthodes différentes que les Géomètres ont suivies à diverses époques.|

Verso 2 ~~† Sous un point de vue particulier, et on l'a renfermée dans des limites infiniment trop restreintes qui sont restées les mêmes, quand tant d'autres parties de l'enseignement ont pris chaque jour de l'accroissement. Nous ne ferons donc pas double emploi en comprenant l'étude des sections coniques dans ce cours de Géométrie, car, d'une part,~~

† l'analyse a remplacé les méthodes géométriques ; mais l'étude des sections coniques a subsisté, seulement on y a appliqué les méthodes analytiques. Cependant, ce ne sera pas faire double emploi que de reprendre ici cette théorie : loin de là, une nouvelle étude des sections coniques est absolument indispensable ; plusieurs considérations vont le montrer avec évidence. D'une part,

† † Il est donc nécessaire de reprendre cette théorie, et de la traiter dans toute l’étendue qu’elle comporte et par les méthodes fécondes dont la Géométrie est aujourd’hui en possession. Nous pouvons ajouter que cette étude est d’autant plus urgente, que dans d’autres pays, en Allemagne et en Angleterre surtout, cette théorie si importante a pris une grande extension depuis plusieurs années, où elle est cultivée avec le soin qu’elle mérite et par les méthodes ~~géométriques~~ qui lui sont propres. Les mémoires qui ~~paraissent fréquemment~~ s’y rapportent dans les Recueils scientifiques, plusieurs ouvrages spéciaux destinés à l’enseignement, les programmes des cours dans les Universités, et les questions proposées dans les examens publics pour l’obtention de grades, attestent cette direction d’études dans laquelle nous ne devons pas rester plus longtemps arriérés. |

cela n’est pas exact

3 **§2. Notice historique sur la théorie des coniques chez les Grecs.**

La théorie des coniques a une haute antiquité. L’histoire rapporte qu’elle a pris naissance, avec ~~la méthode analytique~~ les lieux géométriques, dans l’école de Platon. Peut-être ce philosophe en avait-il puisé la connaissance chez les prêtres égyptiens. Quoiqu’il en soit [*sic*], il est certain que ces courbes ont été cultivées de son temps chez les Grecs, car on connaît l’application que Menechme, son disciple, en a faite, de deux manières, à la solution du problème de la duplication du cube, d’abord en se servant de deux paraboles qui ont le même sommet et leurs axes rectangulaires; puis d’une parabole et d’une hyperbole (1).

[bas de page] (1) De locis solidis secunda divinatio geometrica...

Aristée l’ancien, à peu près contemporain de Platon, avait écrit un traité des sections coniques en cinq livres, et un traité des lieux solides aussi en cinq livres, lequel se rapportait encore aux sections coniques, qu’on appelait lieux solides, par opposition aux lieux plans. Ceux-ci étaient la ligne droite et le cercle, qu’on pouvait décrire sur le plan; les lieux solides étaient les sections coniques, parce que ces courbes se formaient dans le cône, corps à trois dimensions ou solide (2).

Aucun des deux ouvrages d’Aristée ne nous est parvenu; mais le second, sur les lieux solides, a été rétabli par Viviani dans le style pur de la Géométrie ancienne, d’après quelques indications laissées par Pappus dans le 7e livre de ses collections mathématiques (3).

Euclide après Aristée (vers 285 ans av. J.C.) avait écrit un traité des coniques en quatre livres, dont Pappus parle avec éloges. Ce traité ne nous est pas parvenu. Un ouvrage de même auteur sur les lieux à la surface, dont on ignore le sujet, a bien pu se rapporter encore aux coniques, mais considérées sur les sphéroïdes et conoïdes, ou surfaces du 2e ordre de révolution.

Archimède (287–212 av. J.C.) a cultivé les sections coniques ; on le voit par son traité de la quadrature de la parabole, et son livre des sphéroïdes et des conoïdes. ~~hyperboliques et paraboliques, c'est-à-dire, des surfaces du second ordre de révolution.~~

Bientôt après parut le grand traité des sections coniques d'Apollonius (v. 247 av. J.-C.) en huit livres. Cet ouvrage nous est parvenu presque complet car nous possédons les sept premiers livres ; le huitième a été rétabli par Halley d'après quelques lemmes de Pappus. |

3bis (1) Ces deux solutions sont rapportées par Eutocius, autour du milieu du 6è siècle, dans ses Commentaires sur le Traité d'Archimède De la sphère et du cylindre. V. l'édition des œuvres d'Archimède, de Torelli, p. 141.

(2) Pappus parle de ces 2 ouvrages d'Aristée dans quelques passages la préface du 7è livre de ses Collections mathématiques. Il cite aussi encore les Lieux solides d'Aristée comme ayant servi à résoudre le problème des deux moyennes proportionnelles, à la suite de la proposition de son 3e lieu

(3) De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristei senioris geometræ. Florentiæ 1701, f°

Quoique nous n'ayons eu à citer avant Apollonius que les traités des coniques d'Euclide et d'Aristée, il est à croire pourtant qu'il en a existé beaucoup d'autres, car cette vaste et difficile théorie n'a point été l'ouvrage de trois hommes seulement et d'un siècle ; son élaboration a demandé de plus longs efforts. C'est ainsi que les Éléments de la Géométrie,
4 dont nous ne connaissons que le livre d'Euclide,| avaient été le sujet de beaucoup d'autres ouvrages, et n'ont dû la perfection qu'Euclide leur a donnée, qu'à la coopération successive d'un grand nombre d'auteurs. Proclus nous a laissé sur ce point historique quelques détails extrêmement intéressants. Parmi les prédécesseurs d'Euclide, il distingue Hippocrate de Chio, (célèbre par ses lunules, vers 450 av. J.-C.) ; Léon, dont l'ouvrage était plus complet et plus utile que ceux qui l'avaient précédé ; Teudius [*sic*] de Magnésie recommandable pour l'ordre qu'il avait mis dans sa rédaction ; Hermotime de Colophon qui, perfectionnant les découvertes d'Eudoxe et de Thœtète, mit aussi beaucoup du sien dans les Éléments. Peu de temps après vint Euclide, « qui réunit les différentes parties du sujet ; mit en ordre beaucoup de choses trouvées par Eudoxe, perfectionna ce qui avait été commencé par Thœtète, et démontra plus rigoureusement ce qui n'avait encore été que trop mollement démontré avant lui. » (1) [88]

C'est ainsi que, bien qu'il ne nous soit parvenu qu'un unique [Traité] des Éléments de Géom, celui d'Euclide, ces Éléments néanmoins ont été le sujet de beaucoup d'autres ouvrages

On voit par ce passage de Proclus, qu'il existait déjà avant Euclide beaucoup d'ouvrages sur les Éléments de Géométrie. On ~~doit donc penser~~ peut

[88] La référence n'est pas donnée dans le manuscrit, mais ce passage reprend littéralement un paragraphe de l'*Aperçu Historique* ([Chasles 1837a, p. 9]), où apparaît

donc croire que si les Traités des sections coniquesont dû, par la nature du sujet, être moins nombreux, cette théorie a néanmoins exigé de longues recherches et les efforts successifs d'un grand nombre de géomètres.

ces 2e moins nombreux

Le traité d'Apollonius est le seul qui nous soit parvenu, par la même raison que nous ne connaissons aussi qu'un traité des Éléments, celui d'Euclide ; c'est que l'un et l'autre, étaient les plus complets et les plus estimés, chacun dans son genre. Qu'ils n'aient pas été surpassés ou égalés depuis, on le conçoit. Car l'époque d'Archimède et d'Apollonius, postérieure à Euclide de 40 à 50 ans seulement, a été celle des grands progrès de la Géométrie ; mais aussitôt, comme si la source en fût épuisée, ou qu'il fallût des siècles de méditations avant d'aller au-delà, ces progrès se sont arrêtés, et ce fut principalement à l'astronomie que s'adonnèrent alors les géomètres. Bientôt en effet vint le temps d'Hipparque, et deux siècles après celui de Ptolémée. Un peu plus tard, le seul ouvrage éminent qui nous soit parvenu des Grecs, est le traité d'algèbre de Diophante. Toutefois nous possédons un petit traité en deux livres, surles sections du cylindre et du cône, par Serenus, auteur de la fin du 4è siècle, et quelques commentaires d'Eutocius d'Ascalon (du milieu du 6è siècle) sur les Coniques d'Apollonius. |

On ne devrait pas oublier et on oublie toujours que les copies revenaient très chères; par conséquent on ne copiait que ce qu'il y avait de mieux, de plus récent, les autres n'étant pas copiés se perdaient plus vite qu'aujourd'hui, les ouvrages non réimprimés qui finissent pourtant par disparaître.

Pourquoi [illisible] pas un mot des Porismes et des [illisible] ces deux pivots de la haute géométrie des grecs.

Feuille volante

Mais il ne faut pas passer sous silence quelques propositions sur les coniques qui se remarquent dans les Collections mathématiques de Pappus. On y distingue surtout la construction de la conique qui passe par cinq points donnés ; la détermination des 2 axes principaux d'une ellipse dont 2 diamètres conjugués sont connus ; et l'importante propriété de la directrice dans les 3 sections coniques, savoir, que le rapport des distances de chaque point de la courbe, au foyer et à cette droite est constant.

Cette belle propriété des coniques mérite d'autant plus d'être remarquée dans le livre de Pappus, qu'elle ne se trouve point ni dans l'ouvrage d'Apollonius, ni dans aucun ouvrage des Modernes, jusqu'à ces derniers temps.

§3. Sections coniques chez les Arabes ~~jusqu'à la Renaissance~~.

Les Arabes ont cultivé toutes les parties des sciences grecques ; mais malheureusement nous ne connaissons que très peu de leurs nombreux ouvrages ; et ces ouvrages, que nous devons aux traducteurs du 12è siècle, ayant eu pour objet l'instruction des chrétiens à cette époque d'ignorance, ont été pris parmi les plus élémentaires dans chaque genre, et se rapportent surtout à l'astronomie ; de sorte qu'il ne s'y trouve aucun

la même citation avec la référence en note : « Proclus, livre 2, chap. IV, de son Commentaire sur le 1er livre d'Euclide ». Chasles se réfère à la traduction latine de Francesco Barozzi, faite à Padoue en 1560 ; voir Boulland & Claudin [1881], entrées 1574 et 1575.

5 traité des | sections coniques. Mais nous savons que les Arabes avaient cultivé cette partie de la Géométrie ; c'est même à eux que nous devons la connaissance des $5^{è}$, $6^{è}$ et $7^{è}$ livres d'Apollonius, qui ne nous sont point parvenus comme les 4 premiers livres, dans le texte original, mais seulement en langue arabe (*).

pourquoi la société asiatique n'imprime-t-elle pas ce texte arabe ?

[au dos] (*) M. Terquem a donné sur ce point de l'histoire des sciences des détails fort intéressants dans le t.3 des Nouvelles annales de Mathématiques, avec une analyse de l'ouvrage d'Apollonius (p. 350–352 et 474–488). Il serait bien à désirer que les Comités historiques près du Ministère de l'instruction publique ou la société asiatique fassent imprimer le texte arabe des 5^{e} 6^{e} et 7^{e} Livres de cet ouvrage capital, dont les Mss. sont rares et peu accessibles, et sont exposés à disparaître avec le temps..

Les Arabes ont cultivé aussi les sections coniques comme lieux solides, et les ont appliquées à la résolution des équations du 3^{e} et du 4^{e} degré. Mais nous ne connaissons que depuis quelques années seulement un de leurs ouvrages sur ce sujet ; c'est à M. Sédillot que ~~l'histoire des sciences mathématiques est~~ nous sommes redevables de cet opuscule intéressant qui suffit pour montrer combien il serait utile d'explorer les Mss. Arabes, trop négligés depuis six siècles.

C'est en vain que l'on chercherait chez les Romains les moindres traces de la théorie des sections coniques ; elle était inutile dans l'arpentage et la mesure des terres, qui ont été le seul sujet de leurs ouvrages mathématiques.

Les chrétiens, n'ayant pas puisé chez les Arabes, au $12^{è}$ siècle, la connaissance des sections coniques, n'ont pas cultivé cette théorie dans tout le cours du moyen âge. Mais à la Renaissance où ils ont été mis en possession d'une partie des textes grecs d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius, l'étude de ces courbes n'a point tardé à se répandre et à donner lieu à divers ouvrages originaux.

Avant de pousser plus loin cet aperçu, il faut revenir sur nos pas, pour rechercher quelle a été la méthode que les Grecs ont suivie dans cette importante théorie. |

6 **§4. Méthode des Grecs.**

Rapportons d'abord quelques définitions. ~~Aujourd'hui on nous appelons indifféremment cône ou surface conique toute surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un point fixe, quelle que soit la courbe qui sert de directrice, ou qui forme la base du cône~~. Les Grecs appelaient surface conique la surface décrite par une droite qui tourne autour d'un point fixe, appelé sommet, en s'appuyant sur la circonférence d'un cercle. Ce cercle était la base de la surface conique ; et le ~~volume~~ solide renfermé entre cette surface et la base s'appelait cône. Les deux expressions cône et surface conique n'avaient donc pas une signification identique, et elles ne s'entendaient, l'une et l'autre, que du cône à base nécessairement circulaire. On appelait axe du cône ou de la surface conique, la droite menée du sommet au centre du cercle formant la base. Le cône était droit ou scalène (oblique), selon que cet axe était perpendiculaire ou oblique au plan du cercle. Ces définitions sont celles d'Apollonius.

Eutocius rapporte, d’après Geminus (2), que c’est d’abord dans le cône droit que les Grecs ont formé leurs sections coniques, et qu’ils prenaient le plan coupant perpendiculaire à une arête ; de sorte qu’il fallait trois cônes d’ouvertures différentes, pour former les trois courbes, ellipse, hyperbole, et parabole. Il ajoute qu’Apollonius fut le premier qui considéra les coniques dans le cône scalène, et que ses contemporains, dans l’admiration de la beauté de ses démonstrations, lui donnèrent le surnom de grand géomètre (3). Mais il ne faut pas entendre par là qu’avant Apollonius on ignorait que les trois courbes ellipse, hyperbole, et parabole formées dans le cône droit, pussent l’être aussi dans le cône scalène. Il est à croire qu’Eutocius a voulu dire seulement, qu’avant Apollonius on ne démontrait les propriétés de
7 ces courbes que | dans le cône droit ; car Archimède savait parfaitement que les mêmes courbes se formaient aussi dans le cône oblique, comme on le voit notamment dans cette proposition de son Livre des Conoïdes et des Sphéroïdes : « Si dans un plan mené par l’un des diamètres principaux d’une ellipse, perpendiculairement au plan de la courbe, on prend un point, ce point pourra être regardé comme le sommet d’un cône qui passera par l’ellipse », c’est-à-dire que la surface conique, qui aura ce point pour sommet et l’ellipse pour base pourra être coupée suivant un cercle. Archimède démontre ce théorème et détermine la position du cercle (*). Il savait donc que l’ellipse se plaçait sur un cône oblique, de même que sur le cône droit.

[au dos] (2) Géomètre et astronome célèbre qui vivait un siècle environ avant l’ère chrétienne.

[au dos] (3) Commentaire d’Eutocius dans la dédicace du 1er Livre des coniques d’Apollonius adressée à Eudème.

[au dos] (*) M. Peyrard énonce ainsi le théorème, dans sa traduction des œuvres d’Archimède « Etant données une ellipse et une oblique élevée de son centre dans le plan qui passe par un de ses diamètres et qui est perpendiculaire au plan de l’ellipse, il est possible de trouver un cône qui ait pour sommet l’extrémité de cette oblique et dans la surface duquel se trouve l’ellipse donnée. » (Des conoïdes et des sphéroïdes, proposition IX.)[89] Dans la proposition suivante, Archimède prouve que le cylindre qui a pour base l’ellipse, et dont les arêtes sont parallèles à l’oblique pour axe l’oblique, peut être coupé par un cercle.

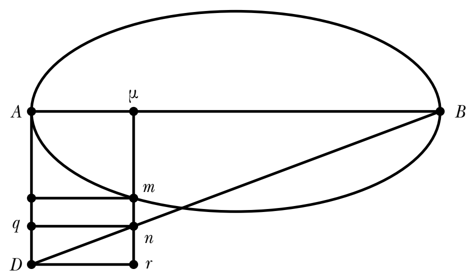
Apollonius, en formant les coniques dans le cône oblique, ne donnait pas au plan coupant une direction tout-à-fait arbitraire ; il le supposait toujours perpendiculaire au plan de symétrie du cône (plan mené par l’axe perpendiculaire au plan du cercle qui forme la base du cône). Ce plan de symétrie coupait le cône suivant deux arêtes qui formaient avec le diamètre du cercle un triangle appelé le triangle par l’axe. On disait donc que le plan coupant était perpendiculaire au triangle par l’axe. Les points où ce plan rencontrait les deux côtés du triangle étaient les deux sommets de la conique ; et la droite qui joignait ces points en était un des diamètres (principaux). On appelait ce diamètre latus transversum. Une autre droite élevée perpendiculairement à l’extrémité de ce diamètre, et qu’on appelait latus rectum, suffisait avec le diamètre pour déterminer la courbe. Apollonius démontre une proposition fondée sur la considération de ce latus rectum et du latus transversum ; et c’est sur cette propriété unique que repose à peu près tout son grand traité, dans lequel les nombreuses propriétés des coniques ne sont qu’un développement rationnel et méthodique des conséquences de cette proposition fondamentale. |

89 Chasles se réfère à la traduction de François Peyrard, [Peyrard 1807, p. 143].

8 Voici cette propriété, que l'on a perdue de vue dans les traités modernes.

~~Soit *AB* le diamètre de la courbe ; que par le sommet A on élève une perpendiculaire au triangle par l'axe laquelle sera dans le plan de la courbe ; et qu'on lui donne une certaine longueur *AD* déterminée dans le cône comme nous le disons (que l'on joigne son extrémité *D* au second sommet *B* par la droite *DB* ; puis, que de chaque point de la conique on abaisse normalement sur le diamètre une ordonnée ; le carré de cette ordonnée sera égale au rectangle construit sur l'abscisse comprise entre son pied et le 1^er^ sommet de la courbe, et sur l'ordonnée terminée à la droite *DB*. De sorte que chaque ordonnée d'une conique est moyenne proportionnelle entre l'ordonnée et l'abscisse de chaque point d'une droite fixe.~~

Soit *AB* l'axe transverse; *AD* le latus rectum ou côté droit qu'Apollonius détermine dans le cône, comme nous le disons; le carré de chaque ordonnée de la conique est égal au rectangle construit sur l'abscisse et l'ordonnée de la droite BD.



$$\overline{m\mu}^2 = A\mu \cdot n\mu.$$

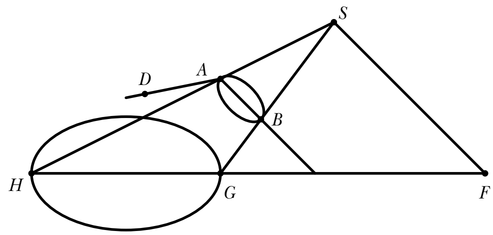
Cette relation, ~~extrêmement simple puisqu'elle s'exprime par une équation à deux termes~~ extrêmement simple et bien propre à montrer le rôle que joue le latus rectum, n'est pas précisément le théorème d'Apollonius, seulement elle apparaît explicitement dans le cours de sa démonstration. Apollonius se proposant de comparer le carré de l'ordonnée de la courbe à une fonction de l'abscisse, comme on fait aujourd'hui en Géométrie analytique, a remplacé dans la relation que nous venons d'énoncer le rectangle par la somme ou la différence des deux rectangles $A\mu \cdot AD$, et $A\mu \cdot qD$, c'est-à-dire le rectangle $A\mu nq$, par la somme ou la différence des deux $A\mu rD$ et $qnrD$. C'est la somme dans l'hyperbole, et la différence dans l'ellipse; et le rectangle subsidiaire est nul dans la parabole où le point B se trouve à l'infini sur la droite DB parallèle à AB. Ainsi c'est ce petit rectangle qui diversifie les trois courbes en s'ajoutant avec le signe $+$ dans l'hyperbole, et le signe dans l'ellipse, au rectangle construit sur le latus rectum et l'abscisse, et devenant nul dans la parabole.

On a supposé que c'était à raison de ces propriétés, que les trois courbes avaient reçu les noms d'ellipse, hyperbole, et parabole qui signifient défaut, excès, et égalité, et par conséquent expriment bien ce qui se rapporte au petit rectangle. Toutefois il faut remarquer qu'Eutocius explique l'origine des trois noms par d'autres considérations relatives à la génération des coniques dans le cône droit. Mais il est inutile d'entrer à ce sujet dans plus de détails. [*Il faut, au contraire, lire Eutocius et montrer que le cône droit donnait des définitions précises des 3 courbes indépendantes de leurs propriétés et que la définition d'Apollonius est fondée sur une propriété de ces courbes.*] |

9 La ligne AD appelée latus rectum, a pris chez les Modernes le nom de paramètre qui paraît avoir été employé pour la première fois par Mydorge,[90] dans son traité des sections coniques. L'expression de ~~ce paramètre~~ cette ligne en fonction des deux diamètres principaux de la courbe, savoir l'axe transverse $2a$ et ~~l'axe perpendiculaire~~ le diamètre conjugué $2b$, est $\frac{2b^2}{a}$ ou $\frac{(2b)^2}{2a}$; c'est à dire que le paramètre est une 3^e proportionnelle à l'axe transverse et au second diamètre. On dit encore que ~~l'axe transverse~~ le paramètre est double de l'ordonnée du foyer. Mais ces expressions modernes sont prises dans la courbe, tandis qu'Apollonius déterminait le latus rectum dans le cône ; ~~et cette détermination~~ sa construction fait partie essentielle de la propriété des coniques qu'il démontre ; la voici : « Que par le sommet du cône on mène une droite parallèle à l'axe transverse de la section, laquelle rencontre la base du triangle par l'axe en un point F, le carré de la distance de ce point au sommet du cône est au rectangle des deux segments faits par ce point sur la base du triangle par l'axe, comme l'axe transverse est au latus rectum. »

C'est à dire que l'on a

$$\frac{\overline{FS}^2}{FG \cdot FH} = \frac{AB}{AD}$$



90 En marge d'une première rédaction de ce paragraphe, biffée par la suite et omise ici, apparaît la mention suivante, écrite de la même main que les autres commentaires, en italique, que nous croyons pouvoir attribuer à Terquem : « *ce mot est dû à quelqu'un que j'ai nommé dans mon article sur Apollonius, son nom ne me revient pas* ». Cette même question est d'ailleurs posée à nouveau en peu plus loin dans une autre note marginale, au début du §7. De toute évidence, Chasles complète son texte ici de manière à y répondre.

Jacques Bernoulli a trouvé une construction fort simple du latus rectum, ~~qui exprime une belle propriété des sections coniques [du cône], et mérite d'être citée ici~~ d'après laquelle ce paramètre ne dépend que de la distance de l'axe transverse de la conique au sommet du cône, et nullement de la direction de cet axe, (en supposant toujours que le plan coupant est perpendiculaire au ~~plan~~ triangle par l'axe). Le latus rectum est égal au diamètre de la section circulaire du cône, faite par un plan mené à la même distance du sommet du cône, que le plan de la section conique que l'on considère. ( ) |

[au verso] ( ) V. Jacobi Bernoulli Opera ; t.V. p. 418, et Acta eruditorum Lips., ann. 1689. p. 586

Les plus belles propriétés des sections coniques, celles des diamètres conjugués, des foyers et des asymptotes, sont démontrées dans l'ouvrage d'Apollonius. On y trouve aussi les propositions sur la division harmonique qui rentrent essentiellement dans les doctrines de la géométrie moderne. La proposition 37 du livre 3 revient à ceci : si autour d'un point fixe on fait tourner une transversale qui rencontre une conique en deux points, et qu'on prenne le conjugué harmonique du point fixe, par rapport à ces deux là, le lieu de ce point sera la corde de contact des deux tangentes issues du point fixe. On a lieu de s'étonner que cette belle proposition, qui forme la base de la féconde théorie des polaires, et joue un rôle principal dans le dans la Géométrie moderne et dont l'importance est appréciée dans le grand traité des sections coniques de De la Hire de 1685, et dans celui de R. Simson, ait disparu depuis un demi-siècle dans nos traités analytiques.

Le germe de la théorie des développées * se reconnaît dans le 5e livre d'Apollonius parmi de nombreuses questions relatives aux lignes de longueurs maxima ou minima, c'est à dire aux normales menées d'un point à une section conique. Pour déterminer les pieds des normales, Apollonius se sert ~~comme de nos jours~~ d'une hyperbole équilatère dont il donne les éléments. C'est l'hyperbole même qu'indiquent nos méthodes géométriques modernes.

** Ce germe appartient à Kepler*

On peut croire qu'Apollonius excellait dans ces questions de maxima. On en rencontre une dans son Traité de la section déterminée #, qui fut ~~présentée~~ une des premières auxquelles Fermat appliqua sa belle méthode de maximis et minimis, qui lui valut, de la part de grands géomètres †, le titre de premier inventeur du calcul infinitésimal. La détermination des lieux de station des planètes sur leurs épicycles était une question de même nature et qui présentait des difficultés. Ce fut Apollonius qui la résolut. Ptolémée nous a conservé sa solution *, qui reste un des plus beaux specimen

 # ces deux qui ne font pas bien[91]

† d'un seul grand géomètre Lagrange, qui a tort en ce point

** où ?*[92]

91 Terquem fait ici une remarque stylistique, pointant du doigt la répétition du mot 'qui' dans la phrase de Chasles.

92 La méticulosité bibliographique de l'auteur de ces annotations en marge, qui à plusieurs reprises demande des références à des éditions et à des pages précises,

de l’art des géomètres grecs dans ces questions difficiles qui exigent de nos jours le calcul de l’infini.

Nous n’avons point à parler ici des autres ouvrages d’Apollonius dont nous citerons simplement les titres : De la section de raison ; De la section de l’espace ; De la section déterminée ; Des attouchements (contacts des cercles) ; Des inclinaisons ; Des lieux plans. Tous ces ouvrages appartenaient, comme celui des coniques, à cette partie des mathématiques grecques qui faisait suite aux Éléments et que Pappus appelle l’analyse géométrique. Nous reviendrons dans un autre moment sur ces
11 ouvrages qui peuvent être regardés comme | l’origine de notre Géométrie supérieure et qui devront entrer, en substance du moins, dans ce cours.

On trouve dans les Collections mathématiques de Pappus (sur la fin du IVe siècle) divers théorèmes sur les sections coniques, dont une partie sont des lemmes relatifs au traité d’Apollonius. On y voit qu’Euclide n’avait pas démontré complètement une propriété des coniques que Pappus appelle ad tres aut quatuor lineas, mais qu’Apollonius y avait réussi. Voici quelle était cette question que Descartes a rendue célèbre en la prenant pour première application de sa ~~nouvelle~~ Géométrie. Étant données 3 ou 4 droites de position dans un plan, trouver le lieu d’un point tel, que le produit de ses distances à deux droites soit à sa distance à la troisième, ou au produit de ses distances à la troisième et à la quatrième, dans une raison donnée *. Il s’agissait de montrer que ce lieu est une section conique. Cette proposition est d’autant plus belle, qu’elle exprime une propriété générale de six points quelconques d’une conique.

** c’est là où brille la méthode Cartésien[ne] au lieu de 4 droites on peut prendre 4000 plans sans rendre le problème plus difficile*

Descartes, venons-nous de dire, l’a prise pour premier exemple de la facilité de démonstration que procurait sa nouvelle méthode. Newton l’a démontrée aussi, mais par de simples considérations de Géométrie, dans son livre des Principes où il a eu à en faire usage.

On remarque encore dans Pappus ces deux questions : « Déterminer le centre et les diamètres de la conique qui passe par cinq points ». – « Etant donnés deux diamètres conjugués d’une ellipse, trouver en grandeur et en direction ses axes principaux ». *

** il y a dans Pappus un problème de Géométrie descriptive, résolu presque comme aujourd’hui. c’est à citer*

---

constitue un autre indice tendant à suggérer qu’il s’agit là de remarques écrites par Terquem. Ce dernier, en effet, faisait preuve d’une exigence similaire dans sa correspondance scientifique, à l’instar d’une lettre écrite le 7 août 1854 à Eugène Catalan (1814–1894) dans laquelle on lit : « donnez moi le titre, la page et l’année ; j’en ferai mention. je n’aime pas les citations à la française. Lagrange dit, Voltaire dit, où ? » (Fonds Catalan, Archives de l’université de Liège, MS 1307 C, II, 112). Nous remercions l’un des rapporteurs pour cette utile référence.

Ces questions prouvent qu'encore aujourd'hui les ouvrages grecs pourraient offrir de l'intérêt, et prendre place à côté de nos traités analytiques des sections coniques.

[intérêt] historique et nullement scientifique

§5. Des sections coniques chez les Modernes, depuis la renaissance

---

Nous avons dit qu'Apollonius ne s'était servi du cône, que pour donner naissance aux coniques et en démontrer la propriété du latus rectum ; que cette propriété lui servait comme de définition ou équation de la courbe, de laquelle, par de simples considérations de géométrie plane, il déduisait toutes les propriétés que contient son grand ouvrage. Cette marche uniforme ~~et homogène~~ était conforme à l'esprit de système des Grecs, et à leurs idées sur la pureté des méthodes qui devait s'observer dans les doctrines de la Géométrie.

une marche homogène !

Les Modernes, dès leur début dans la culture des sections coniques, se sont écartés de cette marche lente, pour en suivre une qui pouvait leur paraître plus aisée et plus rapide. Ils ont conçu l'idée d'appliquer directement aux sections coniques les propriétés du cercle qui forme la base du cône.

Le premier ouvrage où cette innovation se manifeste date de 1522. Il est
12 de Verner, savant géomètre de cette époque, et a pour titre | Libellus super viginti duobus elementis conicis, Norimbergæ in 4°. À la suite se trouvent divers autres traités qu'il est inutile de citer ici. Dans l'opuscule des coniques, l'auteur se sert du cercle qui forme la base du cône, pour démontrer plusieurs propriétés de ces courbes.

Un demi-siècle après, Maurolycus, reprochant aux Anciens de n'avoir pas mis à profit la considération du cône et attribuant à ce défaut la prolixité de leurs démonstrations, suivit la même marche que Verner, dans le traité des sections coniques que renferment ses trois livres De lineis horariis. (1)

Mais ce furent Desargues et Pascal qui, 60 ans plus tard, pénétrèrent le plus avant dans ces nouveaux procédés de démonstration, et les appliquèrent avec toute la généralité et tous les avantages dont ils étaient susceptibles.

Verner et Maurolycus avaient marché timidement, en continuant de se servir, comme les Anciens, du triangle par l'axe, et n'avaient guère été au delà de quelques propriétés connues d'Apollonius. Desargues considéra pour la première fois, le plan coupant dans une position quelconque et appliqua à la conique qui en provenait les propriétés du cercle. Une de ces propriétés que l'on appelle théorème de l'involution * de Desargues, établit

** cela ne se rapporte-t-il pas uniquement au quadrilatère* une relation très simple entre six points quelconques d’une conique, et par conséquent est une des plus générales et des plus fécondes que l’on puisse désirer.

L’ouvrage de Pascal était imité de la méthode de Desargues ; on y trouvait le fameux théorème de l’hexagramme mystique dont Pascal tirait une foule de conséquences. On conçoit la fécondité de ce théorème, puisqu’il exprime, comme celui de Desargues, une propriété générale de six points de la courbe.

À qui appartient l’hexagramme, à Pascal ou à Desargues

Dans le temps même où Desargues et Pascal mettaient en œuvre avec toute la supériorité de leur génie, leur méthode nouvelle, Descartes en créait une d’un genre bien supérieur et dont il ne s’était point trouvé d’exemple chez les Anciens. C’était sa géométrie analytique, par laquelle une équation entre l’abscisse et l’ordonnée de chaque point d’une courbe, suffit pour définir la courbe et conduire à la découverte de toutes ses propriétés. *

leur, leurs ? la méthode nouvelle

pourquoi sa ? la vaut mieux

** Donne une idée insuffisante de la méthode cartésienne*

Dès ce moment donc la théorie des coniques fut en possession de trois méthodes différentes : la méthode des Anciens, qui consiste à déduire d’une propriété donnée, par de simples considérations de géométrie plane, toute les autres propriétés de la courbe ; la méthode de Descartes, d’après laquelle une simple équation, qui est aussi une propriété de la courbe, suffit pour qu’on en conclue par de seuls calculs algébriques, toutes les autres propriétés. Enfin la méthode de Desargues †dans laquelle on cherche à appliquer immédiatement par voie de projection ou perspective, les propriétés du cercle, aux sections coniques.|

† en haut on a nommé Verner

13 **§6. Réflexions sur les méthodes analytique et de la perspective.**

La méthode des Anciens et celle de Descartes ont un point commun, en ce que, dans l’une et l’autre, une seule propriété suffit comme définition de la courbe, pour que l’on en conclue toutes les autres. Mais elles diffèrent essentiellement dans leur marche. Celle des Anciens veut que l’on passe méthodiquement et pas à pas, du connu à l’inconnu ; et que l’on forme ainsi un enchaînement continu entre toutes les parties du sujet ; qu’elles s’éclairent et se complètent mutuellement. Par la méthode de Descartes, au contraire, on passe immédiatement de l’équation donnée à chaque propriété, sans avoir besoin de connaître les relations qui

ce mot propriété est bien élastique quelles sont les propriétés d’une conique, réponse un océan sans bords[93]

[93] Cette note fait référence à la traduction de Blanc du Guillet du livre VI du *De natura rerum* de Lucrèce, « Mais qu’est à l’Océan, gouffre immense et sans bords, qu’est donc ce vaste amas de fluides trésors, qu’une goutte légère, un atome impalpable ? » ;

peuvent avoir lieu entre ces propriétés diverses, et que ferait découvrir, par nécessité, la méthode ancienne. Ce procédé n'est souvent qu'une sorte de vérification de chaque propriété individuellement. À côté donc de ces avantages incontestables et très grands, se trouve le défautde ne pas répandre toute la clarté désirable sur les différentes parties du sujet, et d'en laisser ignorer les liens et la connexion qu'il serait utile de connaître. *le contraire de cela est vrai*

La méthode de Desargues donne lieu à des observations semblables. Elle procure avec facilité un certain nombre de propriétés, celles qu'on a appelées projectives ; mais elle est restreinte dans ses usages, elle ne peut s'appliquer à une foule de questions. On en conçoit bien la raison. Car, s'il s'agit de démontrer une propriété [*théorème relatif à*] d'une conique, l'esprit de la méthode est de prendre la propriété analogue dans le cercle, pour la transporter à la conique. Eh bien, les éléments caractéristiques de la propriété dans la conique, peuvent être inhérents à la condition d'inégalité de ses deux axes, et disparaître dans le cercle ; alors la méthode n'est plus praticable. Nous citons ici le cas le plus simple ; mais la figure proposée peut renfermer plusieurs coniques, et n'être pas susceptible de produire en projection une figure dont on connaisse les propriétés ou qu'il soit plus facile de traiter. *que veut dire la propriété d'une courbe ? Tout ce que vous voulez* *les méthodes metamorphiques échappent à tout cela*

Un autre inconvénient de cette méthode est de ne prouver que des propositions disjointes qu'on fait surgir tout d'une pièce et comme d'un moule, sans qu'il y ait aucuns liens entre elles, et sans qu'on puisse les rattacher aux propriétés principales des sections coniques. Car il existe toujours dans toute théorie mathématique, principalement en Géométrie, quelques vérités principales dont toutes les autres sont ou des conséquences plus ou moins immédiates, ou souvent de simples transformations, sous des formes très diverses. Ainsi par exemple, nous pouvons dire que les propositions en apparence très ~~différentes~~ dissemblables qui expriment les relations générales entre six points d'une conique, ne sont au fond que des expressions différentes d'une même propriété de ces courbes. La méthode dont nous parlons ne fait point connaître les liens secrets qui ont lieu entre ces propositions en apparence si diverses, même à l'égard de celles que l'on démontre par cette méthode. C'est là un défaut réel. | *La théorie des fonctions symétriques et celles des dérivées renferment toutes les propriétés possibles des coniques et de toutes les lignes algébriques imaginables.*

voir [Blanc du Guillet 1788, p. 295]. On retrouve cette expression dans un article d'Émile Brassine, professeur à l'école d'artillerie de Toulouse et éditeur des œuvres de Fermat, dans les *Nouvelles annales de mathématiques* avec un renvoi à une note de Chasles sur les rosettes insérée dans les *Comptes-rendus de l'Académie des sciences* : « toutes ces évaluations, traduites en géométrie fournissent avec une extrême facilité des théories en nombre infini comme les fonctions symétriques ; c'est un océan sans bord », cf. [Brassine 1848, p. 211–212].

14 §7. Des divers auteurs qui ont écrit sur les coniques dans le 17^e^ et 18^e^ siècle.

Beaucoup d’auteurs, à cette époquedu 17^e^ siècle, ont écrit sur les coniques. En 1631, puis en 1641, Mydorge donna un ample traité dans le style des Anciens et à la manière d’Apollonius, mais dans lequel, faisant usage parfois du cône, il simplifia beaucoup de propositions en en comprenant plusieurs dans une même démonstration.

à cette époque du 17^e^ siècle ? paramètre est-ce mydorge

Cavalieri et De Witt, le célèbre grand pensionnaire de hollande, cherchèrent divers modes de génération des coniques sur le plan par l’intersection de deux droites mobiles, qui restent parallèles à ~~des axes fixes~~ elles mêmes, en tournant autour de points fixes. Et De Witt surtout s’appliqua à déduire, par la Géométrie, de chaque mode de description, les diverses propriétés de la courbe.

Grégoire de St Vincent comprit [*donna*] dans son Opus geometricum.. un ample traité des coniques, à la manière des Anciens ; Wallis en fit [*apprêta*] un suivant la méthode de Descartes. Schooten rechercha, dans un petit traité spécial, les divers modes de description mécanique de ces courbes, c’est-à-dire au moyen d’un instrument ; et dans d’autres parties de ses ouvrages, il démontre diverses propriétés, par l’analyse de Descartes.

inversion germanique comprendre n’a pas ce sens en français

quoi ?

Viviani, que nous avons déjà nommé comme ayant établi les cinq livres des lieux solides d’Aristée, rétablit aussi le cinquième livre d’Apollonius qui n’était pas encore connu, et dont on eut quelque temps après le texte arabe, que l’on ne possédait pas encore, et qui fut retrouvé par Borelli dans un texte arabe, pendant que le célèbre disciple de Galilée travaillait à sa divination. Ce cinquième livre qui contenait les propres découvertes d’Apollonius, roule sur les normales menées aux coniques, d’après diverses conditions ; aussi Viviani intitula son ouvrage : De maximis et minimis. Geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergaei, adhuc desideratum *. Il est inutile de dire que Viviani suivit exclusivement la méthode des Anciens.

** la date*

Sluze s’occupa principalement de la résolution des équations du 3^e^ et 4^e^ degré par les sections coniques considérées analytiquement à la manière de Descartes.

~~Dates de De Witt Cavalieri~~

Nous passons sous silence divers autres géomètres, pour arriver à Delahire qui [[??]] écrivit sur les coniques d’une manière toute spéciale dans trois ouvrages différents qui ont eu tous une grande réputation et qui ont fait époque dans cette partie de la Géométrie.

Ces trois traités qui parurent en 1673, 1679 et 1685, reposent sur des vues différentes. Dans le traité de 1673, Delahire cite l’ouvrage de Desargues et suit sa méthode, c'est-à-dire qu'il applique immédiatement aux sections coniques certaines propriétés du cercle. Dans une seconde partie intitulée Planiconiques, il propose une méthode nouvelle, à savoir, de considérer sur le même plan, dans une position convenable, le cercle et la conique que, dans la première méthode, on considère sur le cône ; de manière à appliquer à ces courbes | les propriétés du cercle par des considérations analogues à celles dont on se sert sur le cône. Ce procédé offrait une méthode de démonstration nouvelle en Géométrie spéculative ; mais quant à la description des coniques par le cercle, ce n'était au fond que ce que l'on fait en perspective pratique, où, sans avoir besoin de considérer ce qui a lieu dans l'espace, on trace sur le plan même du modèle sa perspective.

Dans l'ouvrage de 1679, De la Hire prit un point de départ tout différent pour former les coniques ; il ne se servit plus du cercle ; et définit ces courbes par la propriété de leurs foyers, savoir que la somme et la différence des rayons vecteurs est constante dans l'ellipse ou l'hyperbole, et que le rayon vecteur est égal à la distance du point de la courbe à la directrice, dans la parabole. C'est par la pure Géométrie, à la manière des Grecs, que De la Hire déduisit de ces définitions les propriétés des trois courbes.

inversion germanique

Enfin le traité de 1685, grand ouvrage en neuf livres, peut être regardé comme imité du traité de 1673 quant à la démonstration d'un certain nombre de propriétés dans le cône, et de la méthode d'Apollonius, relativement à une foule de propositions auxquelles la méthode perspective ne s'appliquait pas, du moins aussi aisément que pour les premières.

Ces trois ouvrages dont le dernier était plus complet que tout ce qu'on avait écrit jusque là, ont fait beaucoup d'honneur à De la Hire.

trop vulgaire

Depuis ils ont tous été imités, l'un ou l'autre, par les nombreux géomètres qui ont écrit sur les coniques.

Le Mis de l'hopital, R. Simson, Mauduit adoptèrent les définitions tirées de la propriété des foyers, et firent des traités géométriques des ces courbes sections coniques.

Mais depuis un demi-siècle et plus, la Méthode de Descartes a prévalu presque exclusivement dans l'enseignement, et l'on n'étudie plus guère, en france du moins, la théorie des coniques que dans les cours de Géométrie analytique. Cependant en angleterre, on cultive les deux méthodes simultanément ; et il paraît chaque année de nouveaux traités géométriques des sections coniques. C'est la définition de De la Hire, par les foyers, que les auteurs suivent généralement.

c'est la bonne voie

À leurs yeux, (1) cette étude des coniques, par la Géométrie, alors même qu'on comprend ces courbes dans les exercices de Géométrie analytique, est nécessaire non seulement pour entretenir chez les jeunes étudiants le goût de la Géométrie et leur donner la clé de cette science, mais aussi comme étant la seule méthode qui puisse faire connaître intimement la théorie et les belles propriétés de ces courbes, et préparer à la
16 lecture des Principes de Newton qui forment encore dans les | Universités, des éléments de Mécanique céleste que chaque étudiant doit posséder [94].

[au dos] (1) On lit sur ce sujet les réflexions suivantes de M. Whewell, dans son traité des sections coniques, qui a paru à Cambridge, en 1846 : The study of conic sections in this form (géométrique) appears to be an …

§8. Progrès de la théorie des coniques au 19e siècle.

Depuis le commencement de ce siècle à peu près, la théorie des coniques a été le sujet de nombreuses recherches fondées sur des considérations et des méthodes diverses, ayant toutes quelques avantages particuliers.

Un fait mérite d'être remarqué, à ce sujet, c'est que, bien que la méthode analytique fût la seule que l'on suivît dans l'enseignement et qui eût initié les géomètres à la connaissance des sections coniques, ce n'est pas à cette méthode, cependant,que cette théorie a dû ses progrès, et le haut degré d'extension qu'elle a pris. C'est en grande partie à la méthode purement géométrique.

peu importe la nourrice fut la mét. analytique la géométrie a plus gagné en 50 années que dans les 50 siècles précédents

C'est dans la Géométrie de position de Carnot, qui parut en 1803, et dans la Théorie des transversales du même auteur, qu'on rencontre les premiers pas dans cette voie nouvelle. On y distingue, parmi les belles propriétés des sections coniques, démontrées avec la généralité et la facilité qui font le caractère de ces deux ouvrages, le théorème sur les six segments qu'une conique fait sur les trois côtés d'un triangle, théorème, qui exprimant une propriété générale de six points d'une conique, est aussi fécond que les beaux théorèmes de Desargues et de Pascal.

Vers le même temps, M. Ch. Dupin a fait connaître une extension fort remarquable des deux propriétés principales des foyers, relatives à la

94 Chasles renvoie au passage suivant de [Whewell 1846, p. iii] : « The study of Conic Sections in this form appears to be an indispensable part of a course of mathematical reading which goes beyond Elementary Geometry ; and especially of a course which includes any study of Newton's Principia. The study of conic sections as a branch of Analytical Geometry can by no means supply the place of an acquaintance with the geometrical proofs. By seeing the subject presented only in an analytical form, the student obtains a very erroneous notion of the relation of the subject to geometry, and remains utterly ignorant of that part of mathematics which all mathematicians up to the present time have understood by the term Conic Sections. »

somme ou la différence des deux rayons vecteurs, et à l'égalité des angles que ceux-ci font avec la tangente. Sous ce point de vue, une conique a une infinité de foyers situés dans l'espace sur une autre conique, par rapport à laquelle la première est, réciproquement, le lieu d'une infinité de foyers.

M. Brianchon, dans plusieurs mémoires insérés dans le Journal et la correspondance de l'école polytechnique et dans un ouvrage spécial, a beaucoup accru la théorie des coniques et contribué à en propager l'étude.

Mais il faut citer surtout le traité des propriétés projectives de M. Poncelet où se trouvent avec des méthodes ~~de recherche~~ fécondes, des résultats nombreux dont on n'avait point eu l'idée jusqu'alors.

§9. Sur le traité des propriétés projectives des figures

Dans cet ouvrage, M. Poncelet s'est proposé, comme l'indique le titre, de rechercher les propriétés des figures qui sont projectives, c'est-à-dire qui se conservent dans la transformation par voie de projection ou de perspective. C'est, comme on voit, la méthode suivie déjà avec succès par Desargues, Pascal et De la Hire, mais c'est sur des bases plus étendues, et d'un point de vue plus général, que le savant auteur, après avoir analysé avec un soin scrupuleux les travaux de ses devanciers, a mis en œuvre cette méthode qui l'a conduit avec une facilité merveilleuse à une foule de résultats du plus haut intérêt. Dans le même ouvrage se trouvent deux autres méthodes ingénieuses propres, comme celle-là, à faire des transformations de figures, et, en particulier, à appliquer aux coniques les propriétés du cercle. L'une est la théorie des figures homologiques par
17 | laquelle on produit sur le plan, les mêmes déformations d'une figure, que dans l'espace par la perspective, cette méthode a de l'analogie avec les Planiconiques de De la Hire ; mais le point de vue de l'auteur, est différent, et les nombreuses applications qu'il en a faites, ~~se distinguent essentiellement du livre de De la Hire~~ portent un cachet d'originalité qui leur est propre. On y distingue notamment de belles propriétés des foyers, tandis que De la Hire n'avait pas même introduit la notion de ces points singuliers dans ses Planiconiques. *Vérifier*

Mais c'est surtout par ses applications aux figures à trois dimensions, pour lesquelles on ne connaissait point encore de méthode analogue à celle de la perspective en usage pour les figures planes, que ~~l'ingénieuse~~ cette belle théorie des figures homologiques se recommande. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

L’autre méthode du Traité des propriétés projectives, est celle des transformations que l’on fait par la théorie des polaires réciproques. Par cette voie un cercle se change en une conique, de même que par ~~la théorie des~~ les figures homologiques ; mais il y a entre l’une et l’autre théorie, et dans les résultats qu’elles procurent, une immense différence. Dans les figures homologiques, ~~de même que dans les figures~~ ou de la perspective, un point répond à un point, une droite à une droite, et les deux figures sont du même genre. Dans les transformations polaires, un point répond à une droite, et réciproquement, une droite à un point, de sorte que la génération des figures est différente ; leurs propriétés le sont aussi, mais elles se correspondent d’une certaine manière définie.

maintenant une droite se convertit en ligne de l’ordre que vous voulez et même en surfaces voir Strebor,[95] *mobius et autres*

Par cette méthode on convertit avec facilité une foule de propriétés du cercle en propriétés des coniques ; si les premières appartiennent à des points du cercle, les secondes appartiennent à des tangentes à la conique ; de sorte qu’on peut, dans beaucoup de cas, regarder une conique comme l’enveloppe de ses tangentes, ~~sans plus de difficultés qu’on en éprouve en la considérant comme le lieu géométrique d’un point~~ et résoudre sous ce point de vue des questions qui, en Géométrie analytique, pourraient exiger l’analyse infinitésimale.

Voilà quelles sont les trois méthodes de démonstration mises en œuvre dans le Traité des propriétés projectives, pour démontrer une foule de propriétés des sections coniques, dont une grande partie joignaient à un mérite ~~propre~~ réel l’attrait de la nouveauté. Ces propriétés et les théories qu’elles constituent parfois se présenteront successivement dans le cours de notre enseignement.

§ 10. Méthode fondée sur les propriétés des cônes du 2^d ordre, ou des coniques sphériques.

On peut concevoir ~~encore~~ une ~~autre~~ méthode générale propre à la découverte et à la démonstration des propriétés des coniques différente de celles dont il a été question jusqu’ici. Ce serait d’étudier les propriétés du cône à base circulaire dans lequel on forme ces courbes. Ces propriétés s’appliqueraient sans difficulté aux sections du cône. Ces cônes que nous appelons du second ordre, ont été tout à fait négligés ; on a cru pouvoir passer immédiatement de la théorie des coniques à celle de surfaces du second ordre,

---

95 *Strebor* est l’anagramme de *Roberts*. Il s’agit de William Roberts, professeur au Trinity College de Dublin, qui publia sous ce pseudonyme une quinzaine d’articles dans les *Nouvelles annales de mathématiques* entre 1847 et 1868.

regardant apparemment les cônes comme un cas particulier de ces surfaces. Mais il est résulté de là que l'on n'a connu jusqu'à ces derniers temps, à peu près aucune propriété des cônes, qui pourtant en possèdent de très belles et
18 fort nombreuses. À ces propriétés correspondent | sur la sphère, celles des coniques sphériques. On appelle ainsi la courbe d'intersection d'un cône du second ordre par une sphère qui a son centre au sommet du cône. On peut dire aussi que la courbe est une ligne de courbure du cône.

Ces coniques sphériques jouissent de toutes les propriétés des coniques planes, mais le plus souvent sous des énoncés moins simples, parce qu'à des segments rectilignes sur le plan, correspondent sur la sphère, tantôt des arcs de ~~grand~~ cercle, considérés en grandeur ; tantôt leurs lignes trigonométriques. Toutes les propriétés des coniques sphériques sont doubles, en vertu de la dualité des figures sphériques résultante du triangle polaire ou supplémentaire, car une conique produit une courbe de même nature, c'est-à-dire une seconde conique. Mais dans cette transformation, une propriété en produit une autre très différente ou générale. Il résulte de là que cette théorie des coniques sphériques est extrêmement abondante en beaux résultats.

~~Et en général, deux propriétés correspondantes sont très différentes l'une de l'autre ; ce qui fait que cette théorie est extrêmement riche en beaux résultats.~~ Si elle a tardé jusqu'à ces derniers temps à prendre la place qui lui revient dans l'ensemble des théories géométriques, elle commence à être fort cultivée ; elle a même donné lieu déjà à plusieurs essais de Géométrie analytique sur la sphère. Car, bien que ce soit par des considérations de pure Géométrie, dans une vue systématique, et comme préparation à l'étude des surfaces du 2^{d} ordre, qu'on ait d'abord traité ce sujet, il est susceptible, comme les questions de Géométrie plane, d'être soumis aux procédés généraux de l'analyse.

Nous reviendrons sur ces théories des cônes du second ordre et des coniques sphériques qui doivent entrer nécessairement dans un enseignement de la Géométrie supérieure. Nous voulions seulement indiquer ici que l'étude des propriétés des cônes ~~du second ordre~~ pourrait conduire aisément à la connaissance de celles des coniques planes. Mais cette marche n'est pas naturelle et nous n'entendons pas la recommander comme base d'un traité des sections coniques, mais seulement l'indiquer comme une méthode possible, et dont on fera parfois un usage utile, surtout à raison de la dualité constante des propriétés des coniques sphériques, qui procurera des propriétés des coniques planes dont on n'aurait pas eu l'idée sans cette considération.

§11. Autre méthode fondée sur la considération des surfaces du 2^{d} ordre.

Il est encore un procédé de démonstration des propriétés des coniques, qui a été employé parfois avec avantage, sans donner lieu cependant à une méthode régulière et toujours à la disposition du géomètre. C'est de tirer la démonstration d'un théorème de quelque considération de Géométrie à trois dimensions, c'est-à-dire de quelque propriété des surfaces du second degré. On trouve dans le traité de Géométrie descriptive de Monge deux ou trois ~~exemples~~ propositions dont les démonstrations rentrent
19 dans | cette manière de procéder. Depuis on l'a mise en pratique dans maintes circonstances. Mais ce n'est point là une méthode régulière, sur laquelle on puisse compter ; et l'on ne démontre souvent de la sorte, que les choses déjà connues ; on en conçoit à priori [*sic*] la raison, c'est qu'en général il faut connaître déjà les propriétés des surfaces du second ordre, lesquelles sont plus composées que celles des coniques, et ont peut-être exigé elles-mêmes la connaissance de celles-ci ~~pour être démontrées~~. Par cette voie on revient du composé, nous pourrions dire, du transcendant au simple ; c'est l'inverse de la marche ~~générale~~ naturelle en Géométrie. ~~Toutefois, cette manière de procéder ne doit point être négligée quand elle peut procurer la découverte de quelque vérité nouvelle, ou quand on manque d'un autre moyen de démonstration.~~ Un autre défaut de cette méthode, c'est qu'après avoir fait connaître un théorème de Géométrie plane, elle n'est d'aucun secours et ne donne aucune ouverture dans la recherche d'un théorème ~~correspondant~~ analogue dans la Géométrie de l'espace. Toutefois, cette manière de procéder ne doit point être négligée quand elle peut procurer quelque vérité nouvelle, ou quand on manque d'un autre moyen de démonstration.

Je donnerai ici un exemple de ces considérations de Géométrie à trois dimensions pour la démonstration d'un simple théorème sur le plan.

Par deux points fixes d'une conique, d'une ellipse, par exemple, on fait passer un cercle d'un rayon indéterminé ; on circonscrit un angle à ce cercle et à l'ellipse, et on demande le lieu du sommet de cet angle quand on fait varier le rayon du cercle.

Ce lieu est une seconde conique décrite des mêmes foyers que la première. Pour ledémontrer je conçois que la conique proposée et l'un des

c'est joli

lorsque les deux points se confondent on a la question du concours général[96]

96 Les questions proposées au concours général étaient régulièrement publiées dans les *Nouvelles annales de Mathématiques*, ainsi que les solutions envoyées par les lecteurs. En tant qu'éditeur de la revue, Terquem en avait donc parfaitement connaissance. Le problème du concours général auquel Terquem fait allusion en marge du

cercles qui passent par ses deux points fixes A, B, soient les sections principales d'un ellipsoïde et d'une sphère, et que ces deux surfaces se coupent suivant un cercle, perpendiculaire au plan de la figure et dont la corde AB sera le diamètre. Il est aisé de déterminer l'ellipsoïde de manière que cette condition ait lieu ; il suffit que son axe principal perpendiculaire au plan de la figure soit pris égal au diamètre de l'ellipse parallèle à la corde AB. Car alors le plan diamétral mené par ce diamètre, perpendiculairement au plan de la figure, coupera l'ellipsoïde suivant un cercle, et par conséquent le plan parallèle mené par la corde AB, coupera aussi l'ellipsoïde suivant un cercle dont AB sera le diamètre, et qui dès lors appartiendra à la sphère.

La sphère et l'ellipsoïde se coupant ainsi suivant une courbe plane, on sait qu'on peut leur circonscrire un cône ; il est évident que le sommet de ce ~~même~~ cône est situé dans le plan diamétral commun aux deux surfaces, c'est-à-dire dans le plan de la figure, de sorte qu'il coïncide avec le point concours des deux tangentes communes au cercle et à l'ellipse. |

20 Ce cône est de révolution puisqu'il est circonscrit à une sphère. Or on sait que tous les cônes de révolution circonscrits à une surface du second ordre ont leurs sommets situés dans le plan d'une des sections principales de la surface, sur une conique décrite des mêmes foyers que cette section. (1) Le théorème se trouve donc démontré.

Nous avons supposé, pour fixer les idées et préciser la question, que tous les cercles étaient menés par deux points A, B de la conique. Mais ces deux points peuvent être supposés imaginaires sur une droite déterminée de position. Cette droite sera, suivant l'expression de M. Poncelet, la sécante idéale commune aux cercles et à la conique. La démonstration demeure la même sans modification. Toutefois, l'énoncé n'est peut-être plus suffisamment clair et demande une courte explication. En effet il se présente deux cas : la conique et le cercle que l'on considère n'auront aucune tangente commune, ou bien en auront quatre qui donneront six points d'intersection. Dans le premier cas, bien que les tangentes communes au cercle et à la conique soient imaginaires, deux de leurs points d'intersection subsistent et de déterminent d'après certaines relations qu'ils ont avec la sécante commune au cercle et à la conique (2), et ce sont ces deux points que l'on a à considérer. Dans le second cas où les tangentes communes au cercle et à la conique sont réelles et ont six points d'intersection, la démonstration

texte de Chasles est vraisemblablement celui donné en 1846, et dont une solution fut publiée par un jeune Paul Serret dans les *Nouvelles annales* ; voir Serret [1847]. Serret intègrera l'École Normale Supérieure en 1849, et fera par la suite « une carrière modeste d'enseignant dans des établissements privés » ; cf. [Delcourt 2011, p. 283].

s’applique à deux seulement de ces six points, aux deux qui sont en relation avec la sécante commune en question ; les quatre autres n’entrent pas dans le lieu géométrique cherché ; ce qui résulte bien de la considération des deux cônes que l’on peut circonscrire à chaque sphère et à l’ellipsoïde.

Quand tous les cercles sont tangents à la conique en un même point, la démonstration subsiste encore, et le lieu géométrique cherché est toujours une conique décrite des mêmes foyers que la proposée.

Cette question nous a paru d’autant plus propre à être citée comme exemple des ressources utiles que la Géométrie à trois dimensions peut offrir parfois dans des questions de Géométrie plane, que, traitée par l’analyse, elle n’est pas sans présenter des difficultés réelles. (3) Mais elle est aussi un exemple de la nécessité de traiter les questions de Géométrie plane par les voies méthodiques et régulières de la science, les seules qui puissent s’appliquer aux questions analogues de Géométrie à trois dimensions ; tandis que la démonstration précédente, et en général les démonstrations de cette espèce, ne fournissent aucune ouverture pour passer du plan à l’espace. |

l’analyse résout la question générale pour deux coniques dont l’une a une seule constante variable et aussi facilement que ce cas particulier. l’idéalité est une analyse déguisée

Verso 20 (1) Ce théorème est dû à M. Steiner (journal de M. Crelle, t.[97]

(2) Si par chaque point de la sécante commune, on mène les tangentes au cercle et à leur conique, les quatre droites qui joindront les deux points de contact sur le cercle aux deux points de contact sur la conique, passeront toujours, deux à deux, par deux points fixes qui seront les deux points en question.

(3) En effet, il faudra d’abord distinguer les deux seuls points de concours des quatre tangentes communes à la conique et à chaque cercle, que l’on a à considérer, pour les faire entrer seuls dans le calcul et écarter les quatre autres points étrangers à la question. Puis il y aura à éliminer le rayon du cercle, opération qui pourra exiger, à cause de la complication des équations, un certain choix d’axes coordonnés ; puis enfin, il faudra reconnaître dans l’équation finale les relations du lieu trouvé avec la conique proposée, relations qui ne se présentent pas d’elles-mêmes dans tous les systèmes d’axes coordonnés. Les difficultés diminuent et les calculs se simplifient, dans le cas particulier où tous les ~~calculs~~ cercles sont tangents en un point de la conique. |

[97] Sur le manuscrit, la référence précise manque. Il s’agit peut-être de Steiner [1834], bien que ce texte soit en réalité une lettre écrite de Carl Jacobi communiquée par Steiner. Un indice en ce sens est donné par le fait que cet article précède immédiatement un autre article de Steiner, en français et portant sur l’attraction des ellipsoïdes. Il est vraisemblable que Chasles ait eu connaissance de ce dernier texte.

21 Les anciens avaient recours aussi parfois aux considérations de Géométrie à trois dimensions, pour en déduire quelques résultats de Géométrie plane. C'est ainsi que Pappus se sert des lieux à la surface pour décrire la quadratrice de Dinostrate, et transformer une spirale d'Archimède en quadratrice. (1)

Ce sont surtout les disciples de Monge qui ont cultivé ces procédés ~~de recherche et~~ de démonstration, parce qu'il s'en trouvait deux ou trois applications dans les ~~cours des~~ Leçons de Géométrie Descriptive, et qu'en donnant à l'esprit l'habitude des spéculations dans l'espace, cet ouvrage inculquait naturellement le goût de ce genre de recherches favorisé encore par l'attrait d'une sorte de nouveauté, et le charme qui s'attachait aux Leçons de l'illustre Professeur. C'est dans ce sens qu'on a pu dire quelquefois que les recherches de cette nature rentraient dans l'esprit de la Géométrie descriptive, et distinguaient l'école de Monge. Mais il ne faut pas attribuer à ce simple point de vue plus de portée qu'il n'en a ; on s'abuserait ~~étrangement~~ gravement ; car, en réalité, le mode de démonstration dont il s'agit appartient exclusivement à la Géométrie générale ou rationnelle, et n'a rien de particulier avec la Géométrie descriptive dont la connaissance n'est pas même nécessaire.

§12. Réflexions sur l'usage de la Géométrie descriptive en Géométrie spéculative.

Que l'on ~~passe en revue~~ recherche les différents exemples qui peuvent exister de l'usage de la Géométrie à trois dimensions pour démontrer des propositions de Géométrie plane, on reconnaîtra, comme nous venons de le dire, que la connaissance de la Géométrie descriptive n'y était point nécessaire. Et il n'y a pas lieu de s'en étonner, car la Géométrie descriptive n'a point d'autre objet, en réalité, que de faire de la Géométrie pratique à trois dimensions, laquelle Géométrie pratique consiste exclusivement, de même que la Géométrie pratique sur le plan, à appliquer les solutions que fournit la Géométrie générale. La Géométrie descriptive proprement dite ne peut aller au-delà de cette destination formelle et unique. Aussi, le système des deux projections sur lequel reposent ses procédés n'a-t-il jamais produit aucune découverte théorique. (2)

On n'entrevoit qu'une manière de faire servir les principes de cette méthode à la démonstration de quelques propositions ; c'est par la comparaison de deux figures planes dont se compose toute épure de Géométrie descriptive. Les propriétés des deux figures dérivent de celles de la figure ~~à trois dimensions~~ dans l'espace dont elles sont les projections, et ce sont celles-ci qui forment le lien entre les premières [*et l'on peut concevoir que les propriétés de cette figure dans l'espace sont en quelque sorte le lien entre celles de 2 projections*]. Si donc il arrive que l'on puisse en quelque sorte éliminer les propriétés de la figure dans l'espace, de manière à passer directement des propriétés de l'une des deux figures planes à celles de l'autre, on aura des théorèmes concernant ces deux figures. |

Verso 21 (1) Pappus, Collections mathématiques. Livre Aperçu historique, p. 30.

(2) On conçoit que je n'entends pas dire ici que si parfois quelques géomètres ont donné le nom de Géométrie descriptive à leurs travaux, il ne s'est trouvé dans ces œuvres, aucune découverte, aucun résultat théorique ; cette idée est loin de mes intentions et de ma pensée [*et cela serait contraire à la vérité*] : Je veux dire que là où se trouvent, sous le titre de Géométrie descriptive, des résultats dignes de prendre place dans les théories mathématiques, certainement ces résultats ne sont point dus à la Géométrie descriptive, mais bien à la Géométrie générale comme on l'a cultivée dans tous les temps, et qu'ils méritaient mieux que le titre diminutif et trop modeste de Géométrie descriptive. |

22 Quand la figure dans l'espace, est plane, les relations entre les deux autres deviennent telles, que par des constructions simples on passe directement d'une figure à l'autre, sans avoir besoin de se servir de la figure de l'espace comme intermédiaire entre les deux. Il en résulte alors une méthode de transformation directe d'une figure plane en une autre, susceptible d'application, soit pour transporter à l'une des deux figures les propriétés de l'autre, soit pour établir entre les deux figures certaines relations générales. On transformera ainsi, un cercle en une conique ; on pourra donc démontrer les propriétés des coniques par celles du cercle.

Mais on reconnaît que les figures ainsi formées ne sont point différentes de celles que l'on forme par les procédés pratiques de la perspective, ou directement sur le plan, soit à la manière de Delahire, soit par l'ingénieuse méthode des figures homologiques de M. Poncelet ; car les deux figures en projection se trouvent être des figures homologiques et qui même n'ont pas toujours la généralité de construction que comporte cette théorie, car leur centre d'homologie se trouve à l'infini.

Voilà pourquoi sans doute les méthodes fondées sur les procédés de la Géométrie descriptive, que nous venons d'indiquer, n'ont point été mises en usage ; puisque sans être différentes au fond de celles de la Géométrie ordinaire, elles sont plus compliquées et moins directes, et ne conduiraient du reste qu'à des choses déjà parfaitement connues. [*et très restreintes de leur nature*]

Mais lors même que la Géométrie descriptive posséderait quelque méthode régulière à laquelle on pût recourir parfois, on conçoit qu'elle ne serait que d'un usage très rare et très restreint. Car on n'y considérerait que des intersections de lignes, et partant, qu'un genre de propriétés des figures, celles qu'on a appelées propriétés descriptives. On y négligerait les relations de grandeur, ou propriétés métriques, infiniment plus nombreuses et utiles que les premières, et sans lesquelles on peut dire qu'il n'y a point à songer à aucun édifice mathématique. [*ce serait simplement un amusement puéril et impuissant*] |

23 **§13. Conclusion.**

Nécessité de fonder toute la théorie des sections coniques sur la méthode des Anciens.

Nous avons analysé les différentes méthodes que l'on a mises en œuvre dans l'étude des propriétés des coniques. Laquelle devons-nous suivre pour former une théorie complète de ces courbes, en rapport avec les progrès récents de la Géométrie. Il ne peut y avoir incertitude ; ce sera la Méthode générale, ou la Méthode des Anciens. Les diverses autres manières de procéder ; celle de Desargues et de Pascal ; celle qui se fonde sur des considérations de Géométrie à trois dimensions ; les ingénieuses méthodes du Traité des Propriétés projectives, devront trouver place successivement dans un cours de Géométrie supérieure, puisque toutes peuvent offrir certains avantages particuliers. Mais une seule, la Méthode ~~des Anciens~~ rationnelle et progressive est propre à établir entre toutes les parties du sujet les relations et la connexion qui constituent une véritable théorie, et à procurer au géomètre toutes les ressources nécessaires dans ses recherches ultérieures.

On ne fait remonter le fleuve du temps à sa source ; ce conseil à ce que je vois ne sera pas suivi. On aime sa nourrice, on la respecte, mais on ne la tette plus. Le grand Frédéric dit que si César revenait il apprendrait nos méthodes et puis nous batterait ; si Apoll. Archimède et tous les grands génies revenaient ils quitteraient leurs méthodes ; apprendraient nos procédés et seraient encore nos maîtres.[98] *Quelle méthode faut-il suivre ? Aucune et toutes ; toujours celle qui convient au sujet qui mène le plus promptement au but ; nous n'avons guère reçu des Anciens que la géométrie à cultiver, il y a la physique, la chimie. La vie est toujours de même longueur mais pas la besogne ; il faut démontrer avec rigueur et promptitude. C'est le caractère actuel de la science*

---

98 La citation supposée de Frédéric II de Prusse est une phrase assez communément attribuée au Prince de Condé, à savoir : « Si César revenait au monde, il battrait tous les généraux de Louis XIV », voir [Muller 1838, p. 112]. Stendhal la reproduit également, cette fois-ci sans attribution, dans son pamphlet en défense du romantisme contre le classicisme, voir [Stendhal 1823, p. 23]. Dans chacun de ces usages, la figure du génie militaire de César est mobilisée en faveur des savoirs et des pratiques (scientifiques, artistiques, ou militaires) 'modernes', auxquelles même les plus grands des 'anciens' auraient à s'initier avant de pouvoir rivaliser avec leurs descendants. L'emploi de ce trope suggère encore une fois que l'auteur de ces notes en marges est Olry Terquem, ce dernier ayant mobilisé la même référence dans sa critique d'un mémoire de Charles Méray écrit dans le style de la Géométrie Supérieure de Chasles, voir [Terquem 1860, p. 70–71].

Les défauts et l’insuffisance des procédés par lesquels on fait usage des propriétés de l’espace pour démontrer de simples propositions de Géométrie plane, sont assez évidentes, nous n’en reparlerons pas.

Les méthodes qui reposent sur la transformation des figures soit sur le plan, soit par voie de perspective, quoique d’un usage fécond et parfois spontané, sont aussi insuffisantes. Elles ont surtout le défaut, comme nous l’avons dit, de ne s’appliquer qu’à certaines classes de propositions, toujours dans des conditions données, sans procurer aucun secours dans une foule de cas où il faut revenir nécessairement à la marche lente, mais plus sure [*sic*], de la Méthode ~~des Anciens~~ générale.

Par exemple, prenons cette proposition de Géométrie élémentaire : De tous les polygones ~~non fermés~~, d’un même nombre de côtés circonscrits au cercle, celui dont le périmètre est minimum est le polygone régulier, que devient cette propriété de périmètre dans les sections coniques ? Aucune des méthodes particulières dont nous avons parlé ne s’applique à cette question. Elles ne se prêtent à aucune transformation du cercle dans laquelle la condition de périmètre minimum se conserve. Il faut donc s’adresser à la Géométrie générale, et trouver dans la théorie même des sections coniques les ressources nécessaires pour résoudre la question.

On parvient alors à cette propriété des sections coniques.

De tous les polygones, ~~non fermés~~, d’un même nombre de côtés circonscrits à une ~~arc de section~~ conique donnée, celui dont le périmètre est
24 minimum, jouit des propriétés suivantes | :

1°. Ses sommets sont situés sur une seconde ~~arc de section~~ conique décrite des mêmes foyers que le périmètre, *Exemple bien choisi*

2°. Chaque angle du polygone soutend [*sic*] dans la conique proposée un arc de longueur telle, que la somme des deux côtés de l’angle (terminés à leurs points de contact) moins cet arc inscrit, forme une longueur constante ;

3°. Enfin, le polygone considéré comme inscrit dans la seconde conique, jouit de la propriété d’être de périmètre maximum parmi tous les polygones du même nombre de côtés inscrites dans la même conique.

Quand ~~l’arc~~ la conique proposée est ~~un arc de~~ cercle, ces trois propriétés deviennent celles du polygone régulier.

Non seulement ces propriétés échappent aux diverses méthodes particulières de transformation des figures, mais lors même que quelqu’une de ces méthodes leur serait applicable, il faudrait encore avoir recours à la Géométrie générale pour transporter ces propriétés aux figures à trois dimensions ; car elles ont lieu sur la sphère relativement aux polygones formés par des arcs de grands cercles circonscrits à une conique sphérique, et sur les surfaces du second ordre relativement aux polygones géodésiques circonscrits à une ligne de courbure.

Il existe dans la théorie des coniques une classe de propositions qu'en général on ne démontre point directement et que l'on déduit d'autres propositions déjà connues, par la méthode des polaires réciproques. C'est ainsi, par exemple, que l'on déduit le théorème de M. Brianchon sur l'hexagone circonscrit à une conique, de l'hexagramme de Pascal. Ces propositions ont paru exiger ce mode de démonstration indirecte d'autant plus que la Géométrie analytique, telle qu'on la cultive, leur fait souvent défaut, ou du moins ne se prête pas aisément à leur démonstration. Dans notre théorie des sections coniques ces propositions iront de pair avec celles dont on les fait dépendre aujourd'hui, c'est-à-dire que comme celles-ci, elles seront démontrées directement et avec la même facilité.

RÉFÉRENCES

APOLLONIUS

[1566] *Conicorum libri quattuor, una cum Pappi Alexandrini lemmatibus et commentariis Eutocii Ascalonitae*, Bologna : Alessandro Benacci, 1566 ; Traduction latine par Federico Commandino.

[1710] *Apollonii Pergæi Conicorum Libri Octo, et Sereni Antissensis De Sectione Cylindri & Coni Libri Duo*, Oxford : Sheldonian Theater, 1710 ; Édition et traduction latine par Edmond Halley.

BELHOSTE (Bruno)

[2003] *La formation d'une technocratie : l'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris : Belin, 2003.

BOS (Henk J. M.)

[1984] Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory : the 'Construction of Equations', 1637 – ca. 1750, *Archive for History of Exact Sciences*, 30 (1984), p. 331–380.

BOUDIN (Amédée)

[1869] *Panthéon de la Légion d'honneur : Biographie de M. Chasles, membre de l'Institut*, Paris : s. n., 1869.

BRASSINE (Emile)

[1848] Note sur les rosettes, *Nouvelles annales de mthématiques*, 7 (1848), p. 209–214.

BUSSOTTI (Paolo)

[2019] Michel Chasles' foundational programme for geometry until the publication of his *Aperçu Historique*, *Archive for History of Exact Sciences*, 73–3 (2019), p. 261–308.

CHARETTE (François)
[1995–2003] *Orientalisme et histoire des sciences : L'historiographie européenne des sciences islamiques et hindoues, 17841900*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 1995–2003.

BOULLAND (Georges) & CLAUDIN (Anatole)
[1881] *Catalogue de la bibliothèque scientifique, historique et littéraire de feu M. Michel Chasles (de l'Institut)*, Paris : Claudin, 1881.

CHASLES (Michel)
[1837a] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science : la dualité et l'homographie*, Paris : Gauthier-Villars, 1837.
[1837b] *Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science : la dualité et l'homographie*, Bruxelles : Hayez, 1837.
[1839] *Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden*, Halle : Gebauer, 1839; traduction en allemand par Ludwig Adolph Sohncke.
[1847] Sur l'enseignement de la Géométrie supérieure. Discours d'introduction au Cours de Géométrie supérieure fondé à la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 12 (1847), p. 1–40.
[1852] *Traité de Géométrie Supérieure*, Paris : Bachelier, 1852.
[1855] Construction des équations du troisième et quatrième degré, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 41 (1855), p. 677–685.
[1860] *Les trois livres de porismes d'Euclide*, Mallet-Bachelier, 1860.
[1863] Rapport sur les travaux mathématiques de M. O. Terquem, *Nouvelles annales de mathématiques*, 2e s., vol. 2 (1863), p. 241–251.
[1865] *Traité des Sections Coniques*, Paris : Gauthier-Villars, 1865.
[1870] *Rapport sur les progrès de la géométrie en France*, Paris : Hachette, 1870.
[1880] *Traité de Géométrie Supérieure. Deuxième édition*, Paris : Gauthier-Villars, 1880.

CHEMLA (Karine)
[2016] The value of generality in Michel Chasles's historiography of geometry, dans Chemla (Karine), Chorlay (Renaud) & Rabouin (David), éd., *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, Oxford : Oxford University Press, 2016, p. 47–89.

CREMONA (Luigi)
[1862] *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Bologna : Tipi Gamberini e Parmeggiani, 1862.

CROIZAT (Barnabé)
[2016] *Gaston Darboux : naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur*, Thèse de doctorat, Université Lille 1, 2016.

DEHÉRAIN (Henri)
[1911] Les Manuscrits de Franz Woepcke à la bibliothèque de l'Institut, *Le Journal des savants*, 1911, p. 371–376.

de Jonquières (Ernest)
[1861] Les Trois Livres de Porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois, d'après la Notice et les Lemmes de Pappus, etc., par M. Chasles, *Nouvelles annales de mathématiques*, 20 (1861), p. 1–11.
[1867] *Lettre à M. Chales [sic] sur une question en litige (31 mai 1867)*, Paris : A. Bertrand, 1867.

Delcourt (Jean)
[2011] Analyse et géométrie : histoire des courbes gauches de Clairaut à Darboux, *Archive for History of Exact Sciences*, 65–3 (2011), p. 229–293.

Lejeune-Dirichlet (Peter Gustav)
[1839] Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun, contient une infinité de nombres premiers, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4 (1839), p. 393–422.
[1830] Extrait d'une lettre de M. Lejeune-Dirichlet à M. Liouville, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5 (1830), p. 72.

Gardner (J. Helen) & Wilson (Robin J.)
[1993] Thomas Archer Hirst – Mathematician Xtravagant, *The American Mathematical Monthly*, 100 (1993), p. 435–441 ; 531–538 ; 619–625 ; 723–731 ; 827–834 ; 907–915.

Ginzburg (Carlo)
[1980] Signes, Traces, Pistes : Racines d'un paradigme de l'indice, *Le Débat*, 6 (1980), p. 3–44.

Guicciardini (Niccolò)
[2009] *Pappus of Alexandria : Book 7 of the Collection*, Cambridge, MA & London : MIT Press, 2009.

Blanc du Guillet (Antoine)
[1788] *Lucrèce, De la Nature des Choses, traduit en vers*, Paris : Moutard - Plassan, 1788.

Hankel (Hermann)
[1875] *Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung*, Leipzig : Teubner, 1875 ; éd. par Axel Harnack.
[1885] Esquisse historique sur la marche du développement de la nouvelle géométrie, *Bulletin des sciences mathématiques*, 9 (1885), p. 172–188, 226–240 ; Traduit en français par M. Dewulf, colonel du génie. Ce texte correspond à l'introduction historique de Hankel [1875].

Heath (Thomas)
[1896] *Apollonius of Perga : Treatise on Conic Sections*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1896.

Hogendijk (Jan P)
[1991] Desargues' *Brouillon Project* and the *Conics* of Apollonius, *Centaurus*, 34 (1991), p. 1–43.

HOUSEL (Charles)
[1858] Les Coniques d’Apollonius, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3 (1858), p. 153–192.

HULIN (Nicole)
[1982] A propos de l’enseignement scientifique : une réforme de l’enseignement secondaire sous le Second Empire, la « bifurcation » (1852–1864), *Revue d’histoire des sciences*, 35–3 (1982), p. 217–245.

JONES (Alexander)
[1986] *Pappus of Alexandria : BBook 7 of the Collection*, New York : Springer, 1986 ; Part 1 : Introduction, Text, and Translation. Part 2 : Commentary, Index, and Figures.

KNORR (Wilbur Richard)
[1986] *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Boston-Basel-Stuttgart : Birkhäuser, 1986.

KUMMER (Ernst Eduard)
[1860] Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes, *Nouvelles annales de mathématiques*, I (19) (1860), p. 362–371.
[1862] Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes, *Nouvelles annales de mathématiques*, II (1) (1862), p. 31–41.

LÜTZEN (Jesper)
[1990] *Joseph Liouville 1809–1882 : Master of Pure and Applied Mathematics*, New-York : Springer, 1990.

MICHEL (Nicolas)
[2020a] The Values of Simplicity and Generality in Chasles’s Geometrical Theory of Attraction, *Journal of General Philosophy of Science*, 51 (2020), p. 115–146.
[2020b] *Of Words and Numbers : The Writing of Generality in the Emergence of Enumerative Geometry*, Thèse de doctorat, Université de Paris, 2020.

MOULINIER (Pierre)
[2012] *Les étudiants étrangers à Paris au XIXe siècle : Migrations et formation des élites*, Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2012.

MOUSSARD (Guillaume)
[2015] *Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d’enseignement de la géométrie en France (1794–1891)*, Thèse de doctorat, Université Nantes-Angers-Le Mans, 2015.

MULLER (Jean)
[1838] *Histoire de la Confédération Suisse, tome 4 [traduit de l’allemand par Charles Monnard]*, Paris : Ballimore, 1838.

NABONNAND (Philippe)
[2011] L’argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles, dans Flament (Dominique) & Nabonnand (Philippe), éd., *Justifier en Mathématiques*, Paris : Éditions de la Maison des Sciences de l’Homme, 2011, p. 17–47.

NEWTON (Hubert Anson)
[1861] On the geometrical construction of certain curves by points, *Mathematical Monthly*, 3 (1861), p. 235–244; 268–279.

NOGUÈS (Boris)
[2008] Élèves ou auditeurs ? Le public des facultés de lettres et de sciences au XIXe siècle (1808–1878), *Histoire de l'éducation*, 120 (2008), p. 77–97.

PAPPUS
[1588] *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversæ at commentariis illustratæ*, Pesaro : Hieronymus Concordia, 1588; Édition et traduction latine par Federico Commandino.

PARSHALL (Karen)
[1998] *James Joseph Sylvester : Life and Work in Letters*, Oxford : Oxford Univ. Press, 1998.

PARSHALL (Karen Hunger) & ROWE (David E.)
[1994] *The emergence of the American mathematical research community, 1876–1900 : J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*, Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1994; History of Mathematics, vol. 8.

PEYRARD (François)
[1807] *Œuvres d'Archimède traduites littéralement avec un commentaire*, Paris : François Buisson, 1807.

POINSOT (Louis)
[1842] *Éléments de statique suivis de quatre mémoires (8e édition)*, Paris : Bachelier, 1842.

PONCELET (Jean-Victor)
[1822] *Traité des propriétés projectives des figures ; ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Paris : Bachelier, 1822.

SALMON (George)
[1852] *A Treatise on the Higher Plane Curves*, Dublin : Hodges and Smith, 1852.

SCHOOTEN (Frans van)
[1651] *Geometria a Renato Des Cartes*, Amsterdam : Elzevir, 1651.

SÉDILLOT (Louis-Amédée)
[1834] Notice du Traité des connues géométriques de Hassan ben Haithem, *Journal asiatique*, 1834, p. 435–458.
[1837] *Recherches nouvelles pour servir à l'histoire des sciences mathématiques chez les Orientaux*, Paris : Imprimerie royale, 1837.
[1847] *Prolégomènes des tables astronomiques d'Oloug-Beg*, Paris : Firmin Didot, 1847.

SERRET (Paul)
[1847] Concours général de 1847. Mathématiques spéciales, *Nouvelles annales de mathématiques*, 6 (1847), p. 64–66.

SMADJA (Ivahn)

[2016] On two conjectures that shaped the historiography of indeterminate analysis : Strachey and Chasles on Sanskrit sources, *Historia Mathematica*, 43 (2016), p. 241–287.

MICHEL (Nicolas) & SMADJA (Ivahn)

[2021a] Mathematics in the archives : deconstructive historiography and the shaping of modern geometry (18371852), *British Journal for History of Science*, 54 (2021).

[2021b] The Ancients and the Moderns : Chasles on Euclid's Lost Porisms and the Pursuit of Geometry, *Science in Context*, 34 (2021).

STEINER (Jakob)

[1834] Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. Dr. C. G. J. Jacobi zu Königsberg i. Pr., an den Herrn Prof. Dr. J. Steiner zu Berlin, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 12 (1834), p. 137–140.

STENDHAL

[1823] *Racine et Shakespeare*, Paris : Bossange, Delaunay et Mongie, 1823.

SYLVESTER (James Joseph)

[1852] Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes, *Nouvelles annales de mathématiques*, 11 (1852), p. 434–440.

TERQUEM (Olry)

[1844a] Notice bibliographique sur Apollonius, *Nouvelles annales de mathématiques*, 3 (1844), p. 350–352 ; 474–488.

[1844b] Théorie des foyers, d'après Apollonius, *Nouvelles annales de mathématiques*, 3 (1844), p. 412–416.

[1850] Théorème de Fermat et manuscrit arabe, *Nouvelles annales de mathématiques*, 9 (1850), p. 386–392.

[1854] Bibliographie : Omar AlKhayyami (IIe siècle, vers la fin), *Nouvelles annales de mathématiques*, 13 (1854), p. 148–157.

[1855] Notice sur la découverte des logarithmes, *Nouvelles annales de mathématiques. Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*, 14 (1855), p. 1–7 ; 40–49.

[1860] Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques, *Nouvelles annales de mathématiques*, 19 (1860), p. 70–71.

VERDIER (Norbert)

[2009a] *Le journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIXe siècle (1824–1885)*, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, 2009.

[2009b] Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIXe siècle en Europe, *Philosophia scientiae*, 13 (2) (2009), p. 97–126.

[2013] Éditer puis vendre des mathématiques avec la maison Bachelier (1812–1864), *Revue d'histoire des mathématiques*, 19 (1) (2013), p. 79–145.

[2015] Eugène Catalan (1814–1894, X 1833) : Le bicentenaire et le fonds d'archives Catalan-Jongmans, *Bulletin de la Sabix*, 57 (2015), p. 19–42.

von Staudt (Karl)
[1847] *Geometrie der Lage*, Nürnberg : Bauer et Raspe, 1847.

Whewell (William)
[1846] *Conic Sections : Their Principal Properties Proved Geometrically*, Cambridge : Deighton, 1846.

Woepcke (Franz)
[1850] Notice sur un manuscrit arabe d'un traité d'algèbre par Aboul Fath Omar Ben Ibrahîm Alkhayâmi, contenant la construction géométrique des équations cubiques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40 (1850), p. 160–172.
[1851] *L'algèbre d'Omar Alkhayyami*, Paris : Duprat, 1851.

Zeuthen (Hieronumus Georg)
[1866] Selvbiografi, *Indbydelsesskrift till Københavns Universitet Aarsfest (November)*, 1866, p. 91–94.
[1886] *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Kopenhagen : Höst & Sohn, 1886.