

Wiskunde en sterrenkunde en de traditionele islam

De wiskunde en sterrenkunde in de middeleeuwse islamitische wereld hebben grote invloed gehad op de wetenschap in christelijk Europa. Deze invloed is nog steeds te zien aan de Arabische woorden algebra, algoritme, almanak, zenith, nadir en azimuth en aan vele Arabische sterrennamen zoals Rigel, Deneb en Aldebaran. Het aanzien van de exacte wetenschappen in de middeleeuwse islamitische wereld was voor een deel te danken aan het verband tussen wis- en sterrenkunde en islamitische religieuze voorschriften. In dit artikel geven we een paar voorbeelden.

De islam ontstond in het begin van de zevende eeuw na Christus in het woestijngebied van het huidige Saoedi-Arabië. De woestijnbewoners hadden praktische kennis over zon, sterren en atmosfeer, maar geen traditie van wetenschappelijk redeneren. In de zevende eeuw veroverden de moslims Syrië, Irak en Perzië, waar de wetenschap van het oude Griekenland en India nog voortleefde. In de eeuwen hierna ontstond in de islamitische wereld een nieuwe wetenschappelijke traditie, met Arabisch als voertaal, waarin mensen van verschillende religies (moslims, christenen, joden, zoroastriërs et cetera) en afkomstigen samenwerkten. Belangrijke onderwerpen waren wiskunde en sterrenkunde. Deze werden verder ontwikkeld op een fundament van Indiase wiskunde en sterrenkunde, Griekse meetkunde uit de *Elementen* van Euclides (circa 300 voor Christus) en de hellenistische sterrenkunde van Ptolemaeus (circa 150 na Christus). In de islamitische traditie werd de optica door Ibn al-Haytham (965 - circa 1041) op basis van experimenten opnieuw opgezet. De optica en de meeste wiskunde en sterrenkunde hadden inhoudelijk geen verband met religie. Wel heeft de islamitische wereld de randvoorwaarden voor deze ontwikkelingen gecreëerd.

Historisch gezien is de islamitische traditie ook belangrijk geweest door de invloed op christelijk West-Europa, waar in de vroege middeleeuwen bijna alle wiskunde en sterrenkunde waren verdwenen. Christelijke geleerden maakten vanaf de tiende eeuw kennis met islamitische sterrenkundige instrumenten zoals het astrolabium, en met Arabische wiskundeboeken, zoals het rekenboek en de algebra van al-Khwarizmi (circa 830 na Christus), wiens naam voortleeft in het woord algoritme. Via Latijnse vertalingen van Arabische vertalingen werd in de twaalfde eeuw de inhoud van de *Elementen* van Euclides en de *Almagest* van Ptolemaeus in het Westen bekend. Hierdoor leerden de christelijke geleerden de methodologie van de hellenistische wetenschap.

De invloed van wetenschap op de islam zelf is subtieler. De islam was een nieuwe religie met een nieuwe kalender [1] en nieuwe voorschriften, die bij de dood van de profeet Mohammed in 632 na Christus al vaste vorm hadden aangenomen. Er zijn vijf dagelijkse gebeden in de richting van de Kaaba in Mekka, het symbolisch middelpunt van de islamitische wereld. De gebeden worden verricht in tijdsintervallen die bepaald worden door de stand van de zon ten opzichte van de horizon. We komen hier straks op terug. Het islamitische jaar bestaat uit twaalf maanden, die beginnen wanneer de jonge maansikkel kort na zonsondergang in het westen wordt gezien. De negende maand (ramadan) is vastenmaand.

De religieuze voorschriften waren praktisch uitvoerbaar zonder wetenschappelijke kennis. Er waren traditionele manieren om de wereld in sectoren in te delen, met de Kaaba in het middelpunt. Zo kon in veel steden een algemene richting van Mekka worden aangegeven, bijvoorbeeld 'het zuiden', of 'het zuidelijkste punt waar de maan in het midden van de winter kan ondergaan', of 'waar de ster Canopus opgaat'.

In Indiase teksten stonden resultaten die met deze religieuze voorschriften te maken hebben, bijvoorbeeld een wiskundig verband tussen zonnetijd en lengte van de schaduw. De Indi-

ers hadden ook een regel om (bij benadering) te voorspellen wanneer de jonge maansikkel zichtbaar zal zijn en wanneer niet. De islamitische vorsten hadden hiervoor veel interesse, in het bijzonder kalief al-Ma'moen, die van 813 tot 833 in Bagdad regeerde.

In de *Almagest*, die in die tijd in het Arabisch vertaald werd, geeft Ptolemaeus goede argumenten voor de bolvorm van de aarde. Het begrip 'richting van Mekka' kreeg hierdoor in de omgeving van kalief al-Ma'moen een wiskundige invulling, namelijk de richting langs de kortste afstand naar Mekka over de aardbol, zoals een vogel zou kunnen vliegen. Geografische coördinaten waren beschreven door Ptolemaeus. Men probeerde nu een manier te vinden om deze coördinaten te bepalen, voor zover ze nog niet bekend waren, en daaruit de richting van Mekka te berekenen, dat wil zeggen de hoek tussen de richting van Mekka en de meridiaan in graden en minuten. Het bepalen van de richting van Mekka werd een probleem uit de stereometrie of boldriehoeksmetkunde. Benaderende en exacte oplossingen werden gevonden en in de volgende eeuwen steeds geschikter gemaakt voor praktische toepassing.

Dit wil niet zeggen dat iedereen deze resultaten ging gebruiken. Nieuwe moskeeën werden lang niet allemaal op wiskundig correcte manier georiënteerd naar Mekka. Veel architecten hielden vast aan de traditionele, niet-wiskundige richting van Mekka. Zij waren vermoedelijk niet bekend met bogen en hoeken in graden en minuten, die in die tijd alleen in de sterrenkunde werden gebruikt. Waarschijnlijk vonden ze die ook niet nodig. Nergens staat in de overleveringen uit de tijd van de profeet aangegeven dat de richting naar Mekka in graden en minuten moet worden uitgedrukt.

Desondanks werd in de islamitische traditie steeds meer expertise ontwikkeld over de wiskundige en sterrenkundige achtergronden van religieuze voorschriften. Een illustratie hiervan zijn de gebedstabellen die in de veertiende eeuw zijn geproduceerd door Shams al-Din al-Khalili. Hij was verbonden als 'tijdsregelaar' (*muwaqqit*) aan de beroemde Omayyadenmoskee in Damascus, dat wil zeggen degene die de gebedstijden bepaalt. Hij was ook enige tijd *muezzin*, degene die oproept tot het gebed.

Het bovenste deel van figuur 1 toont een klein deel van deze gebedstabellen in een handschrift in de Staatsbibliotheek in Berlijn, tegenwoordig online beschikbaar. Een transcriptie staat in het onderste deel van figuur 1. De letters x, A, B, ... F, y, G, H, ... M (mijn notatie) geven Arabische opschriften boven de kolommen aan, die onder aan figuur 1 vrij zijn vertaald.

In elke kolom en elke rij staat steeds een combinatie van twee getallen a b; deze betekent $a + b/60$. Omdat Arabisch van rechts naar links geschreven wordt, is de volgorde van de kolommen in onze transcriptie in het onderste deel van figuur 1 tegengesteld aan die in de figuren in het bovenste deel.

Nu volgt enige uitleg over de vijf gebeden. Het middagebed (*zoehr*) moet worden uitgevoerd wanneer de zon het hoogste punt boven de horizon heeft bereikt en alweer iets gedaald is. Volgens de rechtsschool van al-Khalili begint het tijdsinterval voor het namiddagebed (*asr*) wanneer de schaduw van een

جدول اعمال الليل في برج الثور والاسد

| عدد درجات البرج الثور | عدد درجات البرج الاسد | وقت المساء | جوف الليل | حصلة الفجر | حصلة الشفق | وقت اليكواله | اصروف الاحتيار |
|-----------------------|-----------------------|------------|-----------|------------|------------|--------------|----------------|
| 1 | 29 | 68 21 | 97 59 | 13 04 | 35 36 | 54 56 | 43 03 |
| 2 | 28 | 68 42 | 98 14 | 13 06 | 35 44 | 55 00 | 43 14 |
| 3 | 27 | 68 21 | 98 28 | 13 08 | 35 52 | 55 04 | 43 25 |
| 4 | 26 | 68 42 | 98 43 | 13 10 | 36 00 | 55 08 | 43 35 |
| 5 | 25 | 68 21 | 98 57 | 13 12 | 36 08 | 55 12 | 43 45 |
| 6 | 24 | 68 42 | 99 11 | 13 14 | 36 16 | 55 15 | 43 56 |
| 7 | 23 | 68 21 | 99 25 | 13 16 | 36 24 | 55 18 | 44 07 |
| 8 | 22 | 68 42 | 99 39 | 13 17 | 36 32 | 55 20 | 44 19 |
| 9 | 21 | 68 21 | 99 53 | 13 19 | 36 40 | 55 22 | 44 31 |
| 10 | 20 | 68 42 | 100 07 | 13 21 | 36 48 | 55 25 | 44 42 |

جدول اعمال مواقيت النهار في برج الثور والاسد

| عدد درجات البرج الثور | عدد درجات البرج الاسد | صاف وقت النهار | ساعات النهار | ارتفاع الشمس | حصلة العصر | وقت الغروب | عدد درجات البرج الاسد |
|-----------------------|-----------------------|----------------|--------------|--------------|------------|------------|-----------------------|
| 1 | 29 | 70 32 | 164 02 | 21 49 | 24 33 | 117 40 | 11 41 |
| 2 | 28 | 70 41 | 163 32 | 21 53 | 24 37 | 117 03 | 11 31 |
| 3 | 27 | 70 50 | 163 04 | 21 57 | 24 42 | 116 25 | 11 21 |
| 4 | 26 | 70 58 | 162 34 | 22 01 | 24 47 | 115 47 | 11 11 |
| 5 | 25 | 71 06 | 162 06 | 22 06 | 24 52 | 115 08 | 11 01 |
| 6 | 24 | 71 14 | 161 38 | 22 10 | 24 57 | 114 31 | 10 51 |
| 7 | 23 | 71 22 | 161 10 | 22 14 | 25 02 | 113 54 | 10 42 |
| 8 | 22 | 71 30 | 160 42 | 22 18 | 25 07 | 113 17 | 10 32 |
| 9 | 21 | 71 38 | 160 14 | 22 22 | 25 12 | 112 40 | 10 23 |
| 10 | 20 | 71 46 | 159 46 | 22 27 | 25 18 | 112 01 | 10 14 |

| x | A | B | C | D | E | F | y | x | G | H | J | K | L | M | y |
|----|-------|--------|-------|-------|-------|-------|----|----|-------|--------|-------|-------|--------|-------|----|
| 1 | 68 21 | 97 59 | 13 04 | 35 36 | 54 56 | 43 03 | 29 | 1 | 70 32 | 164 02 | 21 49 | 24 33 | 117 40 | 11 41 | 29 |
| 2 | 68 42 | 98 14 | 13 06 | 35 44 | 55 00 | 43 14 | 28 | 2 | 70 41 | 163 32 | 21 53 | 24 37 | 117 03 | 11 31 | 28 |
| 3 | 68 21 | 98 28 | 13 08 | 35 52 | 55 04 | 43 25 | 27 | 3 | 70 50 | 163 04 | 21 57 | 24 42 | 116 25 | 11 21 | 27 |
| 4 | 68 42 | 98 43 | 13 10 | 36 00 | 55 08 | 43 35 | 26 | 4 | 70 58 | 162 34 | 22 01 | 24 47 | 115 47 | 11 11 | 26 |
| 5 | 68 21 | 98 57 | 13 12 | 36 08 | 55 12 | 43 45 | 25 | 5 | 71 06 | 162 06 | 22 06 | 24 52 | 115 08 | 11 01 | 25 |
| 6 | 68 42 | 99 11 | 13 14 | 36 16 | 55 15 | 43 56 | 24 | 6 | 71 14 | 161 38 | 22 10 | 24 57 | 114 31 | 10 51 | 24 |
| 7 | 68 21 | 99 25 | 13 16 | 36 24 | 55 18 | 44 07 | 23 | 7 | 71 22 | 161 10 | 22 14 | 25 02 | 113 54 | 10 42 | 23 |
| 8 | 68 42 | 99 39 | 13 17 | 36 32 | 55 20 | 44 19 | 22 | 8 | 71 30 | 160 42 | 22 18 | 25 07 | 113 17 | 10 32 | 22 |
| 9 | 68 21 | 99 53 | 13 19 | 36 40 | 55 22 | 44 31 | 21 | 9 | 71 38 | 160 14 | 22 22 | 25 12 | 112 40 | 10 23 | 21 |
| 10 | 68 42 | 100 07 | 13 21 | 36 48 | 55 25 | 44 42 | 20 | 10 | 71 46 | 159 46 | 22 27 | 25 18 | 112 01 | 10 14 | 20 |

Figuur 1. Boven: tabellen voor het uitvoeren van de tijdsbepaling bij dag en nacht, tekens Stier (links) en Leeuw (rechts), berekend door Shams al-Din al-Khalili voor de breedte van Damascus, 33°30' [3]. Onder: Transcriptie van de bovenste figuren. x: graad in het teken Stier, y: graad in het teken Leeuw. A: maximale hoogte van de zon. B: halve dagboog. C: aantal uren in de dag. D: hoogte van de zon aan het begin van de asr. E: tijd tussen hoogste punt zon en het begin van de asr. F: tijd tussen het begin van de asr en zonsondergang. G: tijd tussen hoogste punt zon en het eind van de asr. H: hele nachtboog. J: duur van de avondschemering. K: duur van de dageraad. L: duur van de diepe nacht. M: tijdsinterval tussen zon in de richting van Mekka en hoogste punt zon.

stok gelijk is aan de lengte van de stok plus de schaduw van de stok toen de zon zijn hoogste punt bereikte. De periode eindigt wanneer de schaduw gelijk is aan tweemaal de lengte van de stok plus de schaduw met de zon op het hoogste punt. Het avondgebed (*maghrib*) valt na zonsondergang tijdens de avondschemering, het nachtgebed (*isha*) wanneer de hemel helemaal donker is, en het ochtendgebed (*fadzr*) in de ochtendschemering voor zonsopgang. We gaan nu de tabel gebruiken om de gebedstijden te berekenen op 8 Shawwal 1444 in de islamitische kalender. We hebben eerst de positie van de zon in de ecliptica nodig. Om die positie bij benadering te vinden, zetten we de datum in de islamitische maankalender om in een zonnekalender,

bijvoorbeeld de moderne gregoriaanse kalender, en vinden 28 april 2023. Al-Khalili en zijn collega's gebruikten hiervoor de Syrische kalender, die dezelfde maanden heeft (met andere namen) als de gregoriaanse. De dag en de maand bevatten genoeg informatie om de positie van de zon bij benadering te vinden; op 28 april van elk jaar staat de zon gemiddeld in 8 graden in het teken Stier. Deze stand heeft als zodanig niets met astrologie te maken, maar betekent alleen dat de zon 38 graden verder staat dan het lentepunt. Al-Khalili rekende met lokale ware zonnetijd. Zijn referentiepunt was het moment wanneer de zon het hoogste punt boven de horizon bereikt en precies in het zuiden staat. Modern zouden we kunnen zeggen dat het dan 12 uur is in lokale ware



Figuur 2. De Omayyadenmoskee aan het eind van de 19^e eeuw.

zonnetijd.

Voor het zoehr-gebed is de tabel niet nodig. De overige gebedstijden zijn te vinden de rij van $x=8$. Al-Khalili drukte tijdsintervallen meestal uit in 'tijdgraden', een standaardeenheid in de islamitische sterrenkunde. Een volledige rotatie van het universum om de aarde (wij zouden zeggen een sterrendag) is 360 tijdgraden. Als we een tijdgraad gelijkstellen aan 4 moderne minuten dan vinden we dus de volgende tijdsintervallen, omgezet in uren, minuten en seconden (h, m, s), vanaf het moment dat de zon op zijn hoogste punt staat: tot het begin van het asr-gebed kolom E: 3h 41m 20s; tot het eind van het asr-gebed G: 4h 46m, tot zonsondergang (begin van het maghrib-gebed) B: 6h 38m 36s.

Daarna zijn de intervallen tussen zonsondergang en het einde avondschemering (begin van het isha-gebed) J: 1h 29m 12s, tussen einde avondschemering en begin ochtendschemering (begin van het fadzjr-gebed) L: 7h 33m 8s, en tussen begin ochtendschemering en zonsopkomst (periode voor het fadzjr-gebed) K: 1h 40m 28s. Kolom M geeft nog de informatie dat de zon precies in de richting van Mekka staat op 42m 8s voor het bereiken van het hoogste punt boven de horizon.

Deze tabellen zijn berekend op grond van een aantal aannamen: geografische breedte van Damascus $\phi=33^{\circ}30'$, hellingshoek van de ecliptica $\varepsilon=23^{\circ}31'$, gemeten door de astronoom Ibn al-Shatir, die ook in Damascus werkte; de avondschemering eindigt als de zon 17 graden loodrecht onder de horizon staat, en de ochtendschemering begint als de zon 19 graden loodrecht onder de horizon staat. Ook wordt aangenomen dat de richting van Mekka in Damascus $28^{\circ}57'$ ten oosten van het zuiden is.

De moderne formules voor de berekening van de kolommen suggereren dat al-Khalili een behoorlijke kennis van trigonometrie en boldriehoeksmeetkunde nodig had. We geven een paar van deze formules: $A=90-\phi+\delta$ met δ de declinatie, die gevonden kan worden uit $\sin \delta=\sin(x+30)\sin \varepsilon$; $\cos B=-\tan \delta \tan \phi$, $\cot D=\cot A+1$; $\cos E=(\cos D-\sin \phi \sin \delta)/(\cos \phi \cos \delta)$; $J=X-B$ waarbij $\cos X=(\sin p-\sin \phi \sin \delta)/(\cos \phi \cos \delta)$ en $p=17^{\circ}$ enzovoort.

Al-Khalili heeft de tabel zeer nauwkeurig berekend; de afwijkingen tussen de tijdsintervallen in de tabel en de herbere-



Figuur 3. Workshop bij Lahore Astronomical Society in 2018.

kende waarden zijn meestal niet meer dan 1 of 2 eenheden van de laatste sexagesimaal, dus als het om tijdgraden gaat hoogstens 8 moderne seconden.

Voor het bepalen van de gebedstijden waren nog een paar finishing touches nodig, die vermoedelijk hoorden bij de expertise van de muwaqqit. Zo is de zonsondergang in de tabel het samenvallen van het middelpunt van de zon met de ware horizon, niet het zakken van de bovenkant van de schijf onder de zichtbare horizon. Vermoedelijk gingen de muwaqqits verstandig met dit soort kleinigheden om en werden de noodzakelijke correcties geschat. Het is voldoende de gebedstijden op de moderne minuut (15/60 tijdgraden) nauwkeurig te weten, zoals ook in moderne gebedstabellen te zien is.

Ook voor andere islamitische centra zoals Jeruzalem, Caïro en Istanbul werden gebedstabellen berekend. Deze tabellen werden niet per se door iedereen gebruikt, maar wel is duidelijk dat het verband met religieuze problemen de interesse voor wiskunde en sterrenkunde in traditionele islamitische kringen heeft vergroot. Dit is een van de randvoorwaarden voor de middeleeuwse ontwikkeling van de wetenschap geweest, en de interesse is er tegenwoordig nog steeds. Ik heb dit zelf kunnen zien in een driedaags programma over het astrolabium, dat door een Nederlands team in 2018 is gegeven in Lahore in Pakistan. Tot de meest enthousiaste deelnemers behoorde een groep docenten aan traditionele Pakistaanse madrassa's (figuur 3).

Jan P. Hogendijk studeerde wiskunde en Arabisch in Utrecht. Hij werkte aan de Mathematische Instituten in Utrecht en Leiden. Sinds 2020 is hij met pensioen. Voor meer informatie zie www.jphogendijk.nl.

REFERENTIES EN NOTEN

1. Algoritmen om een datum in de islamitische kalender naar de gregoriaanse kalender om te rekenen en vice versa zijn te vinden in het boek *Astronomical Algorithms* van Jean Meeus, hoofdstuk 9.
2. David A. King, *In Synchrony with the Heavens*, vol. 1: *The Call of the Muezzin*, Leiden (2005).
3. Arabisch handschrift Berlijn, Staatsbibliothek, Sprenger 1858, fol. 14b, 15a. Het hele handschrift kan worden gedownload via: <http://resolver.staatsbibliothek-berlin.de/SBB000309E80000000>.

Erratum op p. 13 van het NTVN artikel

Op p. 13 transcriptie van figuur 1 zijn de getallen in de eerste kolom, derde tot en met tiende rij, weggefallen en vervangen door de getallen uit de eerste twee rijen. De juiste getallen zijn te zien in deze transcriptie.

De overige kolommen zijn wel goed weergegeven

| x | A | B | C | D | E | F | y | x | G | H | J | K | L | M | y |
|-----------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|-----------|
| 1 | 68 21 | 97 59 | 13 04 | 35 36 | 54 56 | 43 03 | 29 | 1 | 70 32 | 164 02 | 21 49 | 24 33 | 117 40 | 11 41 | 29 |
| 2 | 68 42 | 98 14 | 13 06 | 35 44 | 55 00 | 43 14 | 28 | 2 | 70 41 | 163 32 | 21 53 | 24 37 | 117 03 | 11 31 | 28 |
| 3 | 69 03 | 98 28 | 13 08 | 35 52 | 55 04 | 43 25 | 27 | 3 | 70 50 | 163 04 | 21 57 | 24 42 | 116 25 | 11 21 | 27 |
| 4 | 69 24 | 98 43 | 13 10 | 36 00 | 55 08 | 43 35 | 26 | 4 | 70 58 | 162 34 | 22 01 | 24 47 | 115 47 | 11 11 | 26 |
| 5 | 69 44 | 98 57 | 13 12 | 36 08 | 55 12 | 43 45 | 25 | 5 | 71 06 | 162 06 | 22 06 | 24 52 | 115 08 | 11 01 | 25 |
| 6 | 70 04 | 99 11 | 13 14 | 36 16 | 55 15 | 43 56 | 24 | 6 | 71 14 | 161 38 | 22 10 | 24 57 | 114 31 | 10 51 | 24 |
| 7 | 70 24 | 99 25 | 13 16 | 36 24 | 55 18 | 44 07 | 23 | 7 | 71 22 | 161 10 | 22 14 | 25 02 | 113 54 | 10 42 | 23 |
| 8 | 70 44 | 99 39 | 13 17 | 36 32 | 55 20 | 44 19 | 22 | 8 | 71 30 | 160 42 | 22 18 | 25 07 | 113 17 | 10 32 | 22 |
| 9 | 71 03 | 99 53 | 13 19 | 36 40 | 55 22 | 44 31 | 21 | 9 | 71 38 | 160 14 | 22 22 | 25 12 | 112 40 | 10 23 | 21 |
| 10 | 71 22 | 100 07 | 13 21 | 36 48 | 55 25 | 44 42 | 20 | 10 | 71 46 | 159 46 | 22 27 | 25 18 | 112 01 | 10 14 | 20 |