

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences physiques.
1971/12/20.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

ALGÈBRE. — *Le K_2 des nombres duaux.*

Note (*) de M. WILBERD VAN DER KALLEN, transmise par M. Henri Cartan.

On calcule le quotient du K_2 [de Milnor, voir ⁽²⁾, p. 204-205] des nombres duaux sur k par le K_2 de k , où k est un anneau commutatif. On obtient, dans le cas où $1/2 \in k$, le module des différentielles de k sur \mathbf{Z} .

Soit k un anneau commutatif avec unité. L'anneau $k[T]/T^2$ est appelé l'anneau des nombres duaux sur k . On pose $\varepsilon = T/T^2$.

Il y a des homomorphismes de k -algèbres $u : k \rightarrow k[\varepsilon]$ et $v : k[\varepsilon] \rightarrow k$ tels que $v(\varepsilon) = 0$ et $vu = \text{identité}$.

Cela induit

$$K_2(u) : K_2(k) \rightarrow K_2(k[\varepsilon]) \quad \text{et} \quad K_2(v) : K_2(k[\varepsilon]) \rightarrow K_2(k).$$

Donc $K_2(k[\varepsilon]) \simeq K_2(k) \oplus \ker(K_2(v))$, où $\ker(K_2(v))$ désigne le noyau de $K_2(v)$.

Nous nous proposons de déterminer $\ker(K_2(v))$.

Soit L le k -module libre ayant comme générateurs les symboles Da ($a \in k$). On définit

$$F(a) = D(1+a) - Da.$$

Soit R le sous-module de L engendré par

$$D(ab) - aDb - bDa, \quad D(a+b) - Da - Db - F(ab), \quad F(a+b) - Fa - Fb.$$

Soit $M = L/R$.

THÉORÈME. — $\ker(K_2(v))$ est isomorphe au groupe additif de M .

Avant de donner une esquisse de la démonstration du théorème on établit quelques relations dans M . Par abus de langage on désigne Da/R par Da et Fa/R par Fa .

$$F(c^2 a) = D(ac+c) - D(ac) - Dc = cD(a+1) - cDa = cFa.$$

- (1) $\Rightarrow F(c^2 a) = cFa,$
 (2) $\Rightarrow F(a) = -F(a) = F(-a),$
 (3) $\Rightarrow F(2a) = 0.$

La relation (3) montre le

COROLLAIRE. — Soit $1/2 \in k$. Alors

$$\ker(K_2(v)) \simeq M \simeq \Omega_{k/\mathbf{Z}}^1.$$

[voir ⁽¹⁾, p. 102].

Exemples :

1. $k = \mathbf{Z}$. Alors $M \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

2. k est un corps de caractéristique $\neq 2$. Alors $M \simeq \Omega_{k/\mathbf{Z}}^1$.

3. k est un corps de caractéristique 2. Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ une p -base de k [voir (3), p. 129]. Alors les éléments $D x_i$ et $F(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ forment une base de M (i_1, i_2, \dots, i_n sont n éléments différents de I ; $n \geq 1$).

Cas spécial : Si k est parfait, $M \simeq \Omega_{k/\mathbb{Z}}^1$.

Démonstration du théorème. — La démonstration consiste en deux parties. Dans la première partie [jusqu'au numéro (20)] on prouve que $\ker(K_2(v))$ est un quotient de M . Dans la deuxième partie on prouve l'existence d'un morphisme $\ker(K_2(v)) \rightarrow M$. On peut utiliser la relation (3) pour négliger tous les termes $F(a)$ lorsque $1/2 \in k$. Cela simplifie les vérifications.

NOTATIONS. — $ST(A)$ est le groupe de Steinberg de l'anneau A . Les générateurs sont désignés par $x_{ij}(a)$. On a donc les relations

$$\begin{aligned} (4) \quad & x_{ij}(a) x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b); \\ (5) \quad & (x_{ij}(a), x_{jk}(b)) = x_{ik}(ab) \quad (i \neq k); \\ (6) \quad & (x_{ij}(a), x_{pq}(b)) = 1 \quad (j \neq p, i \neq q), \end{aligned}$$

où $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$.

Si $a \in k$ est inversible, on pose

$$h_{ij}(a) = x_{ij}(a) x_{ji}(-a^{-1}) x_{ij}(a-1) x_{ji}(1) x_{ij}(-1).$$

On se rappelle :

$$h_{ij}(a) x_{pq}(b) h_{ij}^{-1}(a) = x_{pq}(a^r b),$$

où

$$(7) \quad r = \delta_{ip} - \delta_{iq} - \delta_{jp} + \delta_{jq}; \quad \delta = \text{symbole de Kronecker.}$$

Nous considérons $ST(k[\varepsilon])$. On définit

$$f_{ij}(a, b) = (x_{ij}(a\varepsilon), x_{ji}(b\varepsilon))$$

et

$$H_{ij}(a, b) = (x_{ij}(b), x_{ji}(a\varepsilon)) x_{ij}(ab^2\varepsilon) \quad (a, b \in k).$$

Remarquons que $f_{ij}(a, b)$ et $H_{ij}(a, b) h_{ij}^{-1}(1 + ab\varepsilon)$ sont des éléments de $K_2(k[\varepsilon])$. On déduit de (7) :

$$(8) \quad H_{ij}(a, b) x_{pq}(c + d\varepsilon) H_{ij}^{-1}(a, b) = x_{pq}((1 + rab\varepsilon)(c + d\varepsilon)),$$

r comme dans (7).

On a

$$\begin{aligned} f_{ij}(a, b) &= x_{ij}(a\varepsilon) x_{jk}(b) x_{kl}(\varepsilon) x_{jk}(-b) x_{kl}(-\varepsilon) x_{ij}(-a\varepsilon) x_{ji}(-b\varepsilon) \\ &= (x_{ij}(a\varepsilon) x_{jk}(b) x_{ij}(-a\varepsilon)) (x_{ij}(a\varepsilon) x_{kl}(\varepsilon) x_{ij}(-a\varepsilon)) \\ &\quad \times (x_{ij}(a\varepsilon) x_{jk}(-b) x_{ij}(-a\varepsilon)) (x_{ij}(a\varepsilon) x_{kl}(-\varepsilon) x_{ij}(-a\varepsilon)) x_{ji}(-b\varepsilon) \\ &= x_{ik}(ab\varepsilon) x_{jk}(b) x_{kl}(\varepsilon) x_{ik}(-ab\varepsilon) x_{jk}(-b) x_{kl}(-\varepsilon) x_{ji}(-b\varepsilon). \end{aligned}$$

De la même façon, on peut éliminer $x_{jk}(b)$ et $x_{jk}(-b)$; etc.

On trouve

$$(9) \quad f_{ij}(a, b) = f_{ik}(ab, 1).$$

Donc

$$(10) \quad f_{ji}(b, a) = f_{ij}^{-1}(a, b) = f_{ik}^{-1}(ab, 1) = f_{ki}(1, ab).$$

On déduit de (9) et (10) que $f_{ij}(a, b)$ ne dépend pas de i et j mais seulement de ab . On peut donc définir :

$$f(a) = f_{ij}(a, 1).$$

Alors $f_{pq}(a, b) = f(ab)$. On a

$$(11) \quad f(a)f(-b) = f_{ij}(a, 1)f_{ji}(1, -b) = x_{ij}(-b\varepsilon)f(a+b)x_{ij}(b\varepsilon) = f(a+b)$$

donc f est additif et $f(a) = f(-a)$.

De la même façon on trouve des relations entre les H_{ij} :

$$(12) \quad H_{ij}(b, a)H_{ij}(c, a) = f(a^2bc)H_{ij}(b+c, a);$$

$$(13) \quad H_{ij}(a, b+c) = H_{ij}(a, b)H_{ij}(a, c);$$

$$(14) \quad (H_{ij}(a, b), H_{pq}(c, d)) = f(rabcd), \text{ où } r \text{ est comme dans (7);}$$

$$(15) \quad H_{ik}(c, ab) = H_{jk}(ca, b)H_{ij}(cb, a).$$

$$(16) \quad H_{ij}(a, 1)H_{ji}(a, 1) = 1.$$

On définit

$$N_{ij}(a, b) = H_{ij}(a, b)H_{ij}(ab, -1).$$

Remarquons que $N_{ij}(a, b) \in K_2(k[\varepsilon])$, et

$$(17) \quad N_{ki}(c, ab) = N_{ji}(cb, a)N_{kj}(ca, b).$$

On a $N_{ij}(a, 1) = 1$. Donc

$$N_{ki}(c, a) = N_{ji}(c, a) \quad \text{et} \quad N_{ki}(c, b) = N_{kj}(c, b).$$

Donc $N_{ji}(c, a)$ ne dépend pas de j ou de i . On peut donc définir :

$$N(a, b) = N_{ij}(a, b).$$

Alors $N_{pq}(a, b) = N(a, b)$. Et

$$(17') \quad N(c, ab) = N(cb, a)N(ca, b);$$

$$(18) \quad N(a+b, c) = N(a, c)N(b, c);$$

$$(19) \quad N(a, b+c) = N(a, b)N(a, c)f(a^2bc).$$

LEMME. — Les $N(a, b)$ engendrent $\ker(K_2(v))$.

Démonstration. — On peut prouver, par un réarrangement progressif d'une expression en générateurs de $ST(k[\varepsilon])$, que tout $x \in ST(k[\varepsilon])$ est égal, modulo les $N(a, b)$, à (exactement) un élément y de la forme

$$y = \prod_{j < i} x_{ij}(a_{ij}\varepsilon) \cdot \prod_n H_{n, n+1}(b_n, 1) \cdot \prod_{j > i} x_{ij}(a_{ij}\varepsilon) \cdot (ST(u)(z)),$$

où les produits sont finis et les indices n sont mis dans l'ordre naturel ($z \in \text{ST}(k)$). Pour un tel y on a

$$y \in K_2(k[\varepsilon]) \iff y \in K_2(u)(K_2(k)).$$

Cela suffit.

Il y a un homomorphisme de groupes abéliens :

$$\varphi : M \rightarrow \ker(K_2(v)) \text{ donné par } \varphi(a \text{ D } b) = N(a, b).$$

(20) Le lemme montre que φ est surjectif.

Maintenant nous cherchons un $\psi : \ker(K_2(v)) \rightarrow M$.

Soit $T =$ groupe additif des matrices finis de trace 0 sur k .

Soit $G = T \times M$. Nous munissons G d'une structure de groupe :

$$(t_1; m_1)(t_2; m_2) = (t_1 + t_2; m_1 + m_2 + F(\sum_{i < j} (t_1)_{ij}(t_2)_{ji} + (t_1)_{jj}(t_2)_{ii})).$$

Soit $x_{ij}(a) \in \text{ST}(k)$. On définit $\chi(x_{ij}(a)) \in \text{Aut}(G)$ par

$$\begin{aligned} \chi(x_{ij}(a))(t; m) = & (X_{ij}(a)tX_{ij}(-a); m + t_{ji} \text{ D } a \\ & + F(a(t_{ji}t_{ii} + \sum_{k \in \{(i,j)\}} (t_{ki}t_{jk} + t_{ji}t_{kk}))), \end{aligned}$$

où $((i, j)) = \{n \in \mathbf{N} \mid i < n < j \text{ ou } j < n < i\}$,

$$X_{ij}(a) = \text{image de } x_{ij}(a) \text{ dans } \text{SL}(k) = \varinjlim \text{SL}(n, k).$$

Comme les $\chi(x_{ij}(a))$ satisfont aux relations analogues à (4), (5), (6), on peut définir un homomorphisme $\chi : \text{ST}(k) \rightarrow \text{Aut}(G)$.

Soit $S = G \cdot \text{ST}(k)$ le produit semi-direct de $\text{ST}(k)$ et G selon l'action χ . On définit $\psi : \text{ST}(k[\varepsilon]) \rightarrow S$ par

$$\psi(x_{ij}(a + b\varepsilon)) = (be_{ij}; 0) \cdot x_{ij}(a),$$

où $(be_{ij}; 0) \in G$, $be_{ij} \in T$, $e_{ij} =$ matrice dont le coefficient à la place (i, j) est 1 et les autres coefficients sont 0.

La restriction de ψ à $\ker(K_2(v))$ est l'inverse de φ .

C. Q. F. D.

Remarquons que $\psi : \text{ST}(k[\varepsilon]) \xrightarrow{\sim} S$.

(*) Séance du 22 novembre 1971.

(1) M. DEMAZURE et P. GABRIEL, *Groupes algébriques, I*, Masson-North Holland, Paris-Amsterdam, 1970.

(2) R. G. SWAN, *Algebraic K-Theory (Lecture Notes of Mathematics, n° 76, 1968)*.

(3) O. ZARISKI et P. SAMUEL, *Commutative Algebra, I*, Van Nostrand, 1958.

Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit,
Budapestlaan, De Uithof,
Utrecht, Pays-Bas.