۱۰

رسائل

ترجمه و شرح رسالهٔ ابن هیثم دربارهٔ ساعت‌های آفتابی افقی
پویان رضوانی

سال پنجم ـ شمارهٔ دوم
پاییز و زمستان ۱۳۹۵
دوفصلنامهٔ تاریخ علوم و فناوری دورهٔ اسلامی

مقاله‌ها

شمارهٔ استاندارد بین‌المللی
۲۳۲۲-۳۶۶۹

دوفصلنامهٔ تاریخ علوم و فناوری دورهٔ اسلامی

سال پنجم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۵

شمارهٔ پیاپی: ۱۰

صاحب امتیاز: **مرکز پژوهشی میراث مکتوب**
مدیر مسئول: **اکبر ایرانی**
سردبیر: **محمد باقری**
ویراستاران: **غلامحسین صدری افشار، پویان رضوانی**
مدیر داخلی: **حمید بهلول**
اجرای جلد: **محمود خانی**

مدیر فنّی و امور چاپ: **حسین شاملوفرد**

تصویر پشت جلد: نقش ربع ساعتی بر کاشی‌کاری بالای در ورودی رصدخانهٔ کندیللی (استانبول).

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شمارهٔ ۱۱۸۲، طبقهٔ چهارم، شمارهٔ ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹-۱۳۱۵۶ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۲۰٫۰۰۰ تومان

تعریف نسبت بر پایهٔ تفریق دو سویه[۱] در ریاضیات دورهٔ اسلامی[۲]

یان پ. هوخندایک[۳]
ترجمهٔ محمد مهدی کاوه یزدی[۴]

ماهانی (۲۱۰- ۲۷۵ ق) و عمر خیام (۴۳۹ - ۵۲۶ق) تعریف نسبت‌های مساوی و بزرگتر بر اساس تفریق دو سویه را بر تعریفی که اقلیدس در مقالهٔ پنجم اصول عرضه کرده است ترجیح داده‌اند. نیریزی حدود (۲۶۵ق) هم به این تعریف توجه داشته است. در این مقاله کارهای این سه ریاضیدان دورهٔ اسلامی را در مورد تعریف نسبت بر پایهٔ تفریق دو سویه به اختصار بیان و مقایسه می‌کنم.

مقدمه

یکی از بخش‌های دشوار اصول اقلیدس نظریهٔ نسبت و تناسب کمیت‌های عام در مقالهٔ پنجم است. این نظریه را ائودوکسوس که در حدود ۳۵۰ق م، نیم قرن قبل از اقلیدس، می‌زیست، ابداع کرد. در ۱۹۳۳م اسکار بکر ادعا کرد که ریاضیدانان یونانی پیش از ائودوکسوس از نظریه‌ای در مورد نسبت بر مبنای روش تفریق دو سویه که در زیر توصیف خواهد شد، و از لحاظ ریاضی با نظریهٔ نوین کسرهای مسلسل ارتباط دارد، استفاده می‌کرده‌اند. این نظریهٔ تفریق دو سویه در کتاب ریاضیات آکادمی افلاطون تألیف فولر بازسازی شده است. در یک تحلیل نو، ویتراک نشان داد که شواهد خیلی محدود یونانی نمی‌توانند اثبات کنند که نظریهٔ تفریق دو سویه برای کمیت‌های عام در ریاضیات یونانی وجود داشته است.

---

۱. anthyphairetic که رشدی راشد آن را «الطرح بالتناوب» یا «الفصل بالتناوب» به معنی «تفریق پیاپی» معنی کرده است (رشدی راشد، ۲۰۰۵، ص ۲۵۵).

۲. این مقاله ترجمه‌ای است از:

Anthyphairetic Ratio Theory in Medieval Islamic Mathematics, in: Yvonne Dold-Samplonius et al., ed., *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2002, Boethius Band 46, pp. 187-202.

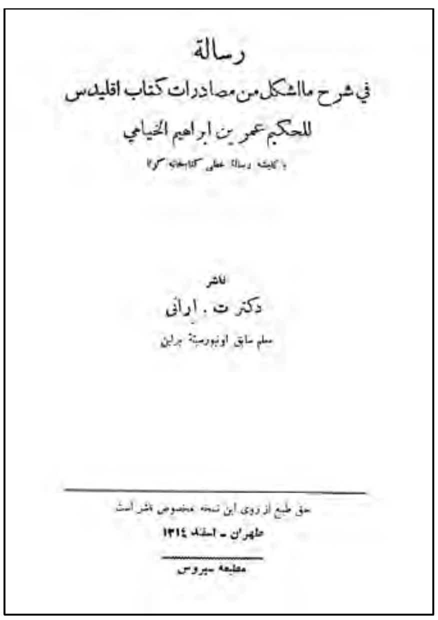
۳. استاد تاریخ علم دانشگاه اوترخت هلند، hogendijk@uu.nl

۴. کارشناس ارشد تاریخ علم و دبیر ریاضیات، mahkavyzd@yahoo.com

اصول اقلیدس چندین بار به عربی ترجمه، و به‌زودی یکی از متون اصلی ریاضی در سنت دورهٔ اسلامی شد. شرح‌های زیادی بر مقالهٔ پنجم اصول نوشته شده و اگرچه بیشتر شارحان دورهٔ اسلامی از نظریهٔ ائودوکسوس، که اقلیدس عرضه کرده است پیروی کرده‌اند، دست کم سه ریاضیدان تعریف بر پایهٔ تفریق دو سویه برای نسبت مساوی و بزرگتر را، از تعریف اقلیدس صحیح‌تر دانسته‌اند. من در مورد سه متن راجع به نظریهٔ تفریق دو سویه برای تعریف نسبت بحث خواهم کرد:

۱.رسالة في المشكل من النسبة تألیف ابوعبداللّه ماهانی. او در حدود ۲۴۵ق رصدهای نجومی‌ای در بغداد انجام داده و اهل ماهان کرمان بوده است. این اثر ماهانی را قبلاً ای. ب. پلویی، مورخ علم اهل آلمان، در ۱۹۵۰م از روی نسخهٔ خطی تقریباً ناخوانای رسالهٔ ماهانی در پاریس مطالعه کرده است. پلوی چند تعریف را خلاصه کرده ولی به مطالب دیگر موجود در متن اشاره‌ای نکرده است. رسالهٔ ماهانی از نظر تاریخی جالب است، زیرا کهن‌ترین متن ریاضی موجود در نظریهٔ تفریق دو سویه برای نسبت است. من تصحیح و ترجمه‌ای از این متن دشوار آماده کرده‌ام. در مقالهٔ حاضر متن مقاله را به‌اختصار بیان خواهم کرد و در مورد برخی بخش‌های ریاضی جالب آن، یعنی تعریف ماهانی از نسبت بزرگتر بر پایهٔ تفریق دو سویه و یکی از قضیه‌های مرتبط با این مفهوم، شرح بیشتری خواهم داد.

۲. شرح مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس تألیف ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی. او حدود ۲۶۵ق در شرق جهان اسلام زندگی می‌کرد و اهل نیریز فارس بود. متن عربی این قسمت از شرح با ترجمهٔ لاتینی آن طی مقاله‌ای از گوستاو یونگه و دیگران در ۱۹۳۲منتشر شده است.


رسالة
في شرح ما اشكل من مصادرات كتاب اقليدس
للحكيم عمر بن ابراهيم الخيامي
با کلیشه رسالهٔ خطی کتابخانهٔ گوتا

ناشر
دکتر ت . ارانی
معلم سابق اونیورسیتهٔ برلین

حق طبع از روی این نسخه مخصوص ناشر است
طهران ـ اسفند ۱۳۱٤
مطبعه سیروس

۳. رسالة في شرح ما اشكل من مصادرات اقلیدس تألیف عمر خیام (۴۲۰ ـ ۵۳۶ق). این رساله در سه بخش است و بخش دوم آن در بارهٔ نظریهٔ تفریق دو سویه برای نسبت است. متن عربی رساله را تقی ارانی (۱۳۱۴ش)، عبدالحمید ابراهیم صبره (۱۳۴۰ش / ۱۹۶۱م)، جلال همایی (۱۳۴۶ش)، رحیم رضازاده ملک (۱۳۷۷ش) و بیژن وهاب‌زاده (۱۳۷۸ش / ۱۹۹۹م) منتشر کرده‌اند این رساله را علیرضا امیر معز (۱۹۵۹م) به انگلیسی و احمد جبار (۱۹۹۷ و ۲۰۰۲م) و بیژن وهاب‌زاده (۱۹۹۹م) به فرانسوی ترجمه کرده‌اند.

ترجمهٔ فارسی آن در خیامی نامهٔ همایی و دانشنامهٔ خیامی رضازاده ملک آمده است. ترجمهٔ روسی آن در مجموعهٔ رسالات خیام توسط روزنفلـد (مسـکو، ۱۹۶۲، ص۱۱۳-۱۴۵) بـه همـراه عکـس نسخهٔ لیدن (ص۵۳-۵۷) منتشر شده است.

اثر دیگری که باید در اینجا ذکر شود شرح مصادرات اقلیدس تألیف ابن هیثم (۳۵۴- ۴۳۰ق) است. چاپ عکسی نسخهٔ خطی این اثر با مقدمه‌ای از ماتیاس شرام عرضه شده است. ابن هیثم در این متن ادعا می‌کند که تعریف نسبت مساوی و بزرگتر در کتاب اصول «درسـت» نیسـت، امـا در مورد نظریهٔ تفریق دو سویه بحثی نمی‌کند.

چنان که خواهیم دید، شیوهٔ ماهانی پیچیده‌تر و به لحاظ ریاضی فراتر از بحث‌هـای نیریـزی و خیام است. در بخش بعد فرضی را مطرح می‌کنم مبنی بر این که اثبات‌های ماهانی نهایتـاً از یـک نوشتهٔ یونانی، که به جا نمانده، گرفته شده است. اگر این فرض درست باشد، نتیجه خواهیم گرفت که نظریهٔ تفریق دو سویهٔ کمیت‌های عام در ریاضیات یونانی وجود داشته است.

نظریهٔ تفریق دو سویه برای نسبت‌ها در ریاضیات یونانی

روش تفریق دو سویه با نام یونانی آنتی فایرسیس[1] روشی است که اقلیدس در یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب م م) دو عدد صحیح a_1 و a_2 به کار برد. این روش چنـین اسـت (نـک: اصـول، مقالهٔ هفتم، قضیه‌های ۱ و ۲): فرض کنید $a_1 > a_2$. اگر a_2 عدد a_1 را بشمارد، ب م م آن‌هـا a_2 است. اگر a_2 عدد a_1 را نشمارد، a_2 را از a_1 چندین بار کم می‌کنیم تا آن که باقی‌ماندهٔ a_3 کمتر از a_2 شود. اگر a_3 عدد a_2 را بشمارد، ب م م، a_3 است. اگر a_3 عدد a_2 را نشـمارد، a_3 را از عدد a_2 چندین بار کم می‌کنیم تـا آنکـه باقی‌مانـدهٔ a_4 کمتـر از a_3 شـود و ایـن رونـد را ادامـه می‌دهیم. در نهایت عددی صحیح مانند a_n پیدا می‌کنیم که a_{n-1} را می‌شمارد. این عدد a_n، ب م م دو عدد a_1 و a_2 است. در قضایای ۲ و ۳ مقالهٔ دهم اصول، اقلیدس از همین فرآینـد بـرای دو کمیت هم جنس a_1 و a_2 استفاده می‌کند. دو امکان وجود دارد: اگر a_1 و a_2 متوافق باشـند، بـه ازای مقداری از n کمیتی مانند a_n که a_{n-1} را بشمارد پیدا خواهیم کرد، بدین معنـی کـه a_{n-1} مضرب صحیح از a_n است. در این مرحله، کار به پایان می‌رسد و a_n بزرگترین عامل مشترک a_1 و a_2 است. اگر a_1 و a_2 عامل مشترکی نداشته باشند، فرایند هرگز پایان نمی‌پذیرد.

اسکار بکر در مقالهٔ «تفسیری بر نظریهٔ نسبت‌ها و دیگر جزئیات آن‌هـا در آثـار ارسـطو و اقلیـدس» بحث می‌کند که فرآیند تفریق دو سویه اساس نظریه‌ای در مورد نسبت‌ها بـوده کـه قبـل از ائودوکسـوس (حدود ۳۵۰ ق م) ابداع شده بود. مشابه نظریهٔ ائودوکسوس، نظریهٔ تفریق دو سویه برای نسبت می‌تواند

1. anthyphairesis

برای نسبت‌های گویا و گنگ مورد استفاده قرار گیرد. مهم‌ترین مدرک بکر تعریفی عرضه شده به‌وسیلهٔ «هندسه‌دانان عهد باستان» است که الکساندر افرودیسی[1] در شرحی بر کتاب الجدل[2] ارسطو ذکر کرده است. این تعریف می‌گوید دو نسبت مساوی هستند اگر در تفریق دو سویه نتیجه‌های یکسان داشته باشند.[3] بکر تعریف را به صورتی که با نمادهای امروزی به شرح زیر است، تفسیر کرده است:

فرض کنید دو نسبت $a_1 : a_2$ و $b_1 : b_2$ داریم که a_1 و a_2 و b_1 و b_2 دو جفت کمیت هم‌جنس هستند. تفریق‌های دو سویهٔ هر جفت را تشکیل می‌دهیم: فرض کنید $a_1 = k_1 a_2 + a_3$ که $a_2 > a_3 > 0$ و k_1 عددی صحیح است؛ $a_2 = k_2 a_3 + a_4$ که $a_3 > a_4 > 0$ و k_2 عددی صحیح است، الی آخر؛ این فرآیند اگر $a_n = k_n a_{n+1}$، برای عدد صحیحی مانند k_n، متوقف می‌شود؛ و فرض کنید $b_1 = k'_1 b_2 + b_3$ که $b_2 > b_3 > 0$ و k'_1 عددی صحیح باشد؛ $b_2 = k'_2 b_3 + b_4$ که $b_3 > b_4 > 0$ و k'_2 عددی صحیح باشد، الی آخر؛ این فرآیند اگر $b_{n'} = k'_{n'} b_{n'+1}$، برای عدد صحیحی مانند $k'_{n'}$، متوقف می‌شود. اکنون $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ اگر (۱) دو فرآیند برای همیشه ادامه یابند یا بعد از تعداد مراحل یکسانی ($n = n'$) متوقف شوند و (۲) برای هر i ی که k_i و k'_i تعریف شده باشند، داشته باشیم: $k_i = k'_i$.

ضرایب k_i و k'_i در بسط کسرهای مسلسل اعداد حقیقی $\frac{a_1}{a_2}$ و $\frac{b_1}{b_2}$ به ترتیب به صورت:

$$\frac{a_1}{a_2} = k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots} \quad \text{و} \quad \frac{b_1}{b_2} = k'_1 + \frac{1}{k'_2 + \dots}$$

ظاهر می‌شوند.

فولر نشان داده است تفسیر تفریق دو سویه بر اساس بسط کسرهای مسلسل از لحاظ تاریخی گمراه کننده است، زیرا یونانیان باستان تفریق دو سویه را فرایندی از نوع تفریق می‌پنداشتند، در حالی که کسرهای مسلسل نتیجهٔ فرایند تقسیم هستند.[4] من هم می‌گویم مفهوم نوین عدد حقیقی (به صورت $\frac{a_1}{a_2}$) در ریاضیات یونان باستان و دورهٔ اسلامی به کار نمی‌رفت. به جای «عدد حقیقی» $\frac{a_1}{a_2}$، ریاضیدانان با نسبت $a_1 : a_2$ بین دو کمیت a_1 و a_2 سروکار داشتند. من گاهی از علامتی همچون $\frac{a_1}{a_2} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ برای مسلسل مختوم به k_n و از علامت $\frac{a_1}{a_2} = [k_1, k_2, \dots]$ برای کسر مسلسل دارای بیش از دو ضریب k_1 و k_2، استفاده خواهم کرد.

1. Alexander of Aphrodisias.
2. *Topica*.
3. Becker, 1933a, p. 312.
4. Fowler, 1999, 30, 313 (n. 13), 366.

در این نمادگذاری، $[k_1,k_2,\ldots]$ یا با k_n ی خاتمه می‌یابد (که در این صورت $\frac{a_1}{a_2}$ عددی گویاست و $k_n > 1$) یا تا بینهایت ادامه می‌یابد (در این صورت $\frac{a_1}{a_2}$ عددی گنگ است).

اقلیدس در مقالهٔ پنجم اصول، نظریهٔ نسبت‌ها را، که به‌وسیلهٔ ائودوکسوس کشف و بر اساس تعریف زیر بنا شده است، عرضه می‌کند:

$a:b=c:d$ اگر برای همهٔ جفت‌های اعداد صحیح ma، mc، nb و nd داشته باشیم:

$$ma<nb \Leftrightarrow mc<nd \ ،\ ma=nb \Leftrightarrow mc=nd \ ،\ ma>nb \Leftrightarrow mc>nd$$

از این به بعد از علامت $a:b\overset{A}{=}c:d$ برای تعریف بر پایهٔ تفریق دو سویه و $a:b\overset{E}{=}c:d$ برای تعریف ائودوکسوس که اقلیدس در مقالهٔ پنجم اصول آورده است، استفاده می‌کنم. مدارک یونانی برای نظریهٔ قدیمی‌تر، چنانکه در فهرست زیر نیز دیده می‌شود، بسیار محدود است:

- بکر[1] می‌گوید که اثبات‌هایی بر پایهٔ تفریق دو سویه از قضیه‌هایی به صورت

$$a:b\overset{A}{=}c:d \Rightarrow a:c\overset{A}{=}b:d$$

برای انواع مختلف کمیت‌های a، b، c و d وجود داشته است، اما اطلاعی از نحوهٔ اثبات این موارد و قضیه‌های دیگر در نظریهٔ تفریق دو سویه نداریم؛

- ائودوکسوس تعریفی برای نسبت بزرگتر[2] دارد، یعنی $a:b>c:d$ اگر برای مضرب‌های ma، mc، nb و nd داشته باشیم: $ma>nb$ و $mc\leq nd$. از این پس علامت $a:b\overset{E}{>}c:d$ را برای این تعریف به کار می‌برم. در متون قدیم هیچ اثری از تعریف $a:b\overset{A}{>}c:d$ برای نظریهٔ تفریق دو سویه نیست. با تلاش برای نگارش تعریف بازسازی شدهٔ بکر متوجه می‌شویم که این تعریف بدیهی نیست:[3] بسط‌های کسر مسلسل $\frac{a}{b}=[k_1,k_2,\ldots]$ و $\frac{c}{d}=[k'_1,k'_2,\ldots]$ را در نظر بگیرید. در این صورت $a:b\overset{A}{>}c:d$ اگر $k_1>k'_1$ یا $k_1=k'_1$ و $k_2<k'_2$ یا به‌طور کلی $k_1=k'_1$، $k_2=k'_2$، ...، $k_{i-1}=k'_{i-1}$ و $k_i>k'_i$ اگر i فرد باشد و $k_i<k'_i$ اگر i زوج باشد. بررسی بیشتر حالتی را که در آن یکی از کسرهای مسلسل در مقداری چون k_n پایان یابد به خواننده واگذار می‌کنم. ریاضیدانان دورهٔ اسلامی نمادگذاری امروزی را نداشتند و این که k_i و

1. Becker, 1933a, pp. 329- 330.

۲. تعریف شمارهٔ ۷ در مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس

3. Becker, 1933a, p. 317.

k_i' با انجام تفریق‌های دو سویه به ترتیب در زوج‌های (a,b) و (c,d) پیدا می‌شوند کار تعریف را برای آن‌ها پیچیده می‌کرد. تعریف ماهانی در مقایسه با تعریف پخته‌تر (و نه کاملاً جامع) خیام کوتاه‌تر است.

- معادل بودن تعریف‌ها با روش‌های باستانی قابل اثبات بود و اگر نظریهٔ تفریق دو سویه برای کمیت‌های عام در یونان وجود داشت، طبیعی بود که هندسه‌دانان (یا مفسران اصول) علاقمند باشند که ثابت کنند:

$$a:b\overset{E}{>}c:d \Rightarrow a:b\overset{A}{>}c:d \text{ و } a:b\overset{A}{=}c:d \Leftrightarrow a:b\overset{E}{=}c:d$$

اثری از چنین اثبات‌هایی در متون یونانی پیدا نشده است.

چکیدهٔ رسالهٔ ماهانی

ماهانی با مقدمه‌ای که در زیر می‌آید شروع می‌کند. او سپس دو تعریف متفاوت (اما معادل) از $a:b\overset{A}{=}c:d$ عرضه می‌کند. پلویی[1] مقدمه و این تعاریف را نقل کرده، ولی در بارهٔ بقیهٔ رسالهٔ ماهانی چیزی نگفته است. ماهانی سپس $a:b\overset{A}{>}c:d$ را تعریف می‌کند (بخش بعد را ببینید) و به خواننده می‌گوید که از قضیه‌های ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶ مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس استفاده خواهد کرد. این قضیه‌ها در بارهٔ مضرب‌های کمیت‌ها هستند و متکی بر تعاریف $a:b\overset{E}{=}c:d$ و $a:b\overset{A}{>}c:d$ نیستند.

ماهانی سپس چهار قضیهٔ زیر را اثبات می‌کند:

۱. $a:b\overset{E}{=}c:d \Rightarrow a:b\overset{A}{=}c:d$

۲. $a:b\overset{E}{>}c:d \Rightarrow a:b\overset{A}{>}c:d$

۳. $a:b\overset{A}{=}c:d \Rightarrow a:b\overset{E}{=}c:d$ و $a:b\overset{A}{>}c:d \Rightarrow a:b\overset{E}{>}c:d$. اثبات‌ها در قضیهٔ ۳ مبتنی بر برهان خلف هستند.

۴. اثبات دیگری برای $a:b\overset{A}{>}c:d \Rightarrow a:b\overset{E}{>}c:d$، با عرضهٔ صریح اعداد m و n چنان که $ma > nb$ و $mc \leq nd$. رساله با عرضهٔ این اعداد پایان می‌یابد.

ماهانی در مقدمه‌اش می‌گوید:

1. Plooij, 1950, pp. 50- 51.

«این است آنچه در آغاز، در بـارهٔ نسـبت کمیت‌هـا و تناسبشـان یـافتم و در اثبـات مضرب‌هایی به‌کار بردم که اقلیدس آن‌ها را در کمیت‌هایی که دارای نسبت یکسانند یا نسبت بزرگ‌تر دارند، در آغاز مقالهٔ پنجم به‌کار برده است. در آنجـا (آغـاز مقالـهٔ پنجم) ثابت بن قره نوشته است که علم نسبت به کمیت‌ها و تناسب آن‌ها بر اسـاس قواعد، چیزی است که انسان می‌تواند آن را از طریق شناخت نسبت به روش عددی و سپس از طریق قضایایی که در آغاز مقالهٔ دهم آمده است، به‌دست آورد.»[۱]

مقدمه نشان می‌دهد که ماهانی تعاریف نسبت مساوی یا بزرگتر بر پایهٔ تفریـق دو سـویه را بـر تعاریف اقلیدسی ترجیح می‌داد و معتقد بود که خاصیت‌های مذکور در تعـاریف اقلیدسـی بایـد اثبات شوند. ثابت بن قره (۲۲۱– ۲۸۸ ق) مقالات پنجم تا هفتم مخروطات آپولونیوس را از یونانی به عربی ترجمه و ترجمهٔ حنین بن اسحاق از اصول اقلیدس را هم اصلاح کرد.[۲] قضایای آغاز مقالهٔ دهم اصول که در بالا ذکر شده‌اند قضیه‌های ۲ و ۳ هستند. ظاهراً ثابت نیز از نظریهٔ تفریق دو سویه در نسبت‌ها آگاه بود.

ماهانی مشخص نمی‌کند که آیا مندرجات رساله ابداع خود اوست یا نه. واژهٔ عربی «وَجَدتُ» لزوماً به معنی ابداع نیست و به این معنی هم می‌تواند باشد که او اثبات‌ها را در منبعی یافته است. چنان که بعداً نشان خواهم داد، معتقدم عبارات اثبات از ماهانی است، امـا او مطالـب را از منبـع دیگری، شاید ترجمهٔ عربی اثری یونانی گرفته است. تا آنجا که می‌دانم هیچ مدرکی دال بـر اینکـه ماهانی یونانی می‌دانست، وجود ندارد.

تعریف‌های ماهانی از نسبت مساوی و بزرگتر بر پایهٔ تفریق دو سویه

دو تعریف ماهانی از $a : b \overset{A}{=} c : d$ با صورت بازسازی شدهٔ بکر از نظریهٔ باسـتانی مرتبطنـد. مـن تعریف اخیر ماهانی را در اینجا نقل می‌کنم تا خواننده با اصطلاحات آشنا شود. ماهانی می‌گوید:

«کمیت‌های با نسبت یکسان،کمیت‌هایی با خاصیت زیر هستند: اگر اولی و سومی به‌وسیلهٔ دومی یا چهارمی یا به‌عکس، شمرده شوند، به تعداد دفعات مساوی شمرده می‌شوند، و اگر دو باقی‌ماندهٔ کوچکتر از دو کمیت کـوچکتر بمانـد، و دو کمیـت

---

۱. متن عربی:
«هذا ما كنت وجدته أوّلاً في نسبة المقادير وتناسبها وعملت عليه في برهان الأضعاف الّتي عمل عليها أقليدس فـي المقـادير الّتـي نسـبتها واحدة وفي الأعظم نسبة في صدر المقالة الخامسة عند ما كان ثابت بن قرّة كتب به من أن العلم بنسبة المقادير وتناسـبها علـى الأحكـام شيء يمكن للإنسان أن يقف عليه من قبل المعرفة بالنسبة على السبيل العددية ثمّ من الأشكال الّتي في أوّل المقالة العاشرة».

۲. نک: مقالهٔ ثابت بن قره در کتاب تاریخ نگارش‌های عربی (Sezgin, 1974, pp. 264- 272).

کوچکتر به‌وسیلهٔ آن‌ها شمرده شوند، به تعداد دفعات یکسانی شمرده می‌شوند و این کار تا بینهایت ادامه می‌یابد».[۱]

این مطلب با نمادگذاری بخش قبلی این مقاله بـه ایـن معنـی اسـت کـه: $a_1 : a_2 \overset{A}{=} b_1 : b_2$ و $a_2 : a_1 \overset{A}{=} b_2 : b_1$ اگر $k_1 = k'_1$ و $k_2 = k'_2$ الی آخر (هر بـار بـه تعـداد دفعـات یکسـان شـمرده شوند).

در همهٔ نسخه‌های خطی رسالهٔ ماهانی که دیده‌ام یک یا چند اشـتباه جـدی کاتـب در تعریـف $a : b \overset{A}{>} c : d$ وجود دارد. آنچه در اینجا بـه‌عنوان «تعریـف ماهـانی» عرضـه مـی‌کـنم، بازسـازی آزمایشی من از متن بر اساس این فرض است که تعریـف $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$ در رسـالهٔ ماهـانی در شکل اصلی آن با روشی که در قضیه‌های ۲، ۳ و ۴ در متن خود به کار برده سازگار است. بر همین اساس اصلاحاتی را در بخش‌های دیگر ویراستی که از متن تهیه کرده‌ام انجام داده‌ام.

این تعریف بازسازی شدهٔ من است. ماهانی می‌گوید:

«اندر نسبت بزرگ‌تر بودن: گفته می‌شود نسبت (کمیت) اولی بـه دومـی بزرگتـر از نسبت سومی به چهارمی است، اگر اولی، یا یک باقی‌ماندهٔ آن، که کمتـر از دومـی نیست، یا یک باقی‌ماندهٔ دومی، متناظر با باقی‌ماندهٔ اولی، بیشتر باشد از دومـی یـا یک باقی‌ماندهٔ آن، متناظر با باقی‌مانـدهٔ (کمیـت) اولـی؛ هرکدامشـان از (کمیـت) متناظر با آن (بیشتر باشد)؛ اما کمیت سوم، یا یک باقی‌مانـده‌اش، از همـان مرتبـهٔ باقی‌ماندهٔ اولی، و از همان مرتبهٔ باقی‌ماندهٔ دومی، بیشتر از (کمیت) چهارم یا یـک باقی‌ماندهٔ کمیت چهارم از مرتبهٔ باقی‌ماندهٔ دوم نباشد».[۲]

توضیح زیر را در مورد تعریف به چند مرحله تقسیم کرده‌ام تا مطابق بحـثم در قضـیهٔ ۲ بخـش بعدی باشد. به همـین علـت از نمادگـذاری $a_2 : a_1$ و $b_2 : b_1$ بـرای دو نسـبت اسـتفاده کـرده‌ام،

---

۱. متن عربی:

«المقادير الّتي نسبتها واحدة، هي الّتي إذا قدر الأوّل وثّالث بالثّاني والرّابع أو بالعكس كانت مرّات تقديرهما متساوية وإن فضل منهما مقداران أقلّ من الأصغرين وقدر الأصغران بهما كانت أيضاً مرّات هذا التقدير متساوية وهكذا إلى ما لا نهاية له».

۲. متن عربی:

«في الأعظم نسبة: يقال أنّ نسبة الأوّل إلى الثّاني أعظم من نسبة الثّالث إلى الرّابع متى كان الأوّل أو فضل باق منه ليس بأصغر من الثّاني أو فضل يبقى من الثّاني نظير للفضل الباقي من الأوّل يزيد على الثّاني أو على فضل باقٍ منه نظير للفضل الباقي من الأوّل أيهما كان على نظيره، و كان الثّالث أو فضل يبقى منه في مرتبة الفضل الّذي يبقى من الأوّل في مثل مرتبة الفضل الباقي من الثّاني (لا) يزيد على الرّابع أو على فضل يبقى من الرّابع في مرتبة الفضل الباقي من الثّاني».

گرچه نامیدن کمیت‌های اول، دوم، سوم و چهارم ماهانی به ترتیب با a_2، a_1، b_2 و b_1 سردرگم کننده است.

مرحلهٔ صفر: در دو حالت زیر (که همپوشانی هم دارند) داریم $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$:

- $a_2 \ge a_1$ و $b_2 < b_1$،
- $a_2 > a_1$ و $b_2 \le b_1$.

ماهانی در تعریف، فقط به دومین حالت اشاره می‌کند. با اصلاحات بیشتر در متن تعریف، می‌توان آن را شامل اولین حالت نیز کرد. این اصلاحات لازم نیست، اگر ماهانی تلویحاً فرض کرده باشد که:

$$a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1 \Leftrightarrow b_1 : b_2 \overset{A}{>} a_1 : a_2$$

مرحلهٔ یک: اگر $a_2 < a_1$ و $b_2 < b_1$، عددی صحیح مانند $k_1 \ge 1$ وجود دارد چنان که $a_1 = k_1 a_2 + a_3$ و $b_1 = k_1 b_2 + b_3$، وضمناً یا $0 < a_3 \le a_2$ یا $0 < b_3 \le b_2$ یا هر دو. ماهانی a_3 و b_3 را «باقی‌مانده»های a_1 و b_1 می‌نامد.

در دو حالت (که همپوشانی هم دارند) داریم $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$:

- $a_2 \ge a_3$ و $b_2 < b_3$،
- $a_2 > a_3$ و $b_2 \le b_3$.

مرحلهٔ دو: اگر $a_3 < a_2$ و $b_3 < b_2$، به همان روش ادامه می‌دهیم: عددی صحیح مانند $k_2 \ge 1$ وجود دارد چنان که $a_2 = k_2 a_3 + a_4$ و $b_2 = k_2 b_3 + b_4$ وضمناً یا $0 < a_4 \le a_3$ یا $0 < b_4 \le b_3$ یا هر دو. ماهانی a_4 و b_4 را باقی‌مانده‌های a_2 و b_2 می‌نامد.

در دو حالت (که همپوشانی هم دارند) داریم $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$:

- $a_4 \ge a_3$ و $b_4 < b_3$،
- $a_4 > a_3$ و $b_4 \le b_3$.

اگر $a_4 < a_3$ و $b_4 < b_3$، مرحلهٔ سه را مشابه با مرحلهٔ یک، پیش می‌بریم، الی آخر. به‌طور کلی، ماهانی a_{2n+1} و b_{2n+1} را باقی‌مانده‌های a_1 و b_1 و a_{2n} و b_{2n} را باقی‌مانده‌های a_2 و b_2 می‌نامد.

توجه کنید که:

$$a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1 \Leftrightarrow a_2 : a_3 \overset{A}{>} b_2 : b_3 \Leftrightarrow a_4 : a_3 \overset{A}{>} b_4 : b_3$$

الی آخر.

تعریف ماهانی بر پایهٔ تفریق دو سویه است، اما در تعریفش تفریق‌ها در دو جفت کمیت همزمان انجام می‌شود. بنابراین اگر $a_2 < a_1$ و $b_2 < b_1$، ماهانی چندین بار a_2 را از a_1 و b_2 را از b_1 کم می‌کند و به‌محض اینکه یکی از باقی‌مانده‌های a_3 یا b_3 در نامساوی $a_3 \leq a_2$ یا $b_3 \leq b_2$ صدق کند، توقف می‌کند. در تعریف وی از $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$، باقی‌مانده‌ها همیشه مثبت هستند، اگر چه او در تعریفش از $a_2 : a_1 \overset{A}{=} b_2 : b_1$ این امکان را که باقی‌مانده‌ای وجود نداشته باشد (با نماد امروزین $a_3 = 0$) نیز در نظر می‌گیرد. تحقیق این که تعریف ماهانی از $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$ از لحاظ ریاضی معادل با تعریف بازسازی شدهٔ بکر است، را به خواننده واگذار می‌کنم.

ماهانی تعریف صریحی از $a_2 : a_1 \overset{A}{<} b_2 : b_1$ عرضه نمی‌کند. اما جای دیگری در متنش تلویحاً فرض می‌کند که: $a_2 : a_1 \overset{A}{<} b_2 : b_1 \Leftrightarrow b_2 : b_1 \overset{A}{>} a_2 : a_1$. حال می‌توانیم تعریفش را از $a_2 : a_1 \overset{A}{<} b_2 : b_1$ با جابجایی a_i و b_i در بحث بالا نتیجه بگیریم. پس می‌توان اثبات کرد که برای دو جفت دلخواه کمیت‌های هم جنس a_2، a_1 و b_2، b_1، خواهیم داشت: $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$ یا $a_2 : a_1 \overset{A}{<} b_2 : b_1$ یا $a_2 : a_1 \overset{A}{=} b_2 : b_1$. ماهانی این خاصیت را در متنش فرض می‌کند، اما برهانی برای آن عرضه نمی‌کند. شاید او آن را بدیهی یا به‌عنوان یک اصل موضوع فرض کرده باشد. طبق نظر خیام در رساله‌اش، که در مورد آن بعداً بحث خواهم کرد، این خاصیت یک اصل موضوع است.

در قضیهٔ ۲ ماهانی فرض می‌کند که $a_2 : a_1 \overset{E}{>} b_2 : b_1$. پس اعداد صحیح m و n وجود دارند چنان که:

$na_2 > ma_1$ و $nb_2 \leq mb_1$

او می‌خواهد ثابت کند: $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$.

با نمادهای امروزین، اثبات ماهانی، با تصحیح همهٔ خطاها و افتادگی‌ها، به صورت فشردهٔ زیر در می‌آید:

مرحلهٔ صفر: ماهانی فرض می‌کند $n > m$. بنابراین $b_2 < b_1$. اگر $a_2 \geq a_1$، بنا بر مرحلهٔ صفر تعریف ماهانی داریم: $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$.

مرحلهٔ یک: اگر $n > m$، $a_2 < a_1$ و $b_2 < b_1$، اولین خارج قسمت k_1 را در بسط کسر

مسلسل $\frac{a_1}{a_2}=[k_1,...]$، در نظر می‌گیریم. اگر k_1 برابر با اولین خارج قسمت در بسط دو کسر مسلسل $\frac{n}{m}$ و $\frac{b_1}{b_2}$ نباشد، یا اگر $a_1=k_1a_2$، به‌سادگی می‌توانیم به کمک مرحلهٔ یک تعریف نشان دهیم که $a_2:a_1 \overset{A}{>} b_2:b_1$.

در تمام حالات دیگر داریم:

$n'a_2>ma_3$ و $n'b_2\leq mb_3$

زیرا $n'=n-mk_1$، $a_3=a_1-k_1a_2$، $b_3=b_1-k_1b_2$ که در آن‌ها $0<n'<m$، $0<a_3<a_2$، $0<b_3<b_2$.

مرحلهٔ دو: اکنون اولین خارج قسمت k_2 را در بسط کسر مسلسل $\frac{b_2}{b_3}$، در نظر می‌گیریم. اگر k_2 برابر با اولین خارج قسمت در بسط دو کسر مسلسل $\frac{m}{n'}$ و $\frac{a_2}{a_3}$ نباشد، یا اگر $b_2=k_2b_3$، به‌سادگی می‌توانیم به کمک مرحلهٔ دوم تعریف نشان دهیم که $a_2:a_1 \overset{A}{>} b_2:b_1$. در تمام حالات دیگر داریم:

$n'a_4>m'a_3$ و $n'b_4\leq m'b_3$

زیرا $m'=m-n'k_2$، $a_4=a_2-k_2a_3$، $b_4=b_2-k_2b_3$ که در آن‌ها $0<m'<n'$، $0<a_4<a_3$، $0<b_4<b_3$.

اگر این فرآیند را ادامه دهیم، سرانجام متوقف خواهد شد، زیرا اعداد صحیح n، m، n'، m' و... نزولی‌اند.

ماهانی به خواننده نمی‌گوید که اگر فرآیند در مرحلهٔ دوم متوقف نشد دقیقاً، چه کار باید کرد. در این حالت باید مرحلهٔ یک را با a_4، a_3، b_4، b_3، n'، m' به جای a_2، a_1، b_2، b_1، n، m تکرار کرد. ماهانی روش کار را برای حالتی که در ابتدا $m>n$، ذکر نکرده است. در این حالت، می‌توان مستقیماً مطابق مرحلهٔ دو با $n'=n$ و $a_3=a_1$ عمل کرد. این جاگذاری‌ها با نمادهای امروزین آسان هستند، اما برای هندسه‌دانی از یونان باستان یا دورهٔ اسلامی به هیچ وجه واضح نبوده‌اند.

البته خطاهای ریاضی در همهٔ نسخه‌های موجود رسالهٔ ماهانی را می‌توان تصحیح کرد، اما آن خطاها را نمی‌توان خطاهای عادی کاتبان دانست. پس به‌احتمال زیاد، خطاها در متن اصلی نوشتهٔ ماهانی بوده است.

در قضیهٔ ۴، ماهانی فرض می‌کند که $a_2:a_1 \overset{A}{>} b_2:b_1$. سپس فرایند قضیهٔ ۲ را به ترتیب عکس

در ساخت اعـداد m و n بـه‌طوری کـه $na_2 > ma_1$ و $nb_2 \leq mb_1$ بـه کـار می‌بـرد. او نتیجـه می‌گیرد که: $a_2 : a_1 \overset{E}{>} b_2 : b_1$. این اثبات نیز شامل خطاهای ریاضی قابل تصحیح است،که آن‌ها را نمی‌توان خطای کاتبان دانست.

نظر نیریزی در مورد تعریف نسبت‌ها به روش تفریق دو سویه

نیریزی در شرح تعریف‌های مقالهٔ پنجم اصول، از بعضی نسبت‌های مبتنی بر تفریق‌های دو سـویه استفاده کرده است. اولین عبارت از این دست، در تعریف ۳ اقلیدس آمده اسـت: «نسـبت نـوعی ارتباط از لحاظ اندازه بین دو کمیت هم جنس است». نیریزی در شرح این تعریف، روش تفریق دو سویه را در مورد دو کمیت متوافق و دو کمیت نامتوافق به کار می‌برد.[۱] نیریزی سپس تعریف تعمیم یافتهٔ زیر را که به اقلیدس نسبت داده، و من آن را تعریف $۳\frac{۱}{۲}$ مـی‌نـامم، بیـان می‌کنـد: «تناسـب تساوی نسبت‌هاسـت و (فقـط) بـرای حـداقل سـه کمیـت وجـود دارد». تعریـف $۳\frac{۱}{۲}$ ترکیبـی از تعریف‌های ۶ و ۸ اقلیدس است. نیریزی در شرحش بر تعریف $۳\frac{۱}{۲}$، توضیح می‌دهد که « تساوی نسبت‌ها» چیست. او یک تعریف کلی مبتنی بر تفریـق دو سـویه از $a : b \overset{A}{=} b : c$ همـراه بـا مثـال عرضه می‌کند و سپس با یـک مثـال معنـی $a : b \overset{A}{=} c : d$ را بـدون عرضـهٔ تعریفـی کلـی توضـیح می‌دهد.[۲] در ادامه می‌بینیم که این برداشت او از $a : b \overset{A}{=} c : d$ کامل نبود. سپس می‌گوید که: «اگر موقعیت کمیت‌ها، در تساوی بین آن‌ها، این موقعیت نباشد، آن‌هـا متناسـب نیسـتند»[۳] و تعریـف نادرست زیر را برای $a : b \overset{A}{>} c : d$ عرضه می‌کند:

> «اگر (کمیت) اول، دومی را به تعداد دفعات کمتری از تعـداد دفعـاتی کـه سـومی، چهارمی را می‌شمارد، بشمارد، «و» اگر از دومی باقی‌مانده‌ای بماند که کمیت اول را به تعداد دفعاتی بشمارد که آن نیز« کمتر » از تعداد دفعاتی است که باقی‌ماندهٔ کمیت چهارم کمیت سوم را می‌شمارد، و اگر همچنین دو باقی‌مانده از اولی و سومی بماند که به نسبت باقی‌مانده‌های اول از دومی و چهارمی وضعیت یکسانی داشته باشند، و این موقعیت بین باقی‌مانده‌های جا به جا شونده به‌طور بینهایت ادامه یابد، آنگاه این موقعیت منجر به‌تناسب نمی‌شود، اما در این موقعیت نسبت اولی به دومی بزرگتر از

1. Junge *et al*, 1932, pp. 4- 6.
2. Junge, *et al*, 1932, pp. 8- 12.
3. Junge, *et al*, 1932, pp. 12- 13.

نسبت سومی به چهارمی است».[۱]

با نمادگذاری بخش قبلی، ظاهراً نیریزی می‌گوید که اگر $\frac{b}{a}=[k_1,...]$ و $\frac{d}{c}=\left[k'_1,...\right]$، داریم $a:b\overset{A}{>}c:d$ اگر $k_1<k'_1$ و اگر $k_1=k'_1$، $k_2<k'_2$، .... در حقیقت $a:b\overset{A}{>}c:d$ اگر $k_1<k'_1$ یا $k_1=k'_1$، $k_2>k'_2$ الی آخر. برای ایجاد مفهوم ریاضی درست در اینجا، کلمات «و» و «کمتر» که در نقل قول آمده، باید به «یا» و «بزرگتر» تغییر یابند. نیریزی سپس تعریفی از نسبت کوچکتر از نسبت دیگر عرضه می‌کند، که از نقل قول بیان شده- البته با تبدیل همهٔ کلمات «کمتر» به «بیشتر»- به دست می‌آید. که این تعریف نیز نادرست است. پس به نظر می‌رسد که احتمالاً نیریزی مضمون ریاضی آن را درک نکرده باشد.[۲]

اگر خطاهای ریاضی تصحیح شوند، تعریف‌ها یادآور بازسازی تعریف $a:b\overset{A}{>}c:d$ و $a:b\overset{A}{<}c:d$ در مقالهٔ بکر[۳] و تعریف صحیح خیام هستند، اما تعریف‌های نیریزی شبیه تعریف ماهانی از $a:b\overset{A}{>}c:d$ نیستند.

نیریزی سپس در مورد تعریف ۴ اقلیدس بحث می‌کند،[۴] و بعد به سراغ تعریف پیچیدهٔ ۵ می‌رود: $a:b\overset{E}{=}c:d$ اگر برای هر جفت مضرب‌های صحیح ma، mc، nb، nd داشته باشیم: $ma>nb \Leftrightarrow mc>nd$ و $ma=nb \Leftrightarrow mc=nd$ و $ma<nb \Leftrightarrow mc<nd$. نیریزی ابتدا توضیح می‌دهد که منظور اقلیدس نه مقایسهٔ مضرب‌های m، n، بلکه مقایسهٔ مقادیر ma، nb، mc و nd بوده است. او با جملات زیر، که گاهی مبهمند و من در آن جاها اعداد (۱) و (۲) را وارد کرده‌ام، متن را ادامه می‌دهد. کلماتی که من در متن جایگزین کرده‌ام درون پرانتز گوشه‌دار < > آمده است و همهٔ کلمات برجسته شده از من است.

> «منظور او (اقلیدس) این است که مقدار فزونی شبیه به مضرب‌های عدد مشترکی است، که (کمیت) اول، (کمیت) دوم را و (کمیت) سوم (کمیت) چهارم را می‌شمارد، و این وقتی است که اولی با دومی متوافق و سومی با چهارمی متوافق باشند. اگر متوافق نباشند، ولی نامتوافق باشند، آنگاه (۱) تعداد دفعاتی که کمیت **مضرب‌های** اولی **مضرب‌های** دومی را می‌شمارد شبیه به تعداد دفعاتی است که

1. Junge, *et al*, 1932, pp. 12- 13.
2. Junge, *et al*, 1932, pp. 12, n. 1
3. Becker, 1933a, p. 312.
۴. «کمیت‌ها وقتی می توانند نسبتی با یکدیگر داشته باشند که مضربی از هرکدام بتواند از دیگری بیشتر شود.»

> **مضرب‌های** سومی **مضرب‌های** چهارمی را می‌شمارد؛ و (۲) تعداد دفعاتی که باقی‌ماندهٔ دومی اولی را می‌شمارد مساوی با تعداد دفعاتی است که <باقی‌ماندهٔ چهارمی سومی را می‌شمارد، و تعداد دفعاتی که باقی‌ماندهٔ اولی باقی‌ماندهٔ دومی را می‌شمارد مساوی با تعداد دفعاتی است که> باقی‌ماندهٔ سومی باقی‌ماندهٔ چهارمی را می‌شمارد و این تا بینهایت ادامه می‌یابد».[۱]

این عبارت با حذف چهار مورد برجسته شدهٔ واژهٔ «مضرب‌های»، مفهوم ریاضی پیدا می‌کند. آنچه می‌ماند، تعریف کلی $a_2 : a_1 \overset{A}{=} b_2 : b_1$ است. من نتیجه می‌گیرم که نیریزی به این تعریف دسترسی داشته، ولی در واقع تمایز آن را با تعریف اقلیدس خوب درک نکرده است.

نیریزی ادامه می‌دهد:

> «اقلیدس منظور دیگری غیر از این نداشت. هر کسی که می‌خواست اثبات‌هایی برای این و دیگر چیزهای (مرتبط) عرضه کند، دچار انحراف شده بود، زیرا به قضیه‌هایی کشانده می‌شد که موضوعشان پیشرفته‌تر بود، و اگر منظورش صرفاً حقیقت بود، باید پی می‌برد که این چیز نیاز به اثبات ندارد، زیرا برای کسانی که به این جایگاه رسیده‌اند جزو اصول اولیه است، چون هر رساله اصولی دارد که مطابق با سطح آن رساله است».[۲]

شاید منظور نیریزی این است که تعریف اقلیدس معادل با تعریف مبتنی بر تفریق دو سویه است، اما ظاهراً در شرح خود بر این کار مقدماتی نیازی به اثبات گزارهٔ

$$a : b \overset{E}{=} c : d \Rightarrow a : b \overset{A}{=} c : d$$

نمی‌دید.

نتیجه می‌گیرم که اگر نیریزی رسالهٔ ماهانی را دیده باشد، احتمالاً از آن تأثیر نگرفته است. چون تعریف‌های مبتنی بر تفریق دو سویهٔ نیریزی از نسبت‌های بزرگتر یا کوچکتر از دیگر نسبت‌ها، نمی‌تواند از مقالهٔ ماهانی گرفته شده باشد، در حدود ۲۸۶ ق که نیریزی شرحش را نوشت، نوشتارهای دیگری در این موضوع باید در دسترس بوده باشند.

۱. متن عربی: «فيكون عدد المقادير الّتي تعدّ أضعاف الأوّل لأضعاف الثّاني مساوياً لعدد المقادير الّتي تقدر أضعاف الثّالث لأضعاف الرّابع ويكون عدد المقادير الّتي تقدر فضلة الثّاني للأوّل مساوياً لعدد المقادير الّتي تقدر (فضلة الرّابع للثالث ويكون عدد المقادير الّتي تقدر فضلة الأوّل لفضلة الثّاني مساوياً لعدد المقادير الّتي تقدر) فضلة الثّالث لفضلة الرّابع ثمّ لا يزال كذلك إلى غير نهاية».

2. Junge, 1932, pp. 16- 17.

نظر خیام در مورد نظریهٔ تفریق دو سویه برای نسبت‌ها

اکنون تحلیل کوتاهی از دومین بخش رسالة فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس تألیف خیام (۴۲۰ - ۵۳۶ ق) را عرضه می‌کنم (نیز بنگرید به مقالهٔ «عمر خیام و تفریق دو سویه» تألیف ویتراک). این بخش دوم به رابطهٔ بین نظریه‌های نسبت اقلیدسی و مبتنی بر تفریق دو سویه اختصاص دارد. بر اساس نظر خیام، تعریف‌های مبتنی بر تفریق دو سویه تعریف‌های «حقیقی» هستند، در حالی که تعریف‌های اقلیدسی فقط «معروف» اند. هدف بخش دوم عرضهٔ اثبات‌های معادلی از دو تعریف نسبت‌های مساوی و نسبت‌های بزرگتر است. بنابراین خیام همان قضیه‌های ماهانی را ثابت می‌کند، اما اثبات‌هایش خیلی متفاوتند.

خیام بحث جداگانه‌ای دارد در مورد حالتی که نسبت‌های مورد نظر، نسبت‌های بین اعداد گویا هستند. در اینجا با این حالت کاری نداریم.

خیام در بخشی از نسبت‌های گنگ به عنوان یک اصل موضوع می‌پذیرد کـه بـرای دو جفت از کمیت‌های هم جنس a، b و c، d، یا $a:b\overset{A}{>}c:d$ یا $a:b\overset{A}{=}c:d$ یا $a:b\overset{A}{<}c:d$. بـرای دو نسبت $a:b$ و $c:d$ که در تعریف اقلیدسی $a:b\overset{E}{=}c:d$ صدق می‌کند، خیام فرض می‌کند کـه $a:b$ و $c:d$ نیز همهٔ خاصیت‌های نسبت‌ها را که به‌وسیلهٔ اقلیدس در مقالهٔ پـنجم اصـول ثابـت کرده است، دارند.

خیام به عنوان اصل موضوع وجود یک جز چهارم تناسب را به روشی که با نمادهای امروزین به صورت زیر است، فرض می‌کند:[1]

اگر a، b دو کمیت هم جنس باشند و c کمیت دیگری باشد، آنگاه:

۱. کمیتی مانند f از همان جنس c وجود دارد چنان که $a:b\overset{A}{=}c:f$؛

۲. کمیتی مانند f' از همان جنس c وجود دارد چنان که $a:b\overset{E}{=}c:f'$.

خیام تمایز آشکاری بین f و f' قائل نمی‌شود، اما در اثبات‌هایش این فرض ضمنی را که f و f' ضرورتاً برابرند در نظر نمی‌گیرد.

وجود جزء چهارم تناسب f یا f' یک فرض مشکل برانگیز است، زیرا متضمن حـل مسـائل عددی بسیاری، مثلاً تربیع دایره، می‌شود.[2]

1. Djebbar, 1977, p. 48; Vahabzadeh, 1999, pp. 292-293, 350-351; Djebbar, 2002, p. 113.

۲. اگر فرض کنیم که در هر تناسب جزء چهارمی وجود داشته باشد، می‌توانیم تربیع یک دایره را با شعاع r به صورت زیر بیابیم: a را مربعی به ضلع r، b را دایره‌ای به شعاع r، c را یک پاره خط دلخواه گرفته و فرض می‌کنیم f پـاره‌خطی باشـد کـه $a:b=c:f$. اگـر g واسطهٔ

←

خیام ابتدا به روشی متفاوت با روش ماهانی ثابت می‌کند کـه $a:b\overset{E}{=}c:d \Rightarrow a:b\overset{A}{=}c:d$.
سه اثبات باقی‌مانده در متن خیام بر اساس دو لم زیر است:

۱. لم ۱: $c:d\overset{A}{=}c:f \Rightarrow d=f$،[1]

۲. لم ۲: $c:d\overset{A}{>}c:f \Rightarrow f>d$،[2]

این لم‌ها نتیجهٔ منطقی مستقیم تعریف‌های مبتنی بر تفریق دو سویه هستند. آن‌ها بـه اثباتی پیچیده نظیر قضیهٔ ۲ ماهانی نیاز ندارند.

اکنون سه اثبات دیگر ساده‌اند:

- فرض کنید $a:b\overset{A}{=}c:d$، پس کمیتی مانند f وجود دارد که $a:b\overset{E}{=}c:f$. پس بنـا بـر قضیهٔ اول $a:b\overset{A}{=}c:f$ و نیز بنابر لم ۱، $d=f$ که از آنجا $a:b\overset{E}{=}c:d$.
- فرض کنید $a:b\overset{E}{>}c:d$. اگر $a:b\overset{A}{=}c:d$، بنابر قضیهٔ قبلی داریـم: $a:b\overset{E}{=}c:d$ کـه متنـاقض بـا فـرض اسـت. اگـر $a:b\overset{A}{<}c:d$، کمیتـیماننـد f وجـود دارد چنـان کـه $a:b\overset{A}{=}c:f$، همچنـین $c:f\overset{A}{<}c:d$، پـس بنـابر لـم ۲، $f>d$. بنـابر قضـیهٔ قبلـی $a:b\overset{E}{=}c:f$، بنابراین $c:f\overset{E}{>}c:d$، همچنین بنابر قضیهٔ ۱۰ مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس $f<d$ که (با $f>d$) تناقض دارد. پس $a:b\overset{A}{>}c:d$.
- فرض کنید $a:b\overset{A}{>}c:d$. در اثبات قبلی، E را با A و قضیهٔ ۱۰ مقالهٔ پنجم اصول را با لم ۲ عوض می‌کنیم. در نتیجه داریم: $a:b\overset{E}{>}c:d$.

تجزیه و تحلیل مختصرم را از نوشتهٔ خیام با بحثی از تعریف او برای نسبت بزرگتـر کـه شـامل فهرست ناقصی از حالات عرضه شده در ترتیبی به هم ریختـه اسـت، بـه پایـان می‌بـرم. در اینجـا تعریف خیام را با جزئیاتی بیشتر از اطلاعات مقالهٔ وهاب‌زاده[3] مورد بحث قرار مـی‌دهم، نـه تنهـا

→
هندسی بین c و f باشد، مربع به ضلع g مساوی با دایرهٔ به شعاع c است. [در مورد تاریخ جزء چهارم تناسـب در هندسـهٔ یونـانی: نـک: Becker 1933b].

1. Vahabzadeh, 1999, p. 295. Lemma 2.3.
2. Vahabzadeh, 1999, p. 296. Lemma 2.4.
3. Vahabzadeh, 1999, pp. 291- 292.

بدین علت که ممکن است وی از ماهانی تأثیر پذیرفته باشد، بلکه همچنین برای آنکه دشواری موضوع برای ریاضیدانان دورهٔ اسلامی را نشان دهم. به منظور وضوح مطلب، اعداد (۱) تا (۸) را در تعریف وارد می‌کنم. خیام می‌گوید:[۱]

«در مورد (تعریف) هندسی (از $\overset{A}{<}$): اگر همهٔ مضارب اولی از دومی کم شوند و باقی‌مانده‌ای بماند، و همهٔ مضارب سومی از چهارمی کم شوند و باقی‌مانده‌ای بماند، و (۱) تعداد مضارب اولی کمتر از تعداد مضارب سومی باشد، یا (۲) این تعداد مساوی با آن تعداد باشد، اما همهٔ مضارب باقی‌ماندهٔ دومی از اولی کم شوند تا باقی‌مانده‌ای بماند، و همهٔ مضارب باقی‌ماندهٔ چهارمی از سومی کم شوند تا باقی‌مانده‌ای بماند، تعداد مضارب باقی‌ماندهٔ دومی بیشتر از تعداد مضارب باقی‌ماندهٔ چهارمی شود، یا (۳) این تعداد نیز مساوی با آن تعداد شود، ولی اگر همهٔ مضرب‌های باقی‌ماندهٔ اولی از باقی‌ماندهٔ دومی کم شوند، و همهٔ مضرب‌های باقی‌ماندهٔ سومی از باقی‌ماندهٔ چهارمی کم شوند، و تعداد مضرب‌های باقی‌ماندهٔ اولی کمتر «از تعداد مضرب‌های باقی‌ماندهٔ سومی شود»،[۲] (۴) یا هیچ باقی‌مانده‌ای از باقی‌ماندهٔ دومی یا دومی نماند، و باقی‌مانده‌ای از باقی‌ماندهٔ چهارمی یا از چهارمی بماند، آنگاه به‌واقع (یعنی طبق نظریهٔ تفریق دو سویه) نسبت اولی به دومی ضرورتاً بزرگتر از نسبت سومی به چهارمی است.

به‌طور کلی در این نوع (از نسبت): اگر (۵) از دومی یا از باقی‌مانده‌هایش چیزی باقی نماند، یا «از چهارمی یا باقی‌مانده‌هایش چیزی باقی نماند»،[۳] (۶) یا

---

۱. متن عربی: «وأما هندسي، فإذا فصل جميع أضعاف الأول من الثاني وبقيت فضلة، وجميع أضعاف الثالث من الرابع وبقيت فضلة، وكان عدد أضعاف الأول أقلّ من عدد أضعاف الثالث، أو كان هذا العدد مساوياً لذلک «العدد»، لکن <إذا> فصل جميع أضعاف فضلة الثاني من الأول حتى بقيت فضلة، وفصل جميع أضعاف فضلة الرابع من الثالث حتى بقيت فضلة، فكان عدد أضعاف فضلة الثاني أكثر من عدد أضعاف فضلة الرابع، أو هذا العدد أيضاً مساوياً لذلک العدد، لکن إذا فصل جميع أضعاف فضلة الأول من فضلة الثاني، وجميع أضعاف فضلة الثالث من فضلة الرابع، فكان عدد أضعاف فضلة الأول أقلّ <من عدد أضعاف فضلة الثالث>؛ أو لم يبق من فضلة الثاني أو من الثاني فضلة، وبقيت من فضلة الرابع أو الرابع فضلة؛ فإن نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع لا محالة في الحقيقة» وبالجملة في هذا الضرب يكون إما أن لا يبقى من الثاني ومن فضلاته فضلة، <ويبقى من الرابع ومن فضلاته فضلة>؛ وإما أن يكون فضلاته أقلّ <من فضلات الرابع>؛ وإما أن يبقى من الأول وفضلاته فضلة، ولا يبقى من الثالث وفضلاته فضلة؛ وإما أن تكون فضلات الأول أكثر من فضلات الثالث؛ يلزم أن يكون نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة الثالث إلى الرابع. ولهذا المعني تفصيل أطول من هذا يمكنک أن تعرفه بهذا القانون الذي تعلّمته؛ فافهم.» (راشد و وهاب زاده، ۲۰۰۵م، ص ۳۲۰). «این قسمت در متن اصلی مقاله نیامده است».

۲. احتمالاً این قسمت در متن نسخه‌ای که نویسندهٔ مقاله در دسترس داشته‌اند، افتاده بوده ولی رشدی راشد و بیژن وهاب زاده آن را در متن کتاب ریاضیات عمر خیام اضافه کرده و مترجم این مطلب را به متن ترجمه اضافه نموده است.

۳. این قسمت در متن اصلی مقاله نیامده و مترجم این مطلب را به ترجمه افزوده است.

> باقی‌مانده‌های آن کمتر «از باقی‌مانده‌های چهارمی» باشد، (۷) یا از اولی یا باقی‌مانده‌هایش چیزی باقی بماند، و از سومی یا باقی‌مانده‌هایش چیزی باقی نماند، (۸) یا باقی‌مانده‌های اولی (از نظر تعداد) بیشتر از باقی‌مانده‌های سومی باشد، آنگاه نسبت اولی به دومی بزرگتر از نسبت سومی به چهارمی است. برای این مفهوم طبقه‌بندی حالت‌ها بیشتر از این است، و شما می‌توانید با این قاعده که به شما یاد داده‌ام آن را بدانید، و در نتیجه آن را بفهمید».

در اینجا تفسیری از تعریف خیام با نمادهایی که من به کار می‌برم عرضه می‌شود:

کمیت‌های اولی، دومی، سومی و چهارمی او را به ترتیب a_1، a_2، b_1 و b_2 می‌نامم. خیام، درست مانند ماهانی، فرض می‌کند که $a_2 < a_1$ و $b_2 < b_1$. سپس «باقی‌ماندهٔ دومی» (که من a_3 می‌نامم) و «باقی‌ماندهٔ چهارمی» (که من b_3 می‌نامم) را به صورت $a_1 = k_1 a_2 + a_3$ و $b_1 = k'_1 b_2 + b_3$ برای اعداد صحیح k_1 و k'_1 چنان که $0 \le a_3 < a_2$ و $0 \le b_3 < b_2$ تعریف می‌کند. پس $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$ اگر $k_1 < k'_1$ (حالت ۱).

اگر $k_1 = k'_1$، او ضمناً فرض می‌کند $a_3 \ne 0$ و $b_3 \ne 0$ و «باقی‌ماندهٔ اولی» (که من a_4 می‌نامم) و «باقی‌ماندهٔ سومی» (که من b_4 می‌نامم) را به صورت $a_2 = k_2 a_3 + a_4$ و $b_2 = k'_2 b_3 + b_4$ برای اعداد صحیح k_2 و k'_2 چنان که $0 \le a_4 < a_3$ و $0 \le b_4 < b_3$ تعریف می‌کند. پس $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$ اگر $k_2 < k'_2$ (حالت ۲).

اگر $k_2 = k'_2$، او ضمناً فرض می‌کند $a_4 \ne 0$ و $b_4 \ne 0$ و سپس k_3 و k'_3 را با همان روش به صورت $a_3 = k_3 a_4 + a_5$ و $b_3 = k'_3 b_4 + b_5$ که در آن‌ها $0 \le a_5 < a_4$ و $0 \le b_5 < b_4$ تعریف می‌کند. پس $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$ اگر $k_3 < k'_3$ (حالت ۳).

با رسیدن به این مرحله، او به بعضی از فرض‌های ضمنی خود پی می‌برد و می‌گوید که $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$ نیز اگر ($k_3 = k'_3$)، $a_5 = 0$، $b_5 > 0$ یا $a_3 = 0$، $b_3 > 0$ (حالت ۴).

او سپس چهار حالت کلی‌تر را که در آن‌ها $a_2 : a_1 \overset{A}{>} b_2 : b_1$ بر می‌شمرد (من این فرض‌های ضمنی را در پرانتز آورده‌ام و n را عدد صحیح نامنفی دلخواهی فرض کرده‌ام).

- ($k_1 = k'_1$)، $a_3 = 0$، $b_3 > 0$ و به‌طور کلی:

($k_1 = k'_1$، $k_2 = k'_2$، …، $k_{2n-1} = k'_{2n-1}$)، $a_{2n+1} = 0$، $b_{2n+1} > 0$ (حالت ۵).

- $(k_1 = k'_1)$، $k_2 < k'_2$ یا $(k_1 = k'_1، k_2 = k'_2، \ldots، k_{2n-1} = k'_{2n-1})$، $k_{2n} < k'_{2n}$ (حالت ۶).
- $(k_1 = k'_1، k_2 = k'_2)$، $a_4 > 0$، $b_4 = 0$ و به‌طور کلی:
  $(k_1 = k'_1، k_2 = k'_2، \ldots، k_{2n} = k'_{2n})$، $a_{2n+2} > 0$، $b_{2n+2} = 0$ (حالت ۷).
- $(k_1 = k'_1، k_2 = k'_2)$، $k_3 > k'_3$ (حالت ۸).

حالت ۸ ناقص است و حالت‌های ۶ و ۸ نادرست و مخالف حالت‌های صحیح ۱ و ۲ هستند. فرض‌های ضمنی در آغاز تعریف خیام مشابه فرض‌های تعریف ماهانی است که هرگز با باقی‌مانده‌های مساوی با صفر کار نکرده است.

نتیجه

شاید ریاضیدانان دیگری از دورهٔ اسلامی، بیش از آنچه در این مقاله ذکر شده، نظریهٔ تفریق دو سویه برای نسبت‌ها را بررسی کرده باشند. به عقیدهٔ من، ماهانی و خیام تعریف $a:b\overset{A}{=}c:d$ را به‌درستی درک کردند. نیریزی تعریف $a:b\overset{A}{>}c:d$ را درک نکرد؛ خیام تعریف $a:b\overset{A}{>}c:d$ را به صورتی طولانی و نادرست توضیح داد، اما می‌توانست در حالت‌های ساده آن را به کار ببرد؛ تنها در رسالهٔ ماهانی کاربردهای ژرف‌تر $a:b\overset{A}{>}c:d$ را، نظیر آنچه در قضیهٔ دومش آمده است، می‌یابیم. نتیجه‌گیری فعلی من این است که یک سنت واقعی از کار با روش تفریق دو سویه برای نسبت‌ها در ریاضیات دورهٔ اسلامی چنان که از مطالعهٔ تعریف‌ها فراتر برود، وجود نداشته است.

از نظر ریاضی، اثبات‌های رسالهٔ ماهانی جالب‌تر از اثبات‌های خیام هستند، زیرا ماهانی وجود جزء چهارم تناسب را بدیهی فرض نمی‌کند و به اثبات از طریق برهان خلف علاقه ندارد. رسالهٔ ماهانی پر مشکل است، زیرا در آن خطاهای بسیاری وجود دارد که نمی‌توان آن‌ها را خطاهای کاتب دانست، و بنابراین باید در متن اصلی نوشتهٔ ماهانی بوده باشند، چون اثبات‌ها خیلی پیچیده‌اند و به‌آسانی می‌توانند تصحیح شوند. فکر می‌کنم که آن‌ها نهایتاً از اثبات‌های صحیحی که به ماهانی رسیده‌اند، البته با روش‌هایی ناکامل یا ناقص، گرفته شده‌اند. اگر نویسندهٔ اثبات‌های صحیح یک ریاضیدان مسلمان باشد، باید یکی از معاصران ماهانی باشد، بنابراین انتقال ناقص بسیار نامحتمل است. بیشتر احتمال دارد که اثبات‌ها در یک نوشتهٔ یونانی بوده‌اند که به صورتی نادرست به عربی ترجمه شده‌اند. این نوشته شاید شرح گمشده‌ای از اصول اقلیدس بوده یا متنی نظیر اثر گمشدهٔ منلائوس به نام اصول هندسی باشد که به‌وسیلهٔ ثابت بن قره به عربی

ترجمه شد.[1] متن یونانی شاید شامل اثباتی با بیان نارسا اما صحیح بوده یا شاید شامل اثبات ناصحیح بوده اما از یک منبع یونانی کهن‌تر شامل اثبات‌های صحیح اقتباس شده باشد. ماهانی متن را بازنویسی کرده و کوشیده است خطاها و اشتباهات ریاضی را تصحیح کند، اما در این کار توفیق کامل نیافته است.[2] بنابراین متن ماهانی شاید به ما همان قدر در بارهٔ ریاضیات یونانی بگوید که در بارهٔ ریاضیات تمدن اسلامی می‌گوید. فرض من در مورد منشأ یونانی متن ماهانی مقدماتی است و در بارهٔ آن باید بیشتر پژوهش شود.

منابع

ارانی، تقی ۱۳۱۴، رسالة في شرح ما أشكل من مصادرات كتاب اقليدس لحكيم عمر بن ابراهيم الخيامی، تهران.

راشد، رشدی و وهاب‌زاده، بیژن ۲۰۰۵م، ریاضیات عمر الخیام، ترجمهٔ دکتر نقولا فارس، بیروت، مرکز دراسات الوحدة العربية.

رضازاده ملک، رحیم ۱۳۷۷، دانشنامهٔ خیامی، تهران.

صبره، عبدالحمید ۱۹۶۱م، رساله فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس، اسکندریه.

همایی، جلال‌الدین ۱۳۴۶، خیامی‌نامه، تهران، انجمن آثار ملی.

Amir-Móez, Ali R. 1959. Discussion of Difficulties in Euclid by Omar ibn Abrahim al-Khayyami (Omar Khayyam). *Scripta Mathematica* **24**: 275–303; reprinted in Fuat Sezgin, Ed., *Islamic Mathematics and Astronomy*, Vol. 46. Frankfurt: Institute for the History of Arabic-Islamic Science, 1998: 293–321.

Becker, Oskar 1933a. Eudoxos-Studien I: Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien* **2**: 311–333.

—— 1933b. Eudoxos-Studien II: Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen? *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien* **2**: 369–387.

Djebbar, Ahmed 1997. *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'épître d'al-Khayyām (1048–1131) sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide* (introduction et traduction française). Prépublications mathématiques d'Orsay, no. 97-39 (73 pp.). Paris: Université Paris-Sud.

—— 2002. Épitre d'Omar-Khayyām *Sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide* (traduction française). *Farhang* **14**: 79–136.

۱. دربارهٔ این اثر بنگرید به [Hogendijk 2000].

۲. ماهانی به روش مشابه، سعی کرده است نسخهٔ ناصحیح اکر منلائوس را، که در دسترس او بود، به صورتی معنادار تبدیل کند (نک: کراوزه، ۱۹۳۶، ص ۲۶).

Fowler, David 1999. *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, 2nd edition. Oxford: Clarendon Press.

Hardy, Godfrey H. & Wright, Edward M. 1979. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition. Oxford: Clarendon Press / New York: Oxford University Press.

Heath, Thomas L. 1956. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (English translation), 2nd edition, 3 vols. New York: Dover. Unaltered reprint of the edition Cambridge: University Press, 1926.

Hogendijk, Jan P. 2000. Traces of the Lost *Geometrical Elements* of Menelaus in Two Texts of al-Sijzī. *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* **13**: 129–164.

Ibn al-Haytham, al-Ḥasan 2000. *Commentary on the Premises of Euclid's Elements: Sharḥ Muṣādarāt Uqlīdis by Ibn al-Haytham, reproduced from the Bursa and Istanbul manuscripts*. Fuat Sezgin, Ed., with an introduction by Matthias Schramm. Publications Series C, Vol. 63. Frankfurt: Institute for the History of Arabic-Islamic Science.

Junge, Gustav, Raeder, Johannes, & Thomson, William 1932. *Codex Leidensis 399,1. Euclides Elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Narizii*, Partis III Fasciculus II. Copenhagen: Gyldendal; reprinted in Fuat Sezgin, Ed., *Islamic Mathematics and Astronomy*, Vol. 15. Frankfurt: Institute for the History of Arabic-Islamic Science, 1997.

Juschkewitsch, Adolf P. 1964. *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Leipzig: Teubner. German translation from the Russian original *Istoriya matematiki v srednie veka*, Moscow 1961.

Krause, Max 1936. *Die Sphärik von Menelaus aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Manṣūr b. ʿAlī b. ʿIrāq*. Berlin: Weidmann.

Matvievskaya, Galina P., & Rozenfeld, Boris A. 1983. *Matematiki i astronomy musulmanskogo srednevekovya i ikh trudy (VIII–XVII vv.)* (in Russian), Moscow: Nauka.

Plooij, Edward B. 1950. *Euclid's Conception of Ratio and his Definition of Proportional Magnitudes as Criticized by Arabian Commentators*. Rotterdam: van Hengel; reprinted in Fuat Sezgin, Ed., *Islamic Mathematics and Astromomy*, Vol. 19. Frankfurt: Institute for the History of Arabic-Islamic Science, 1997: 167–243.

Sezgin, Fuat 1974. *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V: *Mathematik bis ca. 430 H.* Leiden: Brill.

Vahabzadeh, Bijan 1997. Al-Khayyām's Conception of Ratio and Proportionality. *Arabic Sciences and Philosophy* **7**: 247–263.

Vahabzadeh 1999 = Rashed, Roshdi, & Vahabzadeh, Bijan. *Al-Khayyām mathématicien*. Paris: Blanchard, 1999.

Vitrac, Bernard 2002. ʿUmar al-Khayyām et l'anthyphérèse: Étude du deuxième Livre de son commentaire "Sur certains prémisses problématiques du livre d'Euclide". *Farhang* **14**: 137–192.

Youschkevitch, Adolf P. 1976. *Les mathématiques arabes: VIIIe–XVe siècles*, Paris: Vrin. French translation from the Russian original *Istoriya matematiki v srednie veka*, Moscow 1961.

Youschkevitch, Adolf P. & Rosenfeld, Boris A. 1973. Al-Khayyāmī. In *Dictionary of Scientific Biography*, Charles C. Gillispie, Ed., Vol. 7, pp. 323–334. New York: Charles Scribner's Sons.

Yushkevitch, Adolf P. — *see* Juschkewitsch, Youschkevitch.