

Vastgelopen? Je kunt de boom in!

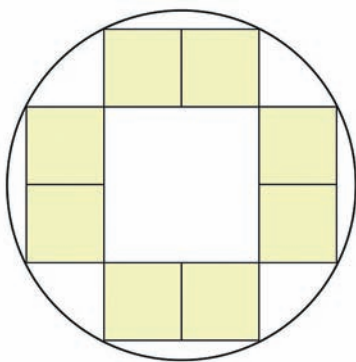
Hoe ondersteun je leerlingen die zelfstandig werken aan uitdagende, denk-actieve opgaven, als ze – onverhoopt maar niet onverwacht – vastlopen? Lees hoe interactieve heuristiekbomen deze leerlingen weer op gang helpen, en ze gaandeweg leren hun aanpak te structureren én heuristische technieken te ontwikkelen.

Inleiding

Gedurende een intelligente lockdown werken leerlingen meer dan normaal zelfstandig aan opgaven. Als leerlingen werken aan opgaven die niet routinematig opgelost kunnen worden en vastlopen, zit er vaak niets anders op dan bij de antwoorden te kijken. Natuurlijk worden er bij zulke denk-actieve opgaven vaak hints aangeboden, maar aan die praktijk valt nog wel wat te verbeteren. Dit artikel gaat over een visie op hints en een nieuwe digitale tool om die aan te bieden.

Problemen

Aan de hand van het volgende voorbeeld leggen we uit hoe we te werk gaan.



figuur 1 Probleem: de cirkel in figuur 1 heeft oppervlakte 4π .
Wat is de oppervlakte van een vierkantje?

Hoe kun je leerlingen ondersteunen bij zo'n probleem op een manier dat ze ook van de aangeboden hulp nog zo veel mogelijk leren? Dat is de uitdaging die we aangaan.

We bespreken eerst twee al wat langer bekende aspecten van probleemaanpak – voorkennis en heuristieken – daarna introduceren we ons idee van heuristiekbomen. Hoe problematisch het probleem is hangt natuurlijk af van de voorkennis en ervaring van de leerling. We gaan hier uit van een enigszins onervaren 2, 3 of 4 havo- of vwo-leerling. De benodigde voorkennis voor het probleem bestaat onder andere uit concepten, zoals vierkant, cirkel, en daarmee samenhangend, straal, en enkele proposities: (1) over de oppervlakte van een vierkant, (2) over de oppervlakte van een cirkel, en (3) de stelling van Pythagoras. Achter elk van de proposities gaat een techniek schuil om deze toe te passen in een concrete situatie. Maar het kennen en beheersen van deze concepten, proposities en technieken is nog niet voldoende om het probleem te kunnen oplossen. Je moet eerst een idee hebben.

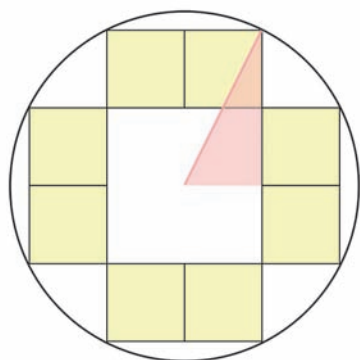
Heuristieken

Heuristieken helpen bij het ontwikkelen van ideeën voor een aanpak. De rol van heuristieken in probleemaanpak werd in de jaren '50 door Pólya^[1] onder de aandacht gebracht. Een heuristiek bij dit probleem zou kunnen zijn: 'teken een geschikte hulplijn'. Onderzoek van Schoenfeld^[2] en enkele voorgangers toonde echter aan dat leerlingen het moeilijk vinden om zo'n algemene handwijzing in een nuttige actie om te zetten. Schoenfeld zei dat zo'n algemene heuristiek eerder een label is voor een hele verzameling meer onderwerp-specifieke heuristische technieken. In dit geval zou dat bijvoorbeeld zijn: 'In een probleem met een cirkel is het nuttig de straal door een of meer voor het probleem relevante punten te tekenen en te onderzoeken of deze lijnstukken van gelijke lengte

bijdragen aan de oplossing'. Schoenfelds onderzoek toonde transfer aan: leerlingen konden deze specifiekere heuristische technieken wel met succes toepassen bij nieuwe problemen. Een andere heuristiek die onder het hulplijn-label valt is: 'Als je de lengte van een lijnstuk wilt berekenen, probeer dan hulplijnen door enkele voor het probleem relevante punten te tekenen zodat het lijnstuk onderdeel wordt van een rechthoekige driehoek. Onderzoek of de lengte van de hulplijnen bepaald kunnen worden.'

Compressie en decompressie

Spoiler-alert! Dan nu de oplossing zoals een ervaren wiskundige die zou kunnen verwoorden: ik bereken de straal uit de oppervlakte van de cirkel. Dat is de diagonaal van een rechthoek van twee tegen elkaar geschoven vierkanten, zie figuur 2. Met behulp van Pythagoras en verhoudingen bereken ik de zijde van een vierkant. Daarmee bereken ik de oppervlakte. Het uitwerken van deze ideeën is vervolgens voor de ervaren wiskundige een peulenschil. Een onervaren leerling zou het zo waarschijnlijk niet bedacht hebben en het is maar de vraag of deze beschrijving zo'n leerling verder zou helpen.



figuur 2

Het verschil is dat de ervaren wiskundige zijn kennis *gecomprimeerd* heeft. Als hij aan Pythagoras denkt, dan is dat niet in termen van een stappenplan, maar eerder in de eigenschappen die bepalen of deze toepasbaar is, bijvoorbeeld: 'als ik twee zijden ken, dan kan ik de derde berekenen'. Doordat de routines voor berekeningen met Pythagoras als betrouwbare techniek in het langetermijngeheugen resideren, ontstaat er ruimte in het werkgeheugen om de aandacht te verschuiven naar dit soort andere aspecten van Pythagoras, die ondersteunend zijn bij het verzinnen van een strategie. Evenzo, maar iets eenvoudiger: gedachtes aan procedures voor het rekenen aan de cirkeloppervlakte zijn gecomprimeerd tot 'ik kan

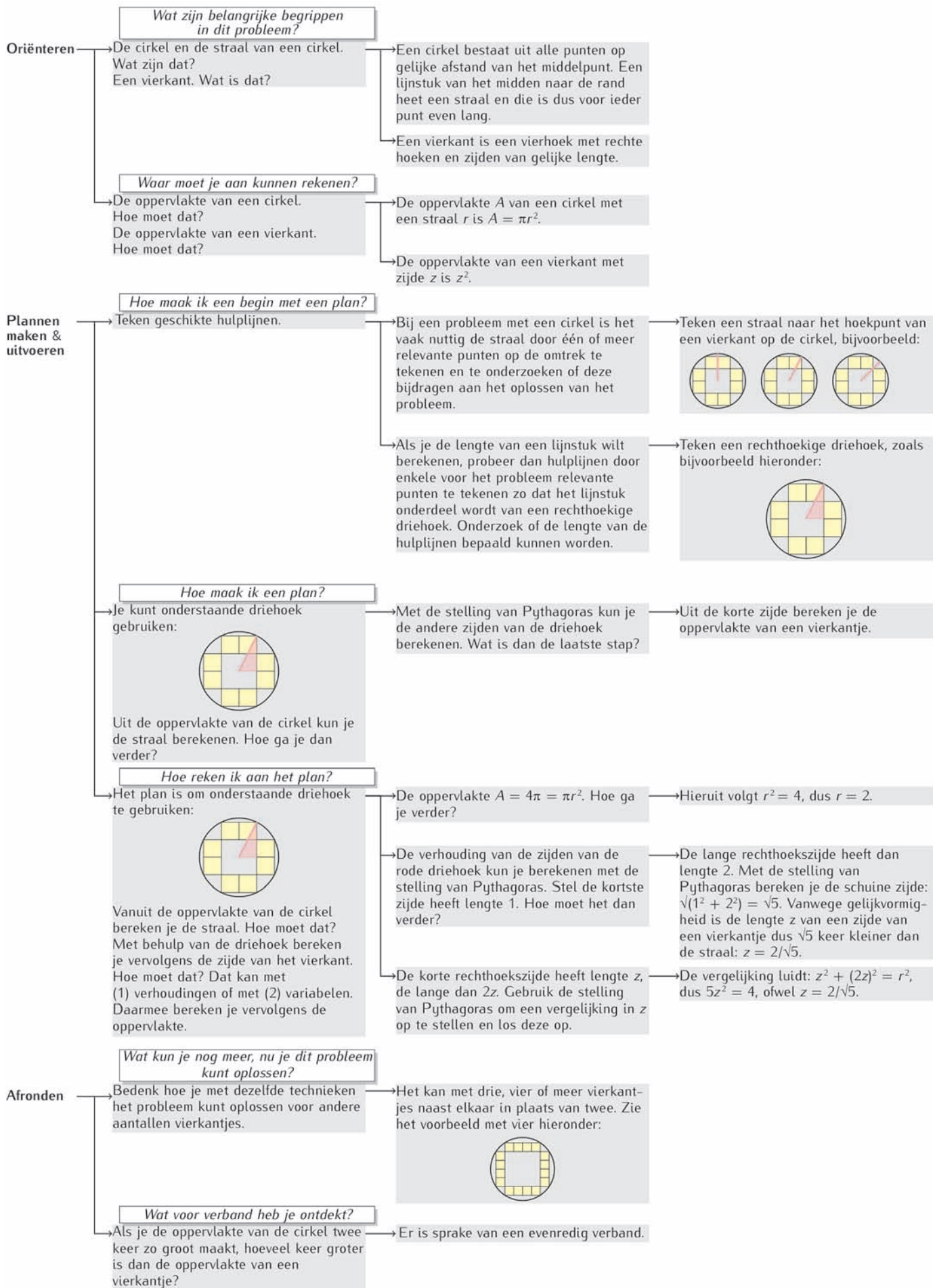
heen en weer rekenen tussen oppervlakte en straal: weet ik de een dan weet ik de ander'. Gecomprimeerde gedachten zorgen voor een goed georganiseerd 'opgeruimd' brein waarin problemen kunnen worden teruggebracht tot een overkomelijk aantal stappen. Op het moment dat in gecompri-meerde taal een oplossing is gevonden, dan kan die worden gedecomprimeerd tot een volledige uitwerking, mits je kunt vertrouwen op je routines en conceptuele kennis.

Heuristiekbomen

Leerlingen maken zich nieuwe stof eigen in ongecomprimeerde vorm, bijvoorbeeld in de vorm van het bestuderen van veel voorbeelden en stappenplannen. Heuristiekbomen bieden hulp door de compressie-decompressiedynamiek te tonen. Leerlingen worden ook geholpen door de fasen van probleemaanpak – oriëntatie, plannen maken en uitvoeren, afronding – in de boomstructuur te verwerken. Een heuristiekboom, zie figuur 3, is een boom van door lijnen verbonden kaartjes waarvan de inhoud (in de grijze blokken) zichtbaar wordt als je erop klikt. Bij de stam staan er zichtbaar vragen op de kaartjes die een indruk geven van wat er van die tak te verwachten valt (in de witte blokken).

In de oriëntatietak wordt relevante voorkennis geactiveerd. Op de kaartjes met de vragen 'Wat zijn belangrijke begrippen?' en 'Waar moet je aan kunnen rekenen?' worden relevante concepten en formules eerst benoemd en zo nodig toegelicht verder langs de tak. Natuurlijk worden verhoudingen of de stelling van Pythagoras hier nog niet genoemd, want je wilt de leerling de kans geven zelf te ontdekken dat deze van belang zijn. De volgende tak richt zich op het vinden van een opening, een idee. Hier zie je de decompressie van de heuristiek 'teken een hulplijn' uitgewerkt in de boom. De tak daarna beschrijft hoe een idee kan worden omgezet in een plan in drie overzichtelijke stappen. Essentieel is dat een leerling die vastloopt hier wordt getoond dat je op zoek kunt naar een aanpak in deze algemene bewoordingen, zonder direct op de details in te gaan. De volgende tak biedt hulp aan leerlingen die wel een plan hebben, maar vastlopen bij de uitwerking. Er worden twee varianten van aanpak ondersteund. Tot slot is er aandacht voor de afrondingsfase: leuk dat je het probleem hebt opgelost, maar wat kun je er verder nog van leren?

>



figuur 3 Een volledige, opengeklapte heuristiekbom, de interactieve versie staat op de website

“Het is belangrijk om te beginnen met kleine problemen met kleine bijbehorende boompjes ”

Implementatie en ervaringen

Bij enkele eerste ervaringen^[3] kwamen we erachter dat het belangrijk is om te beginnen met kleine problemen met kleine bijbehorende boompjes. Leerlingen moeten wennen aan het hulpmiddel en geleidelijke groei helpt daarbij. Ook introduceerden we een *flow chart*^[4] die leerlingen helpt hulp te zoeken op het juiste moment op de juiste plek in de heuristiekboom. De tweede ervaring was een zeer goede^[5]: twee derde klassen werkten twee keer drie kwartier aan een set problemen vergelijkbaar met het voorbeeld hier. De leerlingen werkten met succes, enthousiasme en vrijwel zonder hulp van de docente. Dat was wel prettig, want normaal gaan bij een lastig probleem juist alle vingers tegelijk de lucht in. Recent hebben we, als onderdeel van een vervolgonderzoek, heuristiekbomen aangeboden bij de huiswerkopgaven voor Getaltheorie aan de lerarenopleiding van de HU. Deze groep kon bevestigen dat het gebruik van heuristiekbomen hen bewuster maakte van de algemene getal theoretische inzichten en technieken uit de cursus, maar het is nog te vroeg om te concluderen dat dit ze ook hielp bij het aanpakken van nieuwe problemen waarbij deze van pas kwamen.

Natuurlijk lijken er ook restricties aan het gebruik van heuristiekbomen te zitten; de meest prominente misschien wel de inflexibiliteit: je kiest één niveau en (meestal) één aanpak waarop hulp wordt geboden. Toch lijkt dit in de praktijk niet veel moeilijkheden te veroorzaken. Als de docent beschikbaar blijft, kan hij in deze gevallen bijspringen, omdat hij verder goed ontlast wordt. De leraren-in-opleiding gaven aan dat ze het prettig vinden dat ze niet meteen naar het antwoordmodel hoeven te grijpen als ze vastlopen. Doordat ze bovendien in kleine stappen verder geholpen worden, behouden ze maximaal eigenaarschap over de uiteindelijke oplossing.

Zelf aan de slag

Ben je enthousiast geworden over heuristiekbomen, dan bieden we een aantal mogelijkheden om er zelf met je klas mee aan de slag te gaan.

Ten eerste vind je op de website van *Euclides* een set

problemen rond de Stelling van Pythagoras met ondersteunende heuristiekbomen in pdf, klaar voor gebruik.



vakbladeuclides.nl/962heuristiekbomen

Wil je er dieper induiken, dan kun je aan de slag met onze LaTeX-bestanden om klikbare heuristiekbomen-pdf's te maken. Ondertussen zijn we gestart met het ontwikkelen van een gebruiksvriendelijke, webbased applicatie voor het maken en aanbieden van heuristiekbomen en het volgen van het gebruik.

Noten

- [1] Pólya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Zie: <https://doi.org/doi:10.2307/ij.ctvc773pk>
- [2] Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Zie: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-05012-8>
- [3] Bos, R. (2017). Structuring hints and heuristics in intelligent tutoring systems. In G. Aldon & T. Jana (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 436–439). Zie: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01632970>
- [4] Zie: vakbladeuclides.nl/961heuristiekbomen
- [5] Lemmink, R. (2019). *Improving Help-Seeking Behavior for Online Mathematical Problem-Solving Lessons* (Universiteit Utrecht). Zie: <https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/382857>

Over de auteurs

Rogier Bos werkt als universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en is redactielid van de *Euclides*. Theo van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde en onderzoeker voor het lectoraat Wiskundig en analytisch vermogen van professionals aan de Hogeschool Utrecht. E-mailadressen: r.d.bos@uu.nl en theo.vandenbogaart@hu.nl