



Het Flzier gericht op...

# Embodied cognition in wiskundeonderwijs

Zou het niet goed zijn leerlingen tijdens de wiskundeles niet alleen actief bezig te laten zijn met hun hersens, maar ook met hun lichaam? Rosa Alberto en Rogier Bos bespreken een embodied lesontwerp voor leren over radialen en de sinus.

## Inleiding

De grondslag voor Rosa's onderzoek vormt de psychologische theorie *embodied cognition*, een term die in het Engels beter klinkt dan in het Nederlands (belichaamde cognitie). Het centrale idee in deze theorie is dat je zintuigen niet alleen doorvoerkanalen naar de hersenen zijn en spieren niet alleen uitvoerders van bevelen; in plaats daarvan vormen ze samen met de hersens het volledige systeem dat cognitie faciliteert. Cognitie kan dus niet los gezien worden van waarnemen en handelen. Wiskundige cognitie gaat over abstracte zaken, bijvoorbeeld radialen en de sinus. Ondanks oprechte inspanningen in het wiskundeonderwijs reduceren veel leerlingen de sinus nog voor het examen tot een knop op hun rekenmachine. Van radialen onthouden ze vaak alleen de omrekenfactor naar graden, maar de relatie met de booglengte langs de eenheidscirkel gaat verloren. In het algemeen hebben leerlingen ook moeite de drie contexten waarin goniometrische functies voorkomen op de middelbare school – driehoeken (veelhoeken), eenheidscirkel en goniometrische functies – met elkaar te integreren. Rosa gaat deze problemen te lijf met een embodied onderwijsontwerp: een les met activiteiten waarin het leren wat de sinus is samenvalt met het leren coördineren van bewegingen en waarnemingen. Hieronder beschrijven we enkele van deze taken en de ervaringen tijdens proeflessen in de klas.

“Cognitie kun je niet los zien van waarnemen en handelen.”

## De beweging van radius naar radialen

Radialen vertalen de hoekgrootte naar de lengte van de bijbehorende boog op de eenheidscirkel. Een kromme boog

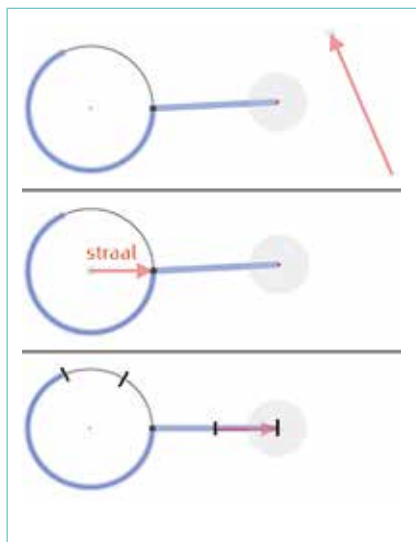
meten is wel even iets anders dan iets rechts meten. De eerste activiteit heeft als doel de cirkelbeweging en de rechte beweging met elkaar in verband te brengen. Op een touchscreen kunnen leerlingen twee uiteinden van een blauwe strook bewegen. De schermrand licht groen op als de strook dezelfde lengte behoudt, en anders rood, zie figuur 1. Dat doel kan worden bereikt als de leerlingen de lengte langs de boog in verband brengen met de rechte lengte. Tijdens de les riep een leerling uit op het moment dat het lukte: 'wat hier eraf is, is net zo lang als wat er daar bijkomt'. Een andere leerling zei: 'ja maar de strook is toch eigenlijk de  $x$ -as maar dan in een rondje?'. Het coördineren van de handbewegingen en waarnemingen gaat samen met deze wiskundige inzichten.



figuur 1 Verband tussen lengte van een boog en van een afgerolde strook

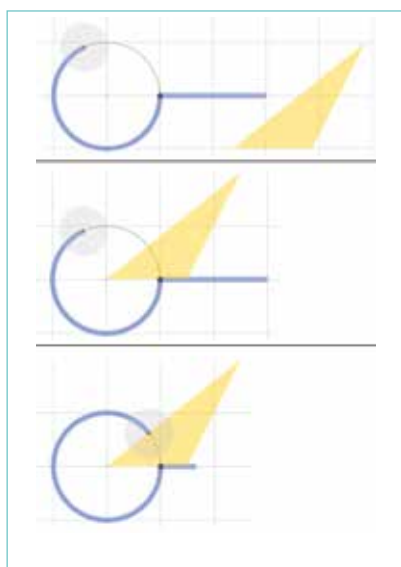
De tweede activiteit biedt leerlingen de mogelijkheid in te zien dat de eenheid 'radialen' letterlijk staat voor het aantal keer dat de straal (radius) in de boog past. In deze activiteit ligt de lengte van de strook vast en is gelijk aan de omtrek. De taak is om uit te zoeken hoeveel keer langer de omtrek is dan de straal. De rode pijl, zie figuur 2, kun je zo groot als de straal maken om vervolgens op het rechte stuk één straal af te passen. Daarna gebruik je de verschuiving van de blauwe strook om een radiaal op de cirkel te markeren. Dit herhaalt zich en uiteindelijk ontdekt de leerling dat de hele cirkelomtrek net iets meer dan zes stralen lang is. Veel leerlingen waren

teleurgesteld dat het niet precies zes keer paste. Ze kennen de formule voor de omtrek wel, maar herkennen  $2\pi$  pas als verhouding tussen straal en omtrek na een discussie met de docent.



figuur 2 Het afmeten van radialen met behulp van de radius

De derde activiteit ontlokt inzicht in het verband tussen hoekmeting in een driehoek en radialen op de cirkel. Hopelijk wordt zelfs duidelijk waarom we een boogje in een hoek zetten. Inmiddels is er een rooster zichtbaar waarbij de afstand tussen de lijnen gelijk is aan één straal. De leerling schuift een hoek van de driehoek naar het midden van de cirkel en legt een zijde langs de horizontale roosterlijn. Vervolgens rolt de leerling de strook af zodat deze de driehoek omsluit. De hoekgrootte is vervolgens horizontaal af te lezen, zie figuur 3.



figuur 3 De hoek wordt gemeten door het rollen van de strook

In de vierde activiteit rol je de blauwe strook af door met de hand naar rechts te bewegen. Het doel is om de hand op dezelfde hoogte te houden als het linker uiteinde van de strook. Als dit lukt kleurt de schermrand groen en blijft er een stip achter onder je vinger. Bij voldoende stippen ziet de leerling een grafiek ontstaan, zie figuur 4.

We nodigen de lezer uit om te beredeneren dat dit de sinuskrumme is. Op deze manier heeft de leerling al een bewegings- en visuele ervaring met betrekking tot de sinus, nog voordat deze formeel in de eenheidscirkel gedefinieerd is. Deze ervaringen kunnen daar dan juist de basis voor vormen.



figuur 4 De sinusgrafiek ontstaat door twee handbewegingen zorgvuldig te coördineren

“De kracht van de digitale omgeving is dat deze directe zintuigelijke feedback geeft op het handelen van de leerling!”

### Digitale feedback en embodiment

Bij elk van de taken is er een wisselwerking tussen inzicht in de wiskunde en het kunnen uitvoeren van een beweging. Dit is een centraal principe voor lesontwerp gebaseerd op embodied cognition en daarmee een belangrijk thema in Rosa's onderzoek. Een ander belangrijk thema is het gebruik van technologie om dit soort leren te bevorderen. De kracht van de digitale omgeving zit hem erin dat deze directe zintuigelijke feedback geeft op het handelen van de leerling. Normaal krijgt de leerling feedback op de uitkomst van een taak en nu op de beweging tijdens de taak. Het groen of rood oplichten van de schermrand moedigt de leerling aan de beweging op doordachte wijze aan te passen. Met de besproken taken worden alle drie genoemde contexten voor hoeken samengebracht rond de beweging van de blauwe strook. De leerlingen ontdekken de hoekmeting in radialen en de sinusgrafiek als inzichten terwijl bewegingen correct en doordacht worden uitgevoerd. Daarmee vormen die bewegingen concrete en onvergetelijke verankeringen van die concepten in >

verschillende contexten. Het hierboven besproken lesidee is ontworpen door Anna Shvarts, Arthur Bakker, Paul Drijvers en Rosa Alberto in het kader van het project *Digital turn in epistemology* gefinancierd door NWO en Noordhoff Uitgevers in samenwerking met Numworx.

De taken uit dit artikel kun je zelf uitproberen op:  
<https://embodieddesign.sites.uu.nl/activity/>

## Noten

- [1] Abrahamson, D. (2009). Embodied design: Constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 22–47. <http://doi.org/10.1007/s10649-008-9137-1>
- [2] Shvarts, A., Alberto, R., Bakker, A., Doorman M., & Drijvers P., (in press) Embodied instrumentation: Reification of sensorimotor activity into a mathematical artifact. Proceedings of the 14th ICTMT.

## Over de auteurs

Rosa Alberto doet promotieonderzoek aan het Freudenthal Instituut. Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut en redacteur voor *Euclides*.  
E-mailadressen: [r.a.alberto@uu.nl](mailto:r.a.alberto@uu.nl) en [r.d.bos@uu.nl](mailto:r.d.bos@uu.nl)