Rogier Bos

Warme worm op de wiskunde B-dag

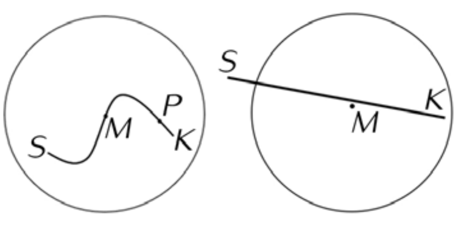
De Wiskunde B-dag is een jaarlijks terugkerende dag vol wiskunde georganiseerd door het Freudenthal Instituut. Leerlingen werken in groepen aan een opdracht die uitnodigt tot wiskundige exploratie en onderzoek. In dit artikel doet Rogier Bos verslag van de opdracht van 2018 en de prestaties van de leerlingen.

Inleiding

In de editie van 2018 stond een bekend open probleem in de wiskunde centraal: Mosers wormprobleem. Moser daagde wiskundigen uit een zo klein mogelijk warm dekentje voor zijn koude worm te maken, en wel zo dat die worm er nog in iedere houding onder zou passen. Nee, een slaapzakje is niet toegestaan. In wiskundige taal luidt het probleem als volgt: vind een (convex, compact) gebied in het vlak met een zo klein mogelijk oppervlak zo dat iedere kromme van lengte 1, na geschikte verschuiving en draaiing, erin past.
In eerste instantie lijkt het een onmogelijke taak om vooruitgang te boeken. Er zijn oneindig veel houdingen mogelijk en eindeloos veel mogelijkheden om die te schuiven en draaien. Hoe moet dat ooit tot een concreet dekentje leiden? Om leerlingen op gang te helpen, begonnen ze de dag met een aantal inleidende opgaven.

Cirkelvormige dekens

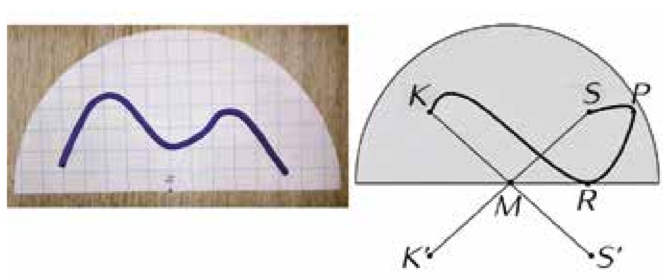
Wat is de kleinste *cirkelvormige* deken voor een slang met lengte 1? Natuurlijk is het antwoord dat de diameter 1 moet zijn. Nu vroegen we in opgave 1 om zo precies mogelijk uit te leggen waarom. Het ontlokte de leerlingen geen strak bewijs, misschien omdat euclidische meetkunde niet meer in het examenprogramma zit, misschien omdat het lastig is te herkennen dat er überhaupt nog iets te bewijzen is.
Maar dat is er wel, dus daar gaan we. Schuif de wormvorm zo dat het midden ervan op het midden van de cirkel valt, zie figuur 1.



figuur 1

Stel P is een punt op de worm. We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat P op de helft met de kop K ligt (het valt overigens niet mee om kop en staart van een echte worm te onderscheiden!). De lengte van lijnstuk MP is niet groter dan de lengte van het deel MP van de kromme worm; en dat is niet groter dan de lengte van de kromme worm MK, dus $|MP| \leq ½$. Daarmee ligt P binnen de cirkel.
De gestrekte worm krijgt tenminste één koud uiteinde onder een cirkel met diameter kleiner dan 1, zie figuur 1 rechts. Namelijk, met de driehoeksongelijkheid geldt $|KM| + |MS| \geq |KS| = 1$. Hieruit volgt dat $|KM| \geq ½$ of $|MS| \geq ½$. Dus K of S (of allebei) ligt minstens ½ van M af en ligt daarom buiten de cirkel (met straal ½).

Halve cirkels



figuur 2 Ontdekking (links) en bewijs (rechts) dat een halve schijf een goede deken is

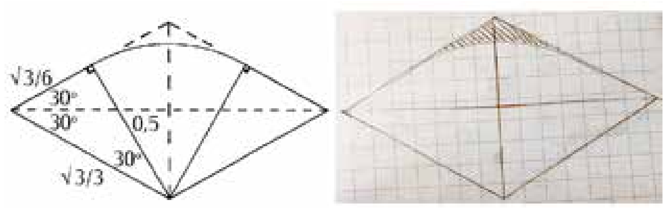
Gewapend met een ijzerdraadje en papier ontdekten veel leerlingen verderop in opgave 1 dat ook een halve cirkel nog als deken volstaat, zie figuur 2 links. Wiskundige Aram Meir gaf hiervoor een bewijs[1]. Dat gaat als volgt (hier alleen voor on-ronde wormvormen ($K \neq S$). Verplaats de worm zo dat KS evenwijdig aan de diameterrand van de halve schijf is en deze rand raakt, maar niet overschrijdt, zie figuur 2 rechts. Spiegel S en K in de rand en schuif de slang zo dat het snijpunt van SK' en

KS' op het middelpunt *M* van de cirkel valt. Laat *R* een raakpunt van de slang aan de rand zijn. Zonder verlies van algemeenheid beschouwen we een punt P op het slangdeel tussen *R* en *S*. Met behulp van de eigenschap van een driehoek dat een zwaartelijn niet langer is dan het gemiddelde van de aanliggende zijden, vinden we:

$|MP| \leq ½(|SP| + |PK'|) \leq ½(|SP| + |PR| + |RK'|) =$
$½(|SP| + |PR| + |RK|) \leq ½$, en klaar.

Dekentjes door de jaren heen

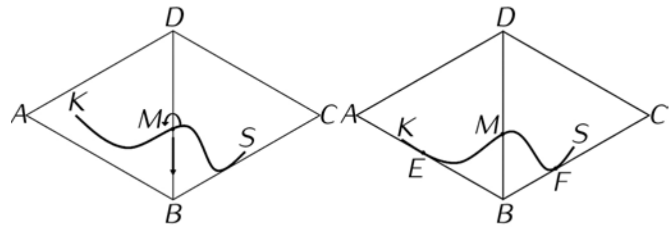
Wetzel[1] ontdekte dat je geen halve cirkel nodig hebt, maar dat een kleinere cirkelsector volstaat. Bovendien bleek je daar nog een hoekje uit weg te kunnen laten om op een oppervlak van afgerond 0,34423 uit te komen. Niet veel later, in 1974, kwamen Gerriets en Poole[2] met een ruitvormige deken minus een stukje met oppervlakte afgerond 0,28610, waarover straks meer. Achttien jaar later besefte dezelfde Poole, samen met Norwood en Laidacker[3], dat er ook nog een ander stukje van de ruit af kon met een ietwat kleiner resultaat: 0,27524, zie figuur 3 links. Tot slot, in 2006, vestigde Wei Wang[4] het huidige record met een dekentje met oppervlak 0,27091.



figuur 3 Links: de deken uit 1992[3], overtroffen door Wang[4] in 2006. Rechts: ook sommige leerlingen bedachten dat je een dergelijk stukje uit de ruit kon weglaten.

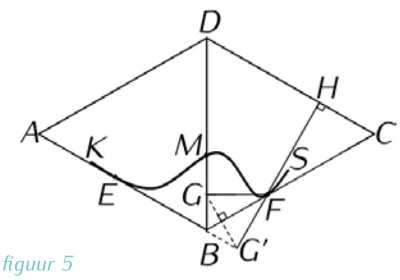
De hierboven besproken ruit bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken met hoogte ½ tegen elkaar. Om te bewijzen dat slangen in elke houding eronder passen moet je eerst uitleggen hoe: een positioneringsstrategie. Voor de ruit luidt die als volgt. Leg het midden *M* van de slang op de diagonaal *BD* zodat het staartdeel *MS* van de slang lijnstuk *BC* raakt, zie figuur 4 links. Dan schuif je *M* naar beneden en roteer je om *M* (zo dat staartdeel *MS* lijnstuk *BC* blijft raken) totdat het kopdeel *KM* lijnstuk *AB* raakt, zie figuur 4 rechts. In het uiterste geval gebeurt dat pas als *M* op *B* valt (let op: *B* is nog net onderdeel van lijnstuk *AB*).

Het was één van de grote uitdagingen van de voorbereidende opgaven om te bewijzen dat de slang op deze wijze lekker warm blijft. Het winnende team (van het Lorentz Casimir College te Eindhoven) was het enige team dat hier volledig in slaagde. Het gaat als volgt.



figuur 4 Een positioneringsstrategie voor slangen in de ruit

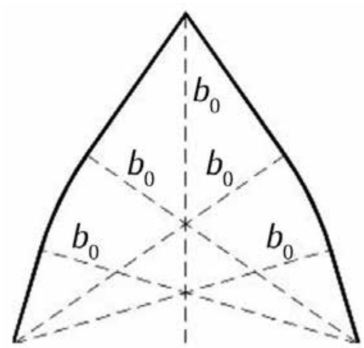
Kies een punt *F* waar de slang en *BC* 'raken', zie figuur 5. Laat loodlijnen vanuit *F* neer op de driehoekszijden *BD* (voetpunt *G*) en *CD* (voetpunt *H*). Spiegel *G* in *BC*.



figuur 5

Punt *G'* ligt op lijn *HF*, en *BG'* is evenwijdig aan *DC*, aangezien alle rechthoekige driehoeken in feite 30°-60°-90 °-driehoeken zijn. Je ziet vervolgens mooi dat $|HG'|$ gelijk is aan de hoogte ½. Het staartdeel *MS* moet meer dan *GF* en *FH* overbruggen.
Maar $|GF| + |FH| = |HG'| = ½$, dus *DC* wordt hooguit getoucheerd.

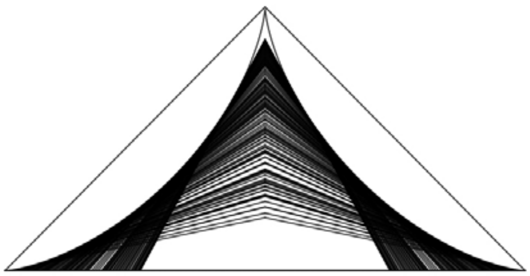
Maar is er wel een kleinste deken? Jazeker, uit Blaschkes Selectie Stelling volgt dat een kleinste convex dekentje moet bestaan (alhoewel mogelijk niet uniek). Een eerste ondergrens voor de oppervlakte werd gegeven door Wetzel[1] op basis van de Schaers Breedworm: de wormvorm (van lengte 1) waarvan de minimale breedte zo groot mogelijk is gemaakt, zie figuur 6. Wanneer je in combinatie met de gestrekte wormvorm hier een zo klein mogelijke convexe deken van maakt, dan heeft die een oppervlakte 0,21946. Door ook een V-vormige en U-vormige worm in de berekeningen mee te nemen, scherpten Khandhawit en zijn collega's[5] de ondergrens aan tot 0,23224.



figuur 6 Schaers breedworm[1] is in geen enkele richting smaller dan $b_0 = 0{,}43893$

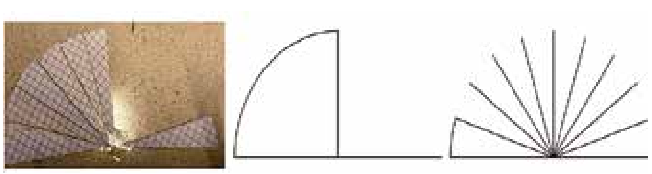
Niet-convexe dekens voor knikslangen

Waarom zou een kleinste deken niet bestaan? Een voorbeeld van een type slang waarvoor geen kleinste deken bestaat, zat in de wiskunde B-dagopdracht. Bij een moeilijk probleem is het vaak een goed idee eerst eens een eenvoudigere versie ervan op te lossen. Daarom gingen opgave 2 en 3 over de knikslang: een rechte, stijve slang met slechts een scharnier in het midden. Een half vierkant met diagonaal 1 is een prima deken. Als je echter het idee loslaat dat het dekentje convex moet zijn, dan is een halve astroïde nog een tikkie zuiniger, zie figuur 7.



figuur 7 Knikslangen onder een half vierkant dekentje, en nog beter onder een niet-convex astroïdevormig dekentje

Maar zonder convexiteit blijkt het hek van de dam. Een kwartcirkel met een dun lijntje is een prima dekentje voor een knikslang (hetgeen sommige leerlingen met knip- en plakwerk ontdekten, zie figuur 8). Is de knikhoek recht of kleiner, dan past hij onder de kwartcirkel. Is de knikhoek groter dan leg je één helft onder het lijntje. Maar dat principe kun je verfijnen. De hoek van de cirkelsector maak je zo klein als je wilt, als je maar voldoende extra dunne lijntjes toevoegt onder een veelvoud van de hoek van de sector.

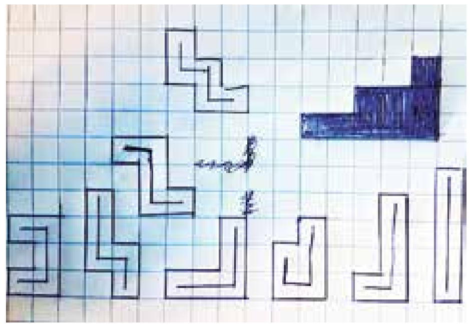


figuur 8 Niet-convexe dekens voor de knikslang

Aangezien je de lijntjes zo dun – en de hoek zo klein – mag maken als je wilt, kun je dus ook de oppervlakte van de deken zo klein maken als je wilt. Er is dus geen kleinste niet-convexe deken voor knikslangen!

Vierkantslangen

Aangezien niet iedere leerling zich even goed thuis voelt in de vlakke meetkunde, bood de opdracht ook een combinatorische invalshoek. Vierkantslangen bestaan uit vierkantjes in een rooster. We hebben aangenomen dat de slang niet op zichzelf ligt; dus dat de blokjes niet op elkaar vallen. In figuur 9 zie je de acht houdingen van een vierkantslang van lengte vijf met een passende deken met oppervlakte negen, zoals gevonden door een groep leerlingen. Doe zelf voor lengte 6!

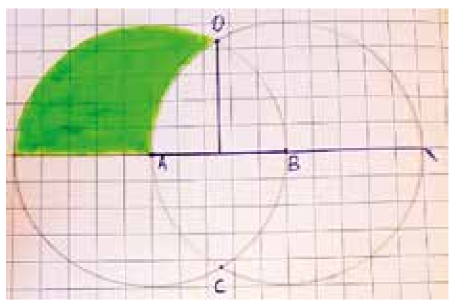


figuur 9 Vierkantslangen van lengte 5 met een geschikte deken

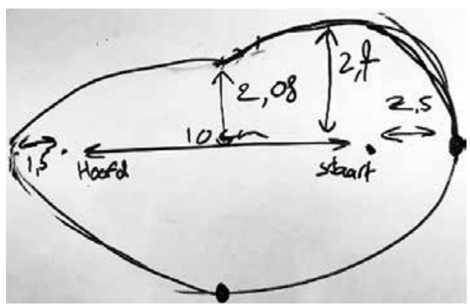
Met acht mogelijke houdingen is het zoeken naar een geschikte deken ineens veel overzichtelijker. Bewijzen dat het dekentje echt niet kleiner kan, is een grotere uitdaging (bij deze ook voor de lezer).

Ontwerpopdracht

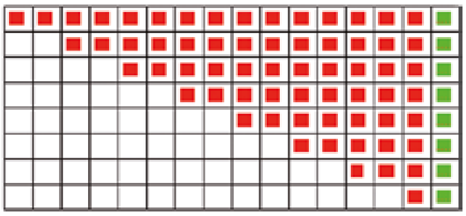
De middag besteedden leerlingen aan het ontwerp van een deken. Ze kregen daarbij de vrijheid om zelf (eerdere) beperkingen of vereenvoudigingen toe te passen. Dat leverde een keur aan dekens op voor vele type slangen. In figuur 10, 11 en 12 enkele voorbeelden.



figuur 10 Voor tweekniksslangen: een stijve slang met knikken op 1/3 en op 2/3



figuur 11 Als de kop en staart vastliggen, is de deken een ellips met een stuk eruit



figuur 12 Vierkantslangen van lengte 16. Lezersvraag: passen ze er allemaal onder?

Ieder jaar biedt de wiskunde B-dag een unieke kans voor leerlingen (en docenten) om te ervaren dat de wiskunde niet af is en dat je bovendien zelf kunt nadenken en vooruitgang kunt boeken aan de rafelrand van de wiskunde. Gun je leerlingen zo'n ervaring en schrijf je in voor de wiskunde B-dag 2020!

Noten

[1] Wetzel, J. E. (1973). Sectorial Covers for Curves of Constant Length. *Canadian Mathematical Bulletin, 16*(03).*https://doi.org/10.4153/cmb-1973-058-8*

[2] Gerriets, J., & Poole, G. (1974). Convex Regions Which Cover Arcs of Constant Length. *The American Mathematical Monthly, 81*(1), *6. https://doi.org/10.2307/2318909*

[3] Norwood, R., Poole, G., & Laidacker, M. (1992). The Worm Problem of Leo Moser. *Discrete & Computational Geometry, 7(1),* 153–162. *https://doi.org/10.1007/BF02187832*

[4] Wang, W. (2006). An improved upper bound for the worm problem. *Acta Mathematica Sinica, 49(4),* 835–846.

[5] Khandhawit, T., Pagonakis, D., & Sriswasdi, S. (2013). Lower Bound for Convex Hull Area and Universal Cover Problems. *International Journal of Computational Geometry & Applications, 23*(3), 6. *https://doi.org/10.1142/S0218195913500076*

Over de auteur

Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en redactielid van *Euclides*. Hij is lid en coördinator van het Wiskunde B-dag ontwerpteam.
E-mailadres: *r.d.bos@uu.nl*