

Onderzoekend wiskunde leren

Afgelopen drie jaar liep het MERIA-project over onderzoekend wiskunde leren, een door de EU gefinancierde samenwerking van onderzoekers en docenten uit Denemarken, Kroatië, Slovenië en Nederland. Carolien Boss-Reus van het Utrechts Stedelijk Gymnasium en Margot Rijnierse van Cartesius 2 namen deel aan het project en werden geïnterviewd. Rogier Bos bespreekt de uitkomsten van het project.

Inleiding

Wiskundeonderzoek begin je meestal vanuit een probleem of onderzoekssituatie, of soms slechts vanuit observaties waaruit je een probleem of interessante situatie probeert af te leiden. Vervolgens zijn er talloze vaardigheden nodig om het probleem aan te pakken, zoals vereenvoudigen, ordenen en structureren, visualiseren, redeneren en experimenteren. Tot slot deel je je bevindingen met anderen. Je kunt je afvragen waar het goed voor is deze processen een rol te geven in het wiskundeonderwijs. Carolien: 'Ik denk dat je een betere probleemplosser wordt als je onderzoekend leert. Uiteindelijk ga je de wereld in waar ook niet alles voorgekauwd en gestructureerd is. Maar nog niet alle leerlingen realiseren zich dit.' Sommige docenten vinden het belangrijk dat leerlingen leren onderzoeken en kennismaken met bovengenoemde vaardigheden. Anderen zien dat je bovendien beter leert door onderzoekend te leren. Een voorbeeld: één van de lessen die we getest hebben gaat over vergroting bij meetkunde. Het probleem dat de tweedeklassers werd voorgelegd was: als ik een vlakke figuur k keer zo groot maak, hoeveel groter wordt dan het oppervlak? Normaal leggen we leerlingen zeer didactisch en met geduld uit dat de evenredigheidsfactor k^2 is. Nu moesten de leerlingen het doen met een opfrisser over vergroting en dan: aan de slag. Werkt dat? Het antwoord is: niet zomaar. In het MERIA-project besteedden we veel aandacht aan de opbouw van de les en de keuze van probleemsituatie. Beide factoren blijken van cruciaal belang te zijn voor een geslaagde onderzoekend-leren-les.

Opbouw van een onderzoekend-leren-les

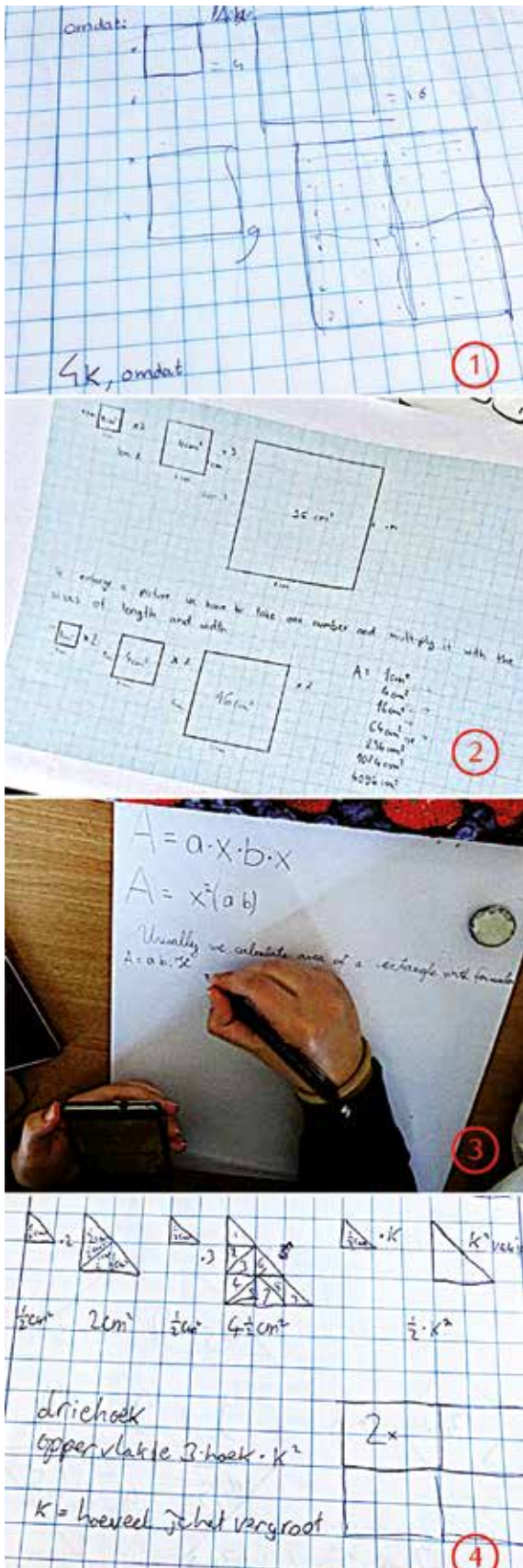
Meestal hebben leerlingen en docenten de onuitgesproken afspraak dat de docent uitleg geeft, zodra dat nodig is. Een grote uitdaging bij onderzoekend leren is dit ongeschreven contract te doorbreken. Dit is in de jaren '70 en '80 van de vorige eeuw beschreven door

wiskundeonderwijsonderzoeker Guy Brousseau in zijn theorie van didactische situaties. Hij benadrukte dat als leerlingen aan het werk gaan, de docent de gelegenheid moet gebruiken om leerlingen te observeren, in plaats van hulp en hints aan te bieden. Deze zogeheten *a-didactische* houding van de docent geeft leerlingen de ruimte om met een aanpak te komen die voor hen betekenisvol is. Margot: 'Dat je stil bent als de leerlingen aan het werk gaan is misschien een klein ding, maar het heeft mij heel erg geholpen.'

Een andere grote uitdaging is om de verschillende benaderingen door leerlingen te waarderen en te laten bijdragen aan het leerresultaat van de les. In navolging van Brousseau reserveerden we hier in de lesplannen van het project veel tijd voor, in drie achtereenvolgende fasen. Eerst presenteert een aantal groepjes hun resultaten. Het selecteren van uitwerkingen voor de klassikale presentaties is een belangrijke taak voor de docent tijdens de a-didactische fase. De gekozen uitwerkingen hoeven absoluut niet correct of volledig te zijn.

Na de presentaties volgt een discussie met de groep over de toepasbaarheid en de juistheid. Eventueel worden de aanpakken onderling vergeleken, bijvoorbeeld op efficiëntie en duidelijkheid. Uiteindelijk pakt de docent de didactische rol weer op. De docent legt uit hoe de resultaten van de leerlingen en de aansluitende discussie gerelateerd zijn aan het leerdoel. Daarbij probeert hij de informele benaderingen van de leerlingen te verbinden met de meer formele wiskunde uit het lesboek.

“Ik denk dat je een betere probleemplosser wordt als je onderzoekend leert.”



figuur 1 Verschillende benaderingen van het vergrotingsprobleem door leerlingen uit 2 vwo

“Onderzoekend leren begint met een context, een goed probleem.”

Ontdekkingen van leerlingen

Even terug naar de vergrotingsopdracht. In figuur 1 zie je vier uitwerkingen van leerlingen. Het bovenste resultaat ① (antwoord: $4k$) zou een docent in eerste instantie misschien gauw opzijschuiven, maar toch hebben leerlingen ontdekt dat als je de zijde verdubbelt, de oppervlakte met een factor 4 groter wordt. Bovendien tonen ze zich verward over de rol van de variabele k . Daarin zullen ze niet de eersten en ook niet de laatsten zijn. Een klassikale presentatie van dit werk geeft een goede gelegenheid om dit aan de orde te laten komen. De groep daaronder ② heeft enkele voorbeelden en een soort tabel: zeker een goed beginpunt voor een discussie over de regelmaat. De groep daaronder ③ heeft een algebraïsch bewijs voor rechthoeken. Goede kwestie voor de groep: voor welke andere vlakke figuren werkt deze aanpak? Het onderste resultaat ④ kan daar mooi een antwoord op geven, want zij hebben een idee over hoe het werkt bij halve vierkanten.

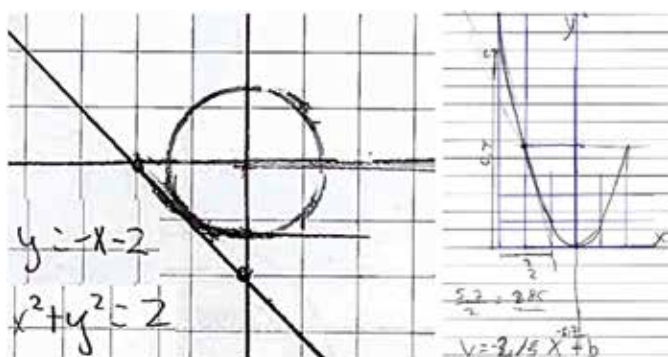
Je ziet dat leerlingen best ver kunnen komen, zeker als een klas de krachten bundelt. Vanuit het werk van de leerlingen komt de juiste hypothese naar voren (kortgezegd: k^2) en een bewijs voor een specifiek geval. Voor deze onderzoeksles rest de docent de taak het resultaat duidelijk te organiseren en te bekrachtigen als het leerdoel.

Carolien zegt over het hele proces:

‘Het is belangrijk dat je een goede vraag of probleem hebt, want leerlingen hebben richting nodig. Je moet leerlingen de ruimte geven. Er kan dan van alles uitkomen, wat leerlingen in hun eigen taal gaan formuleren. Soms ontdekken ze het concept dat je wilt en soms niet. De rol van de docent daarin kan zijn om alles waarde te geven, maar ook uiteindelijk de weg te laten zien die de wiskunde heeft genomen. Maar onderzoekend leren begint met een context, een goed probleem. Als ze dan iets onderzocht hebben, dan heb ik het idee dat zo’n concept beter blijft hangen, omdat het echt van hen is. Het kost alleen ook wel heel veel tijd. Dus in mijn beleving kun je ze niet de hele wiskunde op deze manier laten ontdekken. Ik zie het nu als iets wat je af en toe doet... je zou wel bij elk onderwerp iets uit de kast willen kunnen trekken.’ >

Realistische contexten

Een goede manier om te voorkomen dat leerlingen niet weten hoe ze moeten beginnen, is een (probleem) situatie te kiezen waarin leerlingen zich goed thuis voelen, die betekenisvol voor ze is. Freudenthal noemde dat 'realistisch' in de jaren '80. Dat zie je goed bij het vergrotingsprobleem: oppervlakte van vlakke figuren is een wiskundeonderwerp waarmee leerlingen al sinds vroeg op de basisschool ervaring hebben. Carolien: 'dat "realistisch" in Realistisch Wiskunde Onderwijs gewoon "betekenisvol" is en dat contexten niet per sé uit de werkelijkheid (dat het bijvoorbeeld over een fiets moet gaan), maar ook uit de wiskunde zelf kunnen komen is een mooi inzicht.'



figuur 2 Een glijbaanontwerp met een cirkel en een rakende lijn en een ontwerp op basis van het aflezen van de richtingscoëfficiënt

Ontwerpen van een glijbaan

Een ander MERIA-scenario is wel gebaseerd op een situatie uit de werkelijkheid. Vierdeklassers wordt gevraagd een glijbaan (of skischans) te ontwerpen, bestaande uit een recht deel en een gekromd deel die elkaar glad raken. Voor beide delen moet een vergelijking worden gemaakt. We noemen drie aspecten die deze taak tot zo'n uitstekende inleiding op de afgeleide maakt. Ten eerste is de algebra van vergelijkingen voor lijnen en krommen een betekenisvol onderwerp voor havo- en vwo-leerlingen: ze zijn er de hele onderbouw mee bezig geweest. Ten tweede is ook de context realistisch: die doet een beroep op informele kennis van leerlingen over steilheid en gladheid; noties die nu gemathematiseerd moeten worden. Ten derde dringt de taak door tot de essentie van de wiskundige notie van helling. Dit wordt mooi geïllustreerd door de volgende opmerking van een leerling uit een groepje dat zojuist een oplossing met de raaklijn aan een cirkel had geproduceerd, zie figuur 2 links. De docent daagde hen uit ook een ontwerp met een parabool te maken, waarop de leerling zei: 'maar in dat geval hebben we geen manier om de steilheid in een punt te berekenen'. Precies! Gelukkig had een ander groepje in de klas ideeën hoe je dit kon doen door eerst een raaklijn aan de parabool te tekenen en daar dan een vergelijking

voor op te stellen door punten af te lezen, zie figuur 2 rechts. Een getalenteerd ander groepje vond de steilheid a door met behulp van algebra vast te stellen wanneer de lijn $y = ax - 1$ en de parabool $y = x^2$ precies één snijpunt hebben. Weer een ander groepje ging met GeoGebra te werk en probeerde eindeloos in te zoomen om vast te stellen of de lijn wel raakte aan hun kromme. Al met al leverde dit genoeg aanknopingspunten voor de docent om aan het eind van de les het concept helling van een kromme te introduceren als helling van de raaklijn aan de kromme en enkele technieken te bespreken om die helling te berekenen.

“Investeren in het zelf ontdekken van een begrip of resultaat betaalt zich terug, omdat het beter binnenkomt en beter beklijft.”

Implementatie

Als het gaat om het implementeren van nieuwe lesideeën denken we vaak aan hoeveel tijd dat gaat kosten. Carolien: 'De werkdruk is hoog en dit kost tijd. Als er meer tijd en geld zou zijn, dan zijn er natuurlijk meer prioriteiten, maar ik vind dit wel belangrijk.' Binnen het MERIA-project zijn lessen ontwikkeld op basis van het curriculum. Het doel was aan te tonen dat je onderzoekend onderwijs kunt inpassen in het reguliere lesprogramma. Investeren in het zelf ontdekken van een begrip of resultaat betaalt zich terug, omdat het beter binnenkomt en beter beklijft. Als docent kun je ertegen opzien van je programma af te wijken, maar, zoals Carolien zegt: 'De leerlingen vonden het prima. Die staan er niet van te kijken. We doen al wiskundige denkactiviteiten. De leerlingen vinden het wel leuk als het een keer zonder boek is.' En Margot: 'Die glijbaan staat gewoon in mijn lesprogramma.'

Lesson study als afsluiting

Een grote conferentie met alle betrokken docenten en onderzoekers vormde de afsluiting van het project. Carolien: 'Het was heel inspirerend om met een groep docenten bij elkaar te zitten die allemaal wat meer met hun lessen willen doen.' De conferentie werd afgesloten met een publieke les in de traditie van Lesson Study. Met alle honderd aanwezigen observeerden we een les op basis van een MERIA-lesplan, gevolgd door een nabespreking. Carolien: 'De Lesson Study met zijn

honderden was briljant. Na drie minuten nabespreken van de publieke les dacht ik dat alles wel gezegd was, en toen kwam er nog veel meer interessants. Als je met meer mensen langer de tijd neemt, dan komt er steeds meer uit een nabespreking!”

Zin om mee te doen?

In december 2019 gaat een vervolg-EU Erasmus⁺-project van start. Het doel is dat docenten zelf lesplannen voor onderzoekend leren ontwikkelen in een Lesson Study traject. Typisch voor Lesson Study zijn: samenwerking met collega's, test- en verbeterfases en observatie met meerdere collega's van een testles. Dat laatste zal eerder met vier of vijf collega's plaatsvinden dan met honderd, zoals hierboven beschreven. Mocht je met een groep collega's interesse hebben om deel te nemen aan dit project, stuur dan een mail naar r.d.bos@uu.nl.

Als je meer met onderzoekend leren in je lessen wilt doen zijn lesplannen en ondersteunend materiaal beschikbaar op <https://meria-project.eu/> of:



vakbladeuclides.nl/952bos

Over de auteur

Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Ook maakt hij sinds kort deel uit van de redactie van de *Euclides*. E-mailadres: r.d.bos@uu.nl

