ONCONVENTIONEEL DIFFERENTIËREN

Rogier Bos

Differentiëren, maar dan anders. Rogier Bos verkent alternatieve routes om de differentiaalrekening te introduceren.

Inleiding

'Waarom doen we bij het berekenen van de helling eigenlijk $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en niet $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, 'Waarom schrijven we de ene keer $f(x) = \dots$ en $f'(x) = \dots$ en de andere keer $y = \dots$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$?' en 'Waarom is $y = \sqrt[3]{x}$ niet differentieerbaar in 0; er zit toch geen knik?'.

Stellen jouw leerlingen deze vragen ook wel eens als je differentiëren behandelt in de klas? Heb je dan een goed antwoord klaar? Het antwoord op elk van deze vragen is dat het iets met conventies te maken heeft; conventies die het begrip van *differentiëren* niet altijd vergemakkelijken. Er is een internationale traditie om differentiëren via functies en het differentiaalquotiënt te leren. In dit artikel ontrafelen we en bekritiseren we die traditie; niet met het doel dat het helemaal anders moet, maar wel omdat leerlingen een goed antwoord op bovenstaande vragen verdienen. Bovendien raakt door de traditionele benadering de essentie en het wonder van differentiëren weleens uit het zicht: dat 'de meeste' grafieken lokaal lineair zijn!

Functies

Waarom hechten we zo'n belang aan functies in het secundair onderwijs? Dat de afhankelijkheid van een variabele tot een andere zo is dat deze als functie ervan geschreven kan worden is de uitzondering, niet de regel, globaal bekeken (lokaal heb je natuurlijk de *impliciete functiestelling*).

En als het wel eens lukt: wat voegt het toe om dit te benoemen en de functienotatie te introduceren? Deze uitspraak is niet alleen een provocatie, maar een dagelijks gevoelde realiteit: sommige leerlingen blijven tot het eindexamen aan toe stug schrijven $y = x^2$ in plaats van $f(x) = x^2$.

Verwarring alom met notaties $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $f'(x)$, en zelfs y' door elkaar.

Het enige wat de introductie van een functie f om de relatie $y = f(x)$ tussen x en y te beschrijven wil zeggen is dat bij iedere x precies één y hoort. Is dat van belang om te differentiëren? Absoluut niet. Wordt het leren van differentiëren makkelijker om het in de context van functies te doen? Wellicht niet.

Veel relaties tussen variabelen, in het bijzonder grootheden in de natuurkunde, worden ook niet op basis van functies geïntroduceerd. Dan heb ik het over de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$, de ideale gaswet $pV = RTn$ of de lenzenformule $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

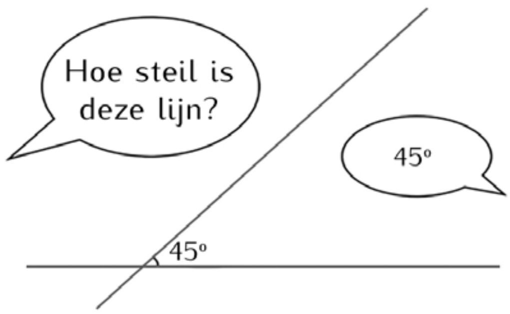
Het vrijmaken van een variabele maakt in deze voorbeelden de algebra niet eenvoudiger. Veel figuren laten zich beter door iets anders dan een functie beschrijven, bijvoorbeeld als nulpuntsverzameling of als geparametriseerde kromme. Zodra je een beetje serieuze dynamica gaat doen (kogel- of planeetbaan) gebruik je die laatste en geen functies.

De functiefixatie leidt er ook toe dat leerlingen bij parabolen direct aan $y = x^2$ denken. En waarom doen wij, docenten, ze dat aan? Waarom houden we de algebraïsche veelzijdigheid van de parabool, bijvoorbeeld $x = y^2$ of $x + y = (x - y)^2$, zo angstvallig verborgen?

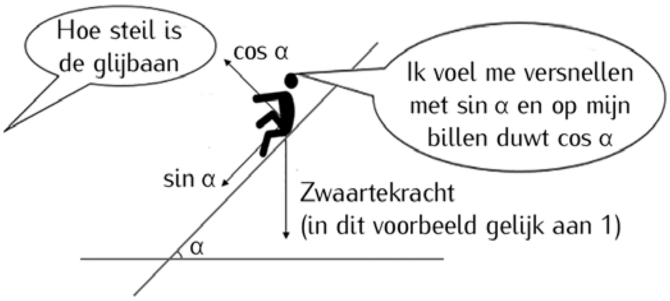
Om te differentiëren en over helling te praten hebben we functies zeker niet nodig. Hieronder bekijken we de mogelijkheid om *impliciet* te differentiëren: zonder functies. Maar *impliciet differentiëren* definieer je normaal met behulp van een differentiaalquotient (net als normaal differentiëren). Ook dat is een conventie, waarvoor alternatieven zijn.

Quotiënt

Wanneer je leerlingen vraagt de steilheid van een lijn te kwantificeren is $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ waarschijnlijk niet het eerste wat in ze opkomt. Natuurlijk noemen ze de hoek van die lijn met de 'grond'... Oké, dan zitten ze er maar een tangens vanaf.



Maar waarom zou je niet kijken naar de sinus, cosinus of cotangens van die hoek? De steilheid van bijvoorbeeld een glijbaan *ervaar* je (als je erop zit) als de normaalkracht die op je billen duwt en de zwaartekrachtscomponent evenwijdig aan het vlak die zorgt dat je naar beneden raast. Hoe steiler de glijbaan des te kleiner de normaalkracht en groter de evenwijdige component. Laten deze twee nu juist evenredig zijn met de cosinus en sinus van de hoek. Deze goniometrische functies passen dus beter bij de ervaring van steilheid.



De aandacht voor het quotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (en daarmee tan α)

is natuurlijk verbonden met de *algebraïsche* beschrijving

van de lijn als $y = ax + b$, met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, de richtingscoëfficiënt.

Dit komt in het curriculum aan bod voor *differentiëren*. Impliciet wordt dan de afslag richting het quotiënt en functies al genomen met y vrijgemaakt aan de linkerkant. De uitdrukking $x = ay + b$, met $a = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ = cotan α, krijgt meestal geen aandacht, laat staan mijn favoriet, $(y - y_0)\Delta x = (x - x_0)\Delta y$. Die laatste kan ook mooi geschreven worden als $(y - y_0)\cos\alpha = (x - x_0)\sin\alpha$. Leerlingen zijn vaak verward over of het nu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ of $\frac{\Delta x}{\Delta y}$

moet zijn en dat is jammer. In de praktijk zie je namelijk vaak beide uitdrukkingen en kun je niet echt aangeven of één van de twee beter is. Mijn auto geeft mijn snelheid in kilometer per uur, maar mijn hardloop-app vertelt me mijn tijd per kilometer. Over auto's gesproken: toen ik voor het eerst leerde over benzineverbruik werd dat uitgedrukt in kilometers per liter. Maar mijn huidige Polo geeft het verbruik in liters per 100 km. Voor hardlopers is het ook vaak interessant om te weten dat ze bijvoorbeeld 5 km in 20 minuten lopen. Daarbij hoort dan een vergelijking $20s = 5t$ (met s de afstand in km en t de tijd in minuten). Het beschrijven en nemen van ratio's is lang niet altijd zo verhelderend en noodzakelijk. Het inzicht in de *evenredigheid* is het centrale punt.

Een andere insteek bij differentiëren

Geen functies en geen quotiënt, wat blijft er dan nog over van differentiëren, impliciet of niet?
Welnu, je kunt als volgt te werk gaan. Je begint met een of andere vergelijking, waarin je twee variabelen kiest, zeg x en y. We onderzoeken hoe een kleine variatie Δx in de ene variabele x samenhangt met een variatie Δy in een andere variabele y, terwijl we de overige variabelen constant houden. We bekijken niet het quotiënt

($\frac{\Delta y}{\Delta x}$ of $\frac{\Delta x}{\Delta y}$), maar onderzoeken of er *bij benadering*

sprake is van een evenredig verband tussen Δx en Δy.
Er is sprake van differentieerbaarheid dan en slechts dan als dat verband er is, en dan is de bijbehorende grafiek *lokaal lineair*.

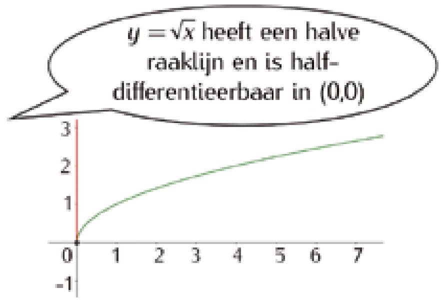
Voorbeeld 1 Gaswet
Om te illustreren hoe deze aanpak werkt, zie hier een voorbeeld met de ideale gaswet $pV = RTn$. Stel: de temperatuur en het aantal deeltjes is constant en wel zo dat $RTn = 1$. Dan staat er $pV = 1$. We willen weten wat, bij vaste p en V, het verband is tussen Δp en ΔV als deze beide klein zijn. Invullen maar: $(p + \Delta p)(V + \Delta V) =1$. Oftewel $pV + p\Delta V + V\Delta p + \Delta p\Delta V = 1$. Natuurlijk is $\Delta p\Delta V$ heel klein, dus die gaan we verwaarlozen; bovendien kunnen we gebruiken $pV = 1$. Dus we vinden $p\Delta V + V\Delta p \approx 0$, oftewel $p\Delta V \approx - V\Delta p$. Dus Δp en ΔV zijn bij benadering evenredig! In feite hebben we nu de afgeleide $\frac{dV}{dp}$ van $V = \frac{1}{p}$ gevonden.
Herschrijf maar:
$$\frac{\Delta V}{\Delta p} \approx -\frac{V}{p} = -\frac{1}{p^2}$$
Merk op dat omgekeerd ook $\frac{\Delta p}{\Delta V} \approx -\frac{p}{V} = -\frac{1}{V^2}$.

Het is rekenkundig wel heel prettig dat bij deze afleiding algebraïsch rekenen met breuken niet nodig is (zoals normaal gesproken als je $f(x) = 1/x$ met het differentiaalquotiënt te lijf gaat). Dat lijkt me didactisch een pluspunt. Waarom zou je iets conceptueel moeilijks proberen uit te leggen met iets wat technisch rekenkundig moeilijk is?

Voorbeeld 2 $y = \sqrt{x}$
Een ander voorbeeld is $y = \sqrt{x}$. Dan gaat het als volgt: $y + \Delta y = \sqrt{x+\Delta x}$. Kwadrateren en uitwerken levert $y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = x + \Delta x$. Dus $y^2 + 2y\Delta y \approx x + \Delta x$. Gebruiken we $y^2 = x$, dan vinden we opnieuw dat Δx en Δy evenredig zijn: $2y\Delta y \approx \Delta x$. Hieruit kun je desgewenst afleiden: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (of $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2y$, de bekende afgeleide van $x = y^2$.) Opnieuw hebben we geen lastige algebra met wortels en breuken, maar een echt eenvoudige berekening. We hebben nu geen ≈ meer gebruikt en zijn overgegaan op formele afgeleide notatie. Merk op dat, net als in de gangbare benadering op school, de limietprocedure hier informeel wordt toegepast.

Raaklijn en differentieerbaarheid

Voor het opstellen van een vergelijking van de raaklijn heb je het quotiënt overigens niet nodig; dat kan met behulp van mijn favoriete vergelijking voor een lijn, $(y - y_0)\Delta x = (x - x_0)\Delta y$. Stel je wilt de raaklijn aan $y = \sqrt{x}$ in (4, 2).
Invullen van $2y\Delta y = \Delta x$ geeft $(y - y_0)2y\Delta y = (x - x_0)\Delta y$. Het punt (4, 2) invullen en Δy uitdelen geeft $4(y - 2) = x - 4$. Voilà! Vul het punt (0, 0) in en je vindt voor de raaklijn $x\Delta y = 0$, ofwel $x = 0$. Bovendien volgt uit $0 + \Delta y = \sqrt{0+\Delta x}$ dat $\Delta y \geq 0$; ofwel er is eigenlijk een halve raaklijn. In dit geval bestaat $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ niet, maar het zou niet misstaan te zeggen dat $y = \sqrt{x}$ rechts-differentieerbaar is in (0, 0).



Samengevat wil ik hier onder de aandacht brengen dat je differentieerbaarheid kunt zien als evenredigheid (bij benadering) van de variaties van de betrokken variabelen. Functies zijn hierbij niet nodig en het nemen van het quotiënt kan gezien worden als een *after thought*. Dat bij deze aanpak het uit de definitie berekenen van een afgeleide eenvoudiger wordt is een enorme didactische bonus.

Over de auteur

Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: *r.d.bos@uu.nl*