MEETKUNDIGE KIJK OP MODULOREKENEN

Rogier Bos

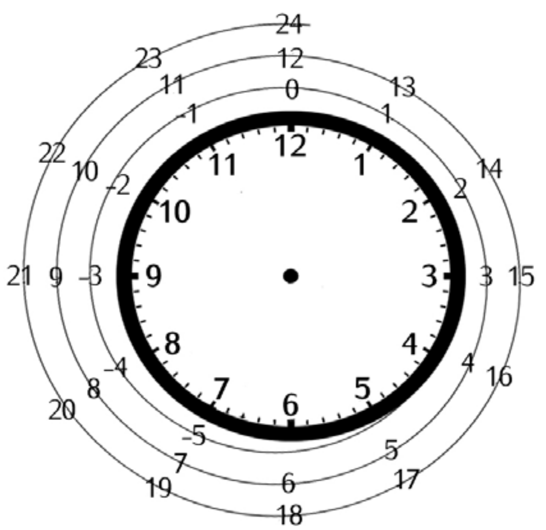
IMPRESSIE VAN DE WISKUNDE B-DAG-OPDRACHT 2017

Jaarlijks organiseert het Freudenthal Instituut de wiskunde B-dag. Op de deelnemende scholen gaan groepjes leerlingen een hele dag aan de slag met een uitdagende opdracht van een onderzoekend karakter. Het zijn opdrachten met een lage instap en een hoog plafond, die vaardigheden vereisen die ook in de context van wiskundige denkactiviteiten worden genoemd, zoals problemen aanpakken, modelleren en abstraheren. Een verslag van Rogier Bos.

Dit jaar deden zo'n 4000 leerlingen in 1000 groepjes op 100 scholen mee. Het waren vooral wiskunde B-leerlingen uit 5 vwo, maar er deden ook havisten en vierdeklassers mee. De uiteindelijke winnaar was een groepje van het Ulenhofcollege uit Doetinchem.

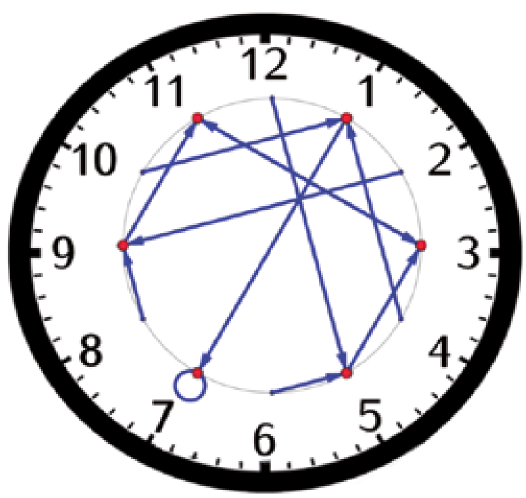
Modulorekenen en de klok

De opdracht ging over een meetkundige kijk op modulorekenen. Een toegankelijke instap tot dit onderwerp vormt het rekenen met de 12-urige klok. Natuurlijk is 3 uur min 5 uur niet -2 uur, maar 10 uur. Evenzo is 9 uur plus 18 uur niet 27 uur, maar 3 uur.
Een mooi beeld hierbij is de getallenlijn opgerold om de klok, zie figuur 1, zodat bijvoorbeeld -4, 8, 20 met elkaar geïdentificeerd worden. Bij rekenen modulo 12 beschouw je alle getallen die 12 van elkaar verschillen als equivalent. We schrijven bijvoorbeeld $-4 \equiv 8 \pmod{12}$.



figuur 1 De getallenlijn gewikkeld om de klok als model voor modulorekenen

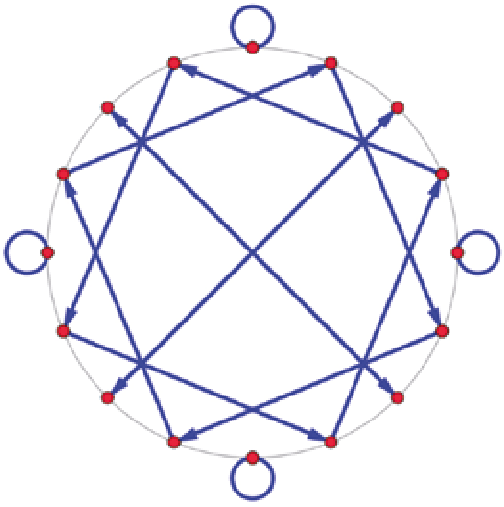
Modulorekenen wordt bij vwo wiskunde D weleens behandeld als cryptografie aan de orde komt. In de wiskunde B-opdracht 2017 proberen we leerlingen ervoor te interesseren op esthetische gronden. Laten we bijvoorbeeld eens naar de functie $f(x) = 2x + 5$ kijken.
Deze levert het plaatje van figuur 2 op.



figuur 2 Pijlen op de klok bij $f(x) = 2x + 5$

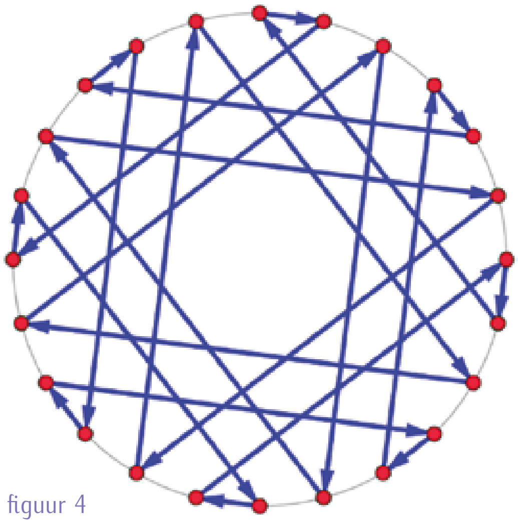
Misschien nog niet oogverblindend, maar heb geduld.
Een pijl wijst van x naar $f(x)$, bijvoorbeeld in figuur 2 zie je een pijl van 4 naar $2 \cdot 4 + 5 = 13 \equiv 1 \pmod{12}$. Een lusje staat voor een pijl van een getal naar zichzelf: $2 \cdot 7 + 5 = 19 \equiv 7 \pmod{12}$. In de opdracht noemen we deze plaatjes *pijlenklokken*.
Niemand houd je tegen om pijlenklokken (een soort grafieken voor modulorekenen) ook te maken modulo een ander getal. In het voorbeeld in figuur 3 rekenen we modulo 16 en is de functie f gedefinieerd door $f(x) = 5x$.

Je krijgt dan een mooi draaisymmetrisch plaatje met twee vierkanten en vier lusjes.

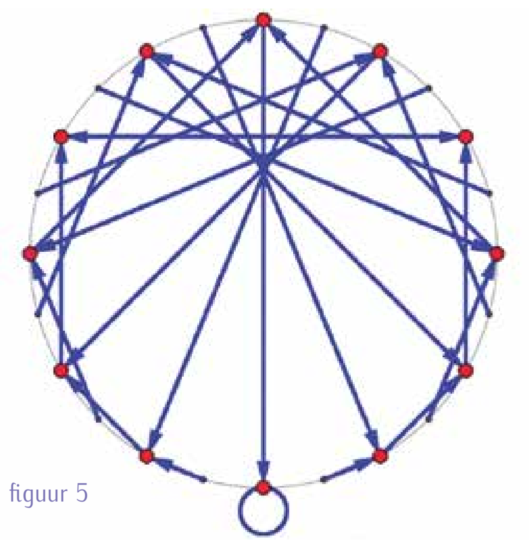


figuur 3 Een pijlenklok bij $f(x) = 5x$ modulo 16

Er is een GeoGebra-applicatie[1] waarmee je zelf deze pijlenklokken kunt maken voor verschillende functies modulo verschillende getallen *n*. Probeer maar eens de plaatjes van figuur 4 en 5 te maken.



figuur 4



figuur 5

De uitdaging voor de leerlingen is om de meetkundige patronen in de plaatjes in verband te brengen met de functies, met name van de vorm $f(x) = ax + b$, en *n*. Deze uitdaging valt op te delen in drie stappen, die in het algemeen goed van toepassing zijn bij onderzoekend met wiskunde bezig zijn:

(1) Observeer en stel vragen.
(2) Zoek en beschrijf regelmaat en structuur. Vorm hypothesen
(3) Bewijs de hypothesen.

Regelmaat en structuur

Leerlingen blijken met name sterk in de stap (2). In een van de opgaven wordt gevraagd wat het verband is tussen het aantal lusjes in een pijlenklok en de getallen *a* en *n*, als de functie van de vorm $f(x) = ax$ is. De aanpak van het groepje in figuur 6 is typisch.

figuur 6 Leerlingen onderzochten het verband tussen het aantal lusjes en de getallen *a* en *n*

De leerlingen van dit groepje gingen met GeoGebra alle plaatjes langs en maakten bovenstaande tabel. Het knappe is dat ze hier de juiste formule voor het aantal lusjes uit induceerden: ggd($a - 1$, n). Daarbij moet worden opgemerkt dat de ggd in een eerdere opgave ter sprake was gekomen, wat het groepje wellicht op het juiste spoor bracht. Over het algemeen komen leerlingen met zowel goede als nogal wilde uitspraken op basis van ontdekte patronen. Meestal zijn ze er zich van bewust dat het slechts hypotheses zijn, maar sommigen geven, als er expliciet om een bewijs gevraagd wordt, alleen voorbeelden. We zouden toch willen dat wiskunde B-leerlingen uit de vijfde en zesde klas het verschil weten tussen een vermoeden en een bewezen uitspraak, tussen inductie en deductie?

Inductie versus deductie

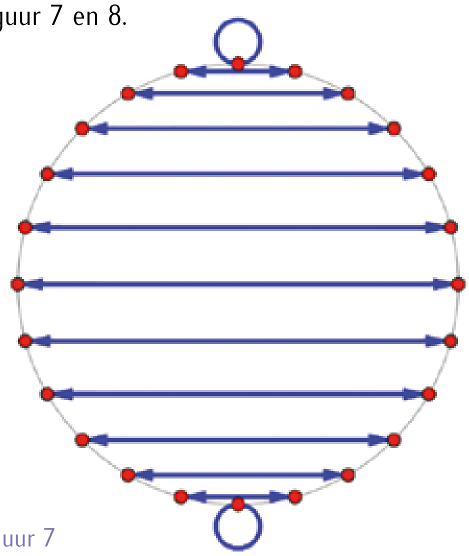
De bovenstaande aanpak bij de lusjes is slim, maar toont geen begrip van het probleem zelf. Een begripsvolle aanpak is een deductie die in één moeite tot de formule en het bewijs ervan leidt: de eerste stap is het inzicht dat je een lusje bij x krijgt, als $f(x) \equiv x \pmod n$. Dan een beetje algebra: als $f(x) = ax$, dan is $ax \equiv x \pmod n$, oftewel $(a - 1)x \equiv 0 \pmod n$. Dus $(a - 1)x$ is een veelvoud van n. Tot slot een beetje getaltheorie: de kleinste waarde die hieraan voldoet is per definitie kgv(a – 1, n).

In totaal zijn er $\frac{(a-1)n}{\mathrm{kgv}(a-1,n)} = \mathrm{ggd}(a-1, n)$ oplossingen.

Een dergelijke aanpak blijkt een grote uitdaging voor leerlingen. Het eerste genoemde inzicht vormt direct een grote drempel. Het algebraïsch gedeelte tot aan '$(a - 1)x \equiv 0 \pmod n$' is vervolgens geen probleem. Dat is mooi: kennelijk zijn de leerlingen prima in staat tot deze *transfer* van schoolalgebra. De getaltheoretische redeneerstappen blijken vaak lastig, maar die komen ook minder aan bod in het reguliere schoolprogramma. De wiskunde B-opdracht biedt (ieder jaar) een mooie uitdaging om te oefenen met het inzetten van wiskundetechnieken uit het curriculum bij redeneren en modelleren in een nieuwe context.

Observeren en vragen stellen

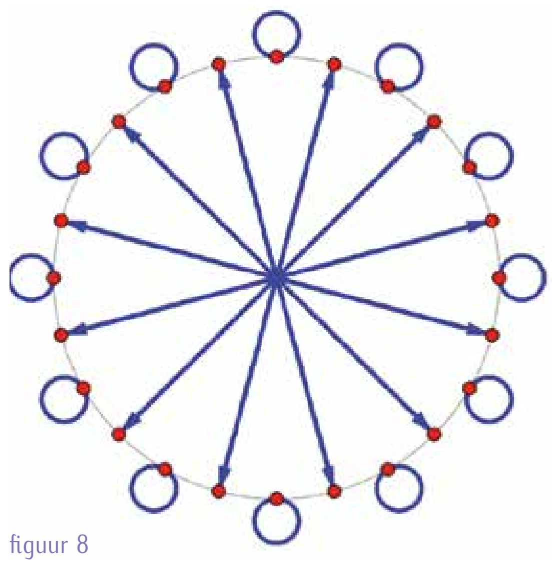
Wat voor vragen zou je, lezer van dit stuk, zelf stellen naar aanleiding van de pijlenklokplaatjes? Observeren en wiskundige vragen stellen is nog een hele kunst! We geven een paar voorbeelden van leerlingobservaties: ze ontdekten het veelvuldig voorkomen van plaatjes als in figuur 7 en 8.



figuur 7

Ze kwamen erachter dat deze patronen optreden als $a = n - 1$, respectievelijk $a = ½n + 1$ (n even). We nodigen je van harte uit dit te verklaren! Ook viel het veel groepjes op dat de figuren vaak spiegelsymmetrisch zijn. Als de spiegelas door 0 ging, dan konden ze dat verklaren uit het feit dat de functie oneven was.
Maar er zijn nog veel meer vragen die je kunt stellen. Het ontwikkelteam van de wiskunde B-dag, bestaande uit ervaren wiskundedocenten en wiskundigen kwam tot een hele lijst: voor een vaste functie en n:

- Hoeveel groepjes evenwijdige pijlen zijn er? (*)
- Wanneer zijn er loodrechte pijlen?



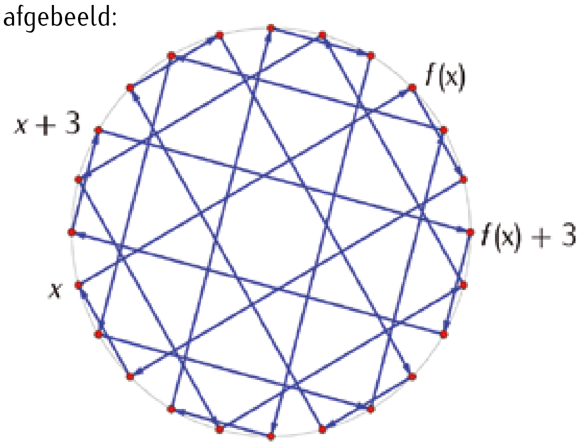
figuur 8

- Een punt waar een pijl uitkomt heet een *doelpunt*. Hoeveel doelpunten zijn er? (*)
- Hoeveel lusjes zijn er? (*)
- Hoeveel paren lijnen zijn er die op elkaar vallen, dus 'heen en weer'?
- Hoeveel lijnen gaan er precies door het midden van de cirkel?
- Is de pijlenklok spiegelsymmetrisch in een as? (*)
- Is de pijlenklok draaisymmetrisch? Van welke orde?
- Hoeveel (regelmatige) driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, et cetera heeft de pijlenklok? (*)

Vragen met (*) zaten deels in de opdracht verwerkt. Elk van deze vragen kan beantwoord worden met niet veel meer dan de technieken die we hierboven gebruikt hebben (ga je gang!).

Draaisymmetrie

Een laatste voorbeeld om te laten zien wat een juwelen er voor het oprapen liggen bij deze opdracht. De vraag wat de orde van de draaisymmetrie is bij $f(x) = ax + b$ heeft een prachtig antwoord. Een pijlenklok is draaisymmetrisch van orde k, als k de grootste deler van n is zodat voor iedere x geldt: $f(x + n/k) \equiv f(x) + n/k \pmod n$. Bijvoorbeeld, in figuur 9 is $n = 24$ en de orde van draaisymmetrie 8, dus $n/k = 3$. Een getal drie stappen verderop, $x + 3$, moet drie stappen verder dan $f(x)$ worden afgebeeld:



figuur 9 Draaisymmetrie van orde 8: $f(x + 3) \equiv f(x) + 3 \pmod{24}$

Voor een lineaire functie geeft dat:
$a(x + n/k) + b \equiv ax + b + n/k \pmod{n}$. Tot onze grote vreugde valt zowel x als b weg uit de vergelijking: $(a – 1) n/k \equiv 0 \pmod{n}$. Dus k moet ook een deler van a - 1 zijn (naast een zo groot mogelijke deler van n). Conclusie: de orde van de draaisymmetrie $k = \text{ggd}(a – 1, n)$. Terzijde: als $b = 0$ (zoals in figuur 3, 7 en 8), dan is het aantal lusjes dus gelijk aan de orde van de draaisymmetrie!

Onderzoekend wiskunde leren in de les

Natuurlijk wil je niet ieder jaar tot de wiskunde B-dag wachten om aandacht te besteden aan onderzoekend leren. Dat hoeft ook niet! Met eenvoudige technieken is het mogelijk je reguliere les een onderzoekend karakter te geven. Hiertoe is en wordt materiaal ontwikkeld in diverse projecten in Europees verband: zie Mascil[2], Primas[3] en Meria[4]. Ook biedt het Freudenthal Instituut komend jaar opnieuw een nascholingscursus aan over dit onderwerp.[5]
De wiskunde B-dag van 2018 is op vrijdag 16 november. Meer informatie over deelname op de site van de wiskunde B-dag.[6] Inschrijven kan vanaf september via deze site.

Links

[1] *https://www.geogebra.org/m/ZUDcUk2C*
[2] *http://www.mascil-project.eu/*
[3] *https://primas-project.eu/*
[4] *http://www.meria-project.eu/*
[5] Zie te zijner tijd voor informatie over de nascholingscursus: htt*ps://u-talent.nl/docenten/informatie-voor-docenten/*
[6] *https://www.uu.nl/onderwijs/wiskunde-b-dag/meedoen-aan-de-wiskunde-b-dag*

Over de auteur

Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.
Hij is lid en coördinator van het Wiskunde B-dag ontwerpteam.