HET FIZIER GERICHT OP

DOBBLE

Rogier Bos

In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering belicht Rogier Bos het spel Dobble.

Dobble met peuters en pubers

Afgelopen november was ik in Wuppertal bij de Regionale EU-meeting met wiskunde didactici uit België, Frankrijk, Duitsland en Nederland. Soms hoor je bij dit soort bijeenkomsten de leukste dingen in de wandelgangen en in dit geval was dat ook zo. Het ging over een spelletje dat ik weleens met mijn kinderen speel: Dobble.

figuur 1 Twee kaarten van het spel Dobble. Welk plaatje komt op beide kaarten voor?

Bij dit spel draai je in iedere beurt twee kaarten om van een stapel. Op iedere kaart staan acht plaatjes. Voor ieder tweetal kaarten is er precies één plaatje dat op beide kaarten voorkomt. Zodra je ziet welk plaatje dit is, roep je wat het is (in figuur 1: 'blad'). Heb je gelijk dan krijg je een punt. Niet bepaald de complexiteit van schaken, maar toch voldoende plezier voor het hele gezin. Collega's van het IREM in Lille hadden het idee om de plaatjes van dit spel te vervangen door wiskundige plaatjes: getallen, formules, meetkundige figuren en dergelijke. Ik heb dit idee opgepakt en varianten gemaakt die preciezer aansluiten op de middelbare schoolstof.

A. $3a + 4\cdot 2b + 4a + b$	A. $6a + 5b + 2a + 3b$
B. $7(a + b) + b$	B. $5(a + 2b) + 2a$
C. $a + 6b + 8a + 2b$	C. $3(3a + 2b) + 2b$
D. $2(5a + 3b) + b$	D. $4a + 2\cdot 4b + 3a$

figuur 2 Twee kaarten van wiskundig Dobble. Zie je de equivalente uitdrukkingen?

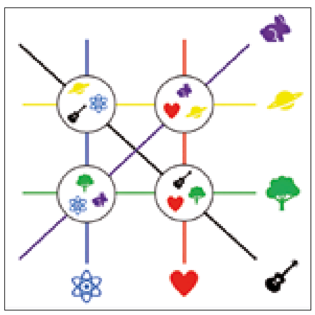
Op ieder kaartje staan vier algebraïsche uitdrukkingen. Voor ieder tweetal kaarten is er precies één tweetal equivalent. In figuur 2 zijn dit C links en C rechts. Het aardige is dat er achter het ontwerp van zo'n spel mooie wiskunde schuil gaat. Laten we de drie eisen opschrijven waaraan we willen dat zo'n set kaarten voldoet. Ik schrijf daarbij voor het gemak even over plaatjes en niet over formules en dergelijke zoals in mijn eigen varianten.

A. Ieder tweetal kaartjes heeft precies één plaatje gemeen.
B. Op ieder kaartje staan evenveel plaatjes.
C. Elk plaatje komt op even veel kaartjes voor.

Zonder A valt het spelletje in het water. Eis B zou je kunnen laten varen, maar is voor het ontwerp wel prettig. Je wilt zeker een minimum aantal plaatjes per kaartje. Als dat minimum niet groot genoeg is, wordt het spelletje te makkelijk. Zonder eis C zou het spelletje minder eerlijk zijn. Als je weet dat een plaatje minder vaak voorkomt dan een ander, dan ga je dat plaatje als laatst 'controleren'.

De wiskunde achter Dobble

Eisen A, B en C beschrijven een speciaal geval van wat wiskundigen een blokontwerp of 2-ontwerp noemen (zie *https://en.wikipedia.org/wiki/Block_design*). Je kunt de kaarten voorstellen als punten en de plaatjes als lijnen.



figuur 3 Een mini Dobble-spel met kaarten als punten en plaatjes als lijnen

De eisen luiden dan:

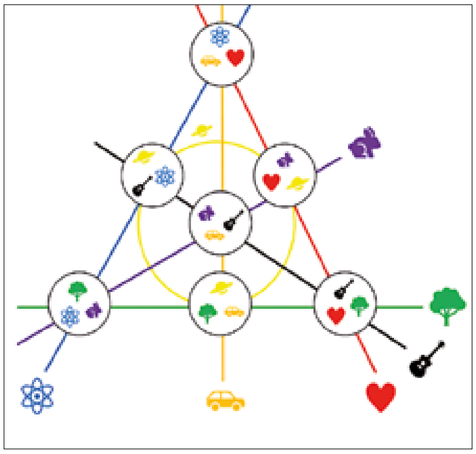
A Door ieder tweetal punten gaat precies één lijn. (Bij een algemeen blokontwerp mag dit aantal ook groter zijn.)
B Door ieder punt gaan evenveel lijnen, zeg *r*.
C Elke lijn gaat door evenveel punten, zeg *k*.

In figuur 3 is $r = 3$ en $k = 2$. Als er n punten en m lijnen zijn, dan kun je het aantal punten op twee manieren berekenen: $n = \frac{m \cdot k}{r}$ (bewijs zelf) en $n = r\,(k - 1) + 1$.

(Bedenk: vanuit een punt zijn er r lijnen, die samen ieder ander punt precies één keer treffen). Je ziet: niet voor alle waarden van m, k en r is er een blokontwerp. Voor algemene blokontwerpen is dit een onafgerond onderwerp van studie voor wiskundigen.

Een belangrijke eigenschap van blokontwerpen is de Fischer-ongelijkheid: $m \geq n$; het aantal lijnen is niet minder dan het aantal punten. In figuur 3 zie je een voorbeeld met zes plaatjes en vier kaarten. Voor een gegeven aantal plaatjes (m) is het aantal kaartjes maximaal als $n = m$. Als we dit als eis toevoegen aan A, B en C, dan krijg je een prachtige wiskundige structuur: een eindige projectieve meetkunde. Deze structuur voldoet aan de aanvullende eigenschap:
D Ieder tweetal lijnen snijdt in precies één punt.

Uit $m = n$ en de eerste vergelijking volgt dat $k = r$. Je ziet dan dat de eisen A tot en met D de dualiteit tussen punten en lijnen vertonen die je misschien kent van de projectieve meetkunde. Het aantal punten is nu uit te drukken in alleen k: $n = k\,(k - 1) + 1$. Je kunt figuur 3 voltooien tot een eindig projectief vlak, zie figuur 4, door punten (kaarten) op oneindig toe te voegen voor evenwijdige lijnen (plaatjes) en tot slot één nieuwe lijn op oneindig (de auto). Je krijgt dan het wellicht bekende *Fano-vlak*.



figuur 4 Het Fano-vlak geeft een Dobble-spel; $k = 3$ en $n = 7$

Bij het originele spel Dobble staan er acht plaatjes op een kaartje: $r = 8$. Het blijkt gebaseerd op een eindige projectieve meetkunde, dus $k = 8$ en $n = 57$. Vreemd genoeg heeft het spel maar 55 kaartjes; de makers hebben om obscure redenen twee kaarten weggelaten!

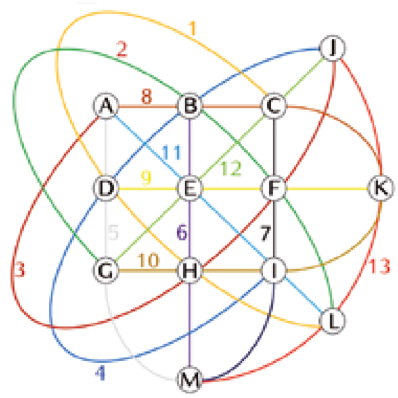
Ontwerp wiskundig Dobble

Het spel met de algebraïsche uitdrukkingen hierboven heeft vier uitdrukkingen per kaartje. Het is gebaseerd op het eindige projectieve vlak met $k = 4$. Er zijn dus, met bovenstaande formule, dertien kaartjes en dertien algebraïsche uitdrukkingen. Voor ieder kaartje heb je een andere equivalente versie van zo'n uitdrukking nodig, zie tabel 1.

	Uitdrukking	Vorm 1	Vorm 2	Vorm 3	Vorm 4
1	$7a + 7b$	$2a + 2{\cdot}3b + 5a + b$	$3(a + 2b) + 4a + b$	$a + 2b + 6a + 5b$	$7(a + b)$
2	$7a + 8b$	$4a + 2{\cdot}4b + 3a$	$3(2a + b) + a + 5b$	$4a + 5b + 3a + 3b$	$3a + 4(a + 2b)$
3	$7a + 9b$	$3a + 4{\cdot}2b + 4a + b$	$4(a + 2b) + 3a + b$	$6b + 7a + 3b$	$7(a + b) + 2b$
4	$7a + 10b$	$2{\cdot}4b + 3{\cdot}2a + 2b + a$	$5(a + 2b) + 2a$	$3a + 7b + 4a + 3b$	$2(a + 5b) + 5a$
5	$8a + 7b$	$5a + 2{\cdot}3b + 3a + b$	$7(a + b) + b$	$3a + 4b + 5a + 3b$	$3(2a + 2b) + a$
6	$8a + 8b$	$3{\cdot}2a + 4{\cdot}2b + 2a$	$8(a + b)$	$6a + 5b + 2a + 3b$	$4(2a + 2b)$
7	$8a + 10b$	$2a + 2{\cdot}5b + 6a$	$8(a + b) + 2b$	$4a + 6b + 4a + 4b$	$2(4a + 5b)$
8	$9a + 8b$	$6a + 4{\cdot}2b + 3a$	$4(2a + 2b) + a$	$a + 6b + 8a + 2b$	$3(3a + 2b) + 2b$
9	$9a + 9b$	$4{\cdot}2a + 2{\cdot}4b + a + b$	$3(a + 3b) + 6a$	$4a + b + 5a + 8b$	$9(a + b)$
10	$9a + 10b$	$3{\cdot}3a + 5{\cdot}2b$	$9(a + b) + b$	$6a + 10b + 3a$	$3(3a + 2b) + 4b$
11	$10a + 7b$	$3a + 2{\cdot}2b + 7a + 3b$	$5(2a + b) + 2b$	$6a + b + 4a + 6b$	$2(5a + 3b) + b$
12	$10a + 8b$	$2{\cdot}4a + 4{\cdot}2b + 2a$	$2(5a + 4b)$	$a + 2b + 9a + 6b$	$4(2a + 2b) + 2a$
13	$10a + 10b$	$4{\cdot}2a + 5{\cdot}2b + 2a$	$10(a + b)$	$5a + 10b + 5a$	$2(5a + 5b)$

tabel 1 Dertien viertallen van equivalente versies van dezelfde uitdrukking

Vervolgens plaats je die uitdrukkingen 1 t/m 13 op de kaartjes A t/m M volgens de combinatoriek van het projectieve vlak zoals weergegeven in figuur 5.



figuur 5 Een projectief vlak met dertien punten

In tabel 2 zie je nogmaals weergegeven wat op welk kaartje moet komen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Vorm 1	3	2	8	5	6	7	10	1	4	12	9	11	13
Vorm 2	5	4	7	1	9	2	12	10	11	3	8	13	6
Vorm 3	8	6	12	4	11	9	2	3	7	13	10	1	5
Vorm 4	11	8	1	9	12	3	5	6	10	4	13	2	7

tabel 2 Dertien kolommen voor dertien kaarten met per kaart vier uitdrukkingen

De kaarten in figuur 2 zijn bijvoorbeeld kaart A en B. Tabel 2 kun je natuurlijk gebruiken voor ieder didactisch doel. Je past dan tabel 1 naar believen aan.

In elke rij komen vier equivalente gedaanten van een verschijnsel, zoals bijvoorbeeld in tabel 3.

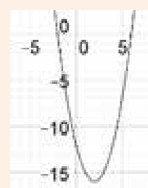
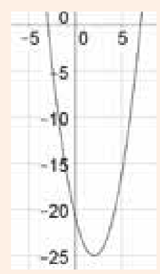
Nog enkele opmerkingen voor als je een eigen spel wilt maken. Ten eerste: zorg dat de uitdrukkingen, zoals in tabel 1, dicht bij elkaar liggen. In mijn eerste versie kon je door alleen de termen in *a* te berekenen al bepalen of de uitdrukkingen hetzelfde konden zijn. Ten tweede: in tabel 3 zijn de vier verschillende vormen goed te onderscheiden, zeker de grafieken. Spelers hebben gauw genoeg door dat elke vorm van een verband maar eenmaal voorkomt. Items van dezelfde vorm hoef je dus niet te vergelijken. Om dit effect te minimaliseren is tabel 2 zo gemaakt dat op een kaartje elke vorm precies eenmaal voorkomt.
Op mijn website *https://sites.google.com/view/wisbos/homepage* kun je verschillende versies van het spel downloaden. Ook zijn er tabellen beschikbaar van eindige projectieve meetkundes en andere blokontwerpen zoals in tabel 2 voor als je je eigen Dobble-versie wilt maken.
Er zijn talloze mogelijkheden!

Over de auteur

Rogier Bos is sinds september 2016 universitair docent wiskundedidactiek aan het Freudenthal Instituut. Als onderdeel daarvan geeft hij les binnen het U-talentprogramma. Hiervoor werkte hij zeven en een half jaar op het Christelijk Gymnasium Utrecht.
E-mailadres: *r.d.bos@uu.nl*

Bronnen

http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.

	Vorm 1	Vorm 2	Vorm 3	Vorm 4
1	$y = x^2 - 4x - 12$	$y = (x-2)^2 - 16$	$y = (x-6)(x+2)$	
2	$y = x^2 - 4x - 21$	$y = (x-2)^2 - 25$	$y = (x-7)(x+3)$	

tabel 3 Een voorbeeld van Dobble voor andere wiskunde