Minder dan niets?

Niets minder dan een bachelorscriptie over de
problematische acceptatie van de negatieve getallen.

Marieke Gelderblom (5717035)
Bachelorscriptie onder begeleiding van dr. S. A. Wepster

Universiteit Utrecht

Departement Wiskunde
10 januari 2020

Inhoudsopgave

Inleiding

> Velen klagen over duisterheden en gapingen, in sommige algemeene beginselen der Wetenschappen, voorkomende: eenige van de algemeenste gronden der Wiskunst zijn ook, gelijk bekend is, van deze klagten niet bevrijd gebleven. [9, p. 13]

Met deze woorden begint Jacob de Gelder in 1815 zijn *Proeve over den waren aard van den positieven en negatieven toestand*. Hij beschrijft een probleem: de wetenschap weet in zijn tijd niet op welke grondslagen zij kan voortbouwen. Veel fundamentele kwesties zijn onduidelijk en hoewel de vragen hieromheen meestal makkelijk te formuleren zijn, is het vaak een stuk moeilijker om antwoorden te vinden.

Specifiek gaat de *Proeve* van Jacob de Gelder over de status van negatieve getallen binnen de wiskunde. Hij is niet de enige die over dit onderwerp schrijft. Deze getallen blijven steeds weer opduiken, maar men verzet zich tegen het idee dat iets *minder dan niets* kan zijn. De status van deze getallen blijft zo lange tijd onduidelijk en verschillende wiskundigen gaan hier dan ook op verschillende manieren mee om.

Dit leidt tot een fel debat waarbij er soms uitspraken worden gedaan die wij tegenwoordig alleen maar met veel verbazing kunnen lezen. Er moeten heel wat vraagstukken en paradoxen worden opgelost. De negatieve getallen zijn destijds (nog) niet op een fatsoenlijke manier zijn geïntroduceerd maar krijgen tegelijkertijd wél een steeds belangrijkere plaats binnen de wiskunde. Men kan er simpelweg niet omheen.

In deze scriptie bestuderen we de hobbels die moeten worden overkomen voordat men bereid is de negatieve getallen te accepteren. In het bijzonder bekijken we de vraag waarom het product van twee negatieve getallen gelijk is aan een positief getal.

Door te bestuderen hoe men deze getallen een plaats probeerde te geven, hebben we een interessante *case study* naar de manier waarop wiskundigen probeerden om te gaan met een steeds abstracter wordende wiskunde die nog op zoek is naar een echte fundering. Tegelijkertijd vinden er ook gelijksoortige discussies op andere terreinen plaats, zoals bijvoorbeeld over de betekenis van limieten.[1]

Uit de geschiedenis van de negatieve getallen blijkt wat er voor nodig is om deze getallen volledig te kunnen begrijpen. Men heeft het namelijk heel lang moeilijk gehad met de negatieve getallen. De acceptatie ging langzaam en beetje bij beetje. Een ruime tijd kwamen de negatieve getallen slechts voor

[1] Interessant is dat ook in deze discussie het lemma dat d'Alembert schreef voor de *Encyclopédie*, genaamd *Limite*, erg veel invloed heeft gehad [14, p. 433].

op de achtergrond of kregen ze een bijrol, die op veel verschillende manieren kon worden ingevuld. Hoe verschillende wiskundigen dit door de eeuwen heen hebben gedaan is te lezen in hoofdstuk 1. Hier maken we bovendien kennis met een aantal problematische aspecten van de negatieve getallen die in de overige hoofdstukken verder uitgewerkt zullen worden.

Het lemma *Négatif*, dat Jean le Rond d'Alembert in de jaren 1750 voor de *Encyclopédie* van Diderot [3] schrijft, geeft eigenlijk een overzicht van de problemen die men had met de negatieve getallen. Hoewel d'Alembert zelf oplossingen voor deze problemen presenteert, zullen we later zien dat deze niet voor iedereen overtuigend genoeg zijn geweest. Deze bespreking vormt de basis van hoofdstuk 2, waarin bovendien wordt gekeken naar de Nederlandse tegenhanger van de *Encyclopédie*. In het woordenboek van Stammetz [20] blijkt er echter geen plaats voor de negatieve getallen.

Vervolgens bekijken we in hoofdstuk 3 het eerste Nederlandse werk dat over de negatieve getallen is geschreven, de *Theses Philosophicae* [22] van Jacob Pierson Tholen. Dit proefschrift uit 1784 laat zien dat er ook in Nederland interesse was voor dit onderwerp. We zien hier onder andere de grote invloed van de ideeën van d'Alembert, waar Tholen vaak zijn eigen interpretatie aan geeft.

Al met al is echter de status van de negatieve getallen nog steeds niet helemaal duidelijk. De Gelder stelt zich in zijn *Proeve over den waren aard van den positieven en negatieven toestand* [9] ten doel om alle misverstanden rondom de negatieve getallen voor eens en voor altijd uit de weg te ruimen. We zullen in hoofdstuk 4 zien dat uit dit omvangrijke werk inderdaad blijkt dat De Gelder de negatieve getallen al een stuk beter onder de knie heeft dan zijn voorgangers, maar dat ook hij nog tegen een aantal problemen aanloopt.

Tussen deze drie werken zit er dus steeds ongeveer 35 jaar. Dit geeft een interessant beeld van hoe de opvattingen over het concept 'negatieve getallen' en de vermenigvuldiging hiervan zich hebben ontwikkeld. In hoofdstuk 5 vergelijken we de opvattingen van d'Alembert, Tholen en De Gelder met elkaar. Hoewel ze de negatieve getallen alle drie op verschillende manieren verklaren, zijn er ook overeenkomsten te vinden in hun werk. Ten slotte is de Engelse samenvatting van deze scriptie getiteld 'Less than nothing?' als appendix toegevoegd.

In deze scriptie focussen we ons dus vooral op de periode 1750 - 1815. In deze tijd stond de algebra al los van de meetkunde, maar maakten weinigen zich druk om de nieuwe grondslagen die er hiervoor gevonden moesten worden. Volgens Kline hielden de conceptuele moeilijkheden die men had met de negatieve en ook complexe getallen de ontwikkeling van nieuwe grondslagen voor het getalsysteem tegen [14, p. 596, 597]. Aan de andere kant zouden we echter ook kunnen zeggen dat de behoefte aan nieuwe grondslagen er helemaal niet was geweest zonder de vragen die de negatieve en complexe getallen opriepen. Juist deze vragen hebben laten zien waar de knelpunten zich bevonden. De negatieve en complexe getallen hielden de ontwikkelingen in dat opzicht dus niet tegen, maar bevorderden ze juist!

In ieder geval werd wiskunde in de 18^{e} eeuw vooral gezien als hulpmiddel voor de rest van de wetenschap. Men vond de zoektocht naar nieuwe grondslagen niet altijd even belangrijk, aangezien de rekenregels voor de rest van de getallen intuïtief al wel duidelijk waren [14, p. 596, 597].

Het is bij het bestuderen van dit onderwerp belangrijk dat we ons bewust zijn van onze moderne opvattingen. Zo is het tegenwoordig heel gewoon om te schrijven dat een negatief getal kleiner dan nul is. Zo zou er bijvoorbeeld bij een vergelijking kunnen worden aangegeven dat $x < 0$, waarmee bedoeld wordt dat x een negatieve waarde heeft. Dit zou voor de wiskundigen die we in deze scriptie bestuderen echter een absurde opmerking zijn: negatieve getallen zijn niet kleiner dan nul, want het is volgens hen onmogelijk om minder te zijn dan nul.

Zoals misschien te verwachten komen we vaak een term van de vorm $a - b$ tegen. Aangezien de status van de negatieve getallen nu juist ter discussie staat wordt er eigenlijk altijd impliciet aangenomen dat a, b positieve getallen zijn. Dat is meestal dan ook benadrukt. Tegenwoordig duiden we een getal x aan als negatief door te stellen dat $x < 0$, maar merk op dat dat volgens de meeste wiskundigen die we in deze scriptie bespreken een absurde uitspraak is: zij verzetten zich juist tegen het idee dat er zo iets bestaat als getallen kleiner dan nul! Dat betekent dus ook dat $x > 0$ een 'loze' uitspraak is en zeker niet impliceert dat x een positief getal is.

Er is dus lange tijd veel onduidelijkheid geweest rondom de status van de negatieve getallen. Zowel d'Alembert als De Gelder benadrukken in het begin van hun werk dan ook dat alle wiskundigen die zich vóór hen over dit onderwerp hebben gebogen, alleen maar verwarring hebben veroorzaakt. Zo schrijft d'Alembert dat 'zelfs sommige bekwame mannen [hebben] bijgedragen aan de verwarring door de niet echt exacte uitspraken die zij hebben gegeven'[2] [3, p. 72]. Volgens De Gelder leverde het werk van d'Alembert zelf echter ook alleen maar onduidelijkheden op. Hij noemt d'Alembert als één van de '[g]roote mannen, welke ondernomen hadden hetzelve te verklaren,' maar d'Alembert is daarin volgens De Gelder 'niet gelukkig geslaagd' [9, p. v, vi].

De Gelder belooft echter dat hij alle onduidelijkheden voor eens en voor altijd zal ophelderen. Dat d'Alembert dit evengoed had beloofd maakt zijn uitspraak echter niet betrouwbaarder. Al met al lijkt het dus alsof een stuk over de negatieve getallen niet kan beginnen zonder dat er voorgangers zijn afgekraakt en er is betoogd dat de kwestie in dit stuk definitieve duidelijk zal worden.

Ik zou me haast willen houden aan deze traditie en willen zeggen: vergeet alles wat er hiervoor over de negatieve getallen is geschreven. Aangezien er echter in dat geval maar weinig van deze scriptie zou overblijven, doe ik dat toch maar niet. Ik wens de lezer in ieder geval veel leesplezier!

[2] '... quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données' [3, p. 72].

Hoofdstuk 1

Opvattingen over negatieve getallen

De negatieve getallen zijn niet altijd problematisch geweest. Lange tijd kon men namelijk af zonder. Zo kenden de Babyloniërs geen negatieve getallen en gaven ze dus bij hun kwadratische vergelijkingen ook geen negatieve oplossingen [14, p. 9]. Grieken zoals Heron en Archimedes zochten naar geometrische grootheden, dus ook hier was vanzelfsprekend geen plaats voor de negatieve getallen. Evenzo ontkende de 'pure algebraïcus' Diophantus de negatieve oplossingen van zijn vergelijkingen, 'aangezien de algebra van zijn tijd de irrationale, negatieve en complexe getallen niet herkende' [14, p. 143].

De rest van dit hoofdstuk behandelt verschillende gemeenschappen en personen die de negatieve getallen wél in meer of mindere mate accepteerden. We zullen ons in dit hoofdstuk voornamelijk richten op de opvattingen van westerse wiskundigen, omdat deze de problemen introduceerden die wij later zullen terugzien bij d'Alembert, Tholen en De Gelder. Zo kunnen we later hun ideeën in context plaatsen.

In de niet-westerse wiskunde zien we de negatieve getallen echter ook op verschillende plaatsen terugkomen. Het eerste voorkomen vinden we in de 'matrices' van de *Negen Hoofdstukken* in de Chinese wiskunde [21, p. 43]. Ook bij de Hindoes waren de negatieve getallen bekend. Brahmagupta geeft rond 628 zelfs de regels om de vier operaties (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) uit te breiden naar negatieve getallen. Ook erkent hij de negatieve oplossing die worteltrekken van een positief getal oplevert. Daarentegen noemt hij het onzinnig om van een negatief getal zelf de wortel te nemen. Hoewel deze opvattingen dus in redelijke mate uitgewerkt zijn, worden ze nooit formeel gemaakt in de vorm van definities, axioma's of stellingen [14, p. 185].

De Hindoes gaven hun kennis door aan de Arabieren. Hoewel deze dus op de hoogte waren van de Hindoestaanse opvattingen, wezen zij de negatieve getallen volledig af [14, p. 192]. Opvallend is echter wel dat de negatieve getallen uiteindelijk in Europa geïntroduceerd werden via juist de Arabische teksten [14, p. 252]. Toch bleken er maar weinig westerse wiskundigen in de zestiende en zeventiende eeuw te zijn die de negatieve getallen zomaar accepteerden als daadwerkelijke getallen - en als dit al gebeurde, bleef de mogelijkheid van een negatieve oplossing van een vergelijking vaak problematisch. Volgens Vredenduin is dit te verklaren doordat wiskundige begrippen in deze tijd hun oorsprong uitsluitend in de werkelijkheid vonden. ‘Ook het negatieve getal tracht men vanuit de werkelijkheid te begrijpen. Gevolg daarvan is dat men dan ook de regels betreffende het rekenen met negatieve getallen uit de werkelijkheid wil afleiden’ [24, p. 333]. Doordat negatieve getallen moeilijk terug te vinden zijn in de werkelijkheid, moeten er verschillende problemen worden opgelost voordat we ze volledig kunnen begrijpen en accepteren. Een aantal van deze problemen en de verschillende manieren om daar mee om te gaan worden in de rest van dit hoofdstuk gepresenteerd.

1.1 Koopmansberekeningen

Hoewel Europese wiskundigen dus moeite hadden met de negatieve getallen, kwamen ze in sommige situaties al wel voor. Dit was bijvoorbeeld wanneer zij op een duidelijke manier konden worden geïnterpreteerd in de context. We zien dit onder andere bij de *maestri d'abbaco*, de abbacorekenmeesters die in Noord-Italië tussen 1300 en 1550 jongens opleidden voor de handel. Al vroeg (de eerste in 1344) gaven zij redeneringen of ‘bewijzen’ voor waarom het product van twee negatieve getallen een positief getal zou moeten zijn. Deze bewijzen waren meer een uitleg dan een bewijs en vooral gebaseerd op een geloof in de correctheid van hun praktijken [11, p. 869]. Een voorbeeld van een dergelijk bewijs is het volgende, gebaseerd op wat we tegenwoordig zien als distributiviteit:

$$\begin{aligned}
64 &= 8 \times 8 \\
&= (10 - 2) \times (10 - 2) \\
&= 10 \times 10 + 10 \times (-2) + (-2) \times 10 + (-2) \times (-2) \\
&= 100 + (-20) + (-20) + (-2) \times (-2) \\
&= 60 + (-2) \times (-2).
\end{aligned}$$

We blijven dus over met 60 en de vermenigvuldiging $(-2) \times (-2)$. Zo moeten we dus wel concluderen dat deze vermenigvuldiging gelijk moet zijn aan het positieve getal 4 [11, p. 869]. Op deze manier is er ‘bewezen’ dat de vermenigvuldiging $(-2) \times (-2)$ het positieve getal 4 oplevert. Met een redenering analoog aan de bovenstaande kan er nu voor elke twee negatieve getallen worden nagegaan dat hun vermenigvuldiging een positief getal oplevert.

In het algemeen gebeurde het vaker dat een koopman erg zeker was van zijn berekeningen, maar toch uitkwam op een negatief getal. In dat geval was het gezien de context van handel mogelijk om dit te interpreteren als verlies. Dat betekent echter niet dat de negatieve uitkomst hiermee werd geaccepteerd - het tegenovergestelde was juist het geval! Door de oplossing als verlies te interpreteren heeft de koopman het negatieve getal omgezet in een positief getal waar hij wel mee om kan gaan [11, p. 864].

Op basis van een zelfde soort argument accepteerde Descartes de negatieve getallen ook deels. Hij noemde een negatieve uitkomst van een vergelijking een ‘valse oplossing’, of *racine fausse*, aangezien deze getallen zogenaamd kleiner dan niets zouden zijn en dat was volgens hem onmogelijk. Hij had echter laten zien dat elke vergelijking omgeschreven kon worden naar een nieuwe vergelijking met grotere uitkomsten dan het origineel. Aangezien de negatieve oplossingen zo makkelijk om te schrijven waren naar positieve getallen, accepteerde hij ook deze uitkomsten [14, p. 252].

1.2 Girolamo Cardano

Girolamo Cardano (1501–1576) was de eerste die een redelijke uitleg kon geven bij een negatieve oplossing van een lineair probleem [11, p. 870]. Ook gaf hij bijvoorbeeld wel negatieve oplossingen van vergelijkingen, maar noemde hij deze in tegenstelling tot positieve oplossingen fictief. Negatieve uitkomsten waren voor hem slechts symbolen die onmogelijke oplossingen aanduidden [14, p. 252]. Een groot probleem waar Cardano mee worstelde was de *casus irreducibilis*, die zich kan voordoen bij het zoeken naar de oplossingen van een derdegraadsvergelijking. Er is sprake van een casus irreducibilis wanneer de oplossingsmethode een reëele uitkomst geeft als som van complexe getallen [21, p. 118]. In *De Regula Aliza* uit 1570 probeert Cardano verschillende manieren om met dit probleem om te gaan en dit geeft hem onder andere redenen om na te denken over de manier waarop om moest worden gegaan met de negatieve getallen [21, p. 118].

Cardano was op de hoogte van de manier waarop de abbacorekenmeesters rekenden met de negatieve getallen. Hij was het echter niet met hen eens dat het product van twee negatieve getallen zou resulteren in een positief getal. Sterker nog, Cardano gebruikt precies hetzelfde voorbeeld dat we hierboven hebben besproken om aan te tonen dat het tegenovergestelde waar is! Door aan te nemen dat de vermenigvuldiging van twee negatieve getallen resulteert in een negatief getal, verkreeg Cardano een manier om om te gaan met de problematische negatieve getallen onder wortels. Gebruikmakend van onze moderne inzichten en moderne wiskundige taal kunnen we deze manier uitleggen als $\sqrt{-a} = -\sqrt{a}$, aangezien er volgens deze regel voor vermenigvuldiging geldt dat $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = -a = \sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ [8, p. 385].

Cardano gebruikte voor zijn uitleg figuur 1.1, een schematische weergave van de vermenigvuldiging $(10 - 2) \times (10 - 2)$. In de tekst geeft hij daarbij aan dat de lengte van lijn $ac = cf = 10$ en $bc = bd = 2$.

Cardano beweert dat we de oppervlakte van vierkant gde kunnen vinden door de oppervlaktes van rechthoeken acg en bcf van de oppervlakte van vierkant $acef$ af te halen. Door dit te doen hebben we echter tweemaal vierkant bcd afgetrokken in plaats van éénmaal, dus deze moet nog bij het geheel worden opgeteld. De vergelijking wordt dus volgens hem:

$$\begin{aligned} 64 &= 8 \times 8 \\ &= (10 - 2) \times (10 - 2) \\ &= 100 - (10 \times 2) - (10 \times 2) + (2 \times 2). \end{aligned}$$

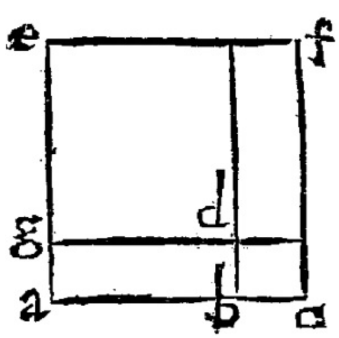
In de redenering van de abbacomeesters was de positieve 4 het resultaat van de vermenigvuldiging $(-2) \times (-2)$. Bij Cardano is deze 4 een oppervlakte die moet worden opgeteld om het resultaat correct te maken. Hij verwijst naar Euclidus' *Elementen* en schrijft dat 'dit de veelgemaakte fout laat zien van hen die zeggen dat min keer min plus produceert, aangezien het niet correcter is dat een min keer min plus oplevert dan dat plus keer plus min oplevert'[1] [7, p. 399]. Volgens Cardano is het bovenstaande argument puur meetkundig en is er ook algebraïsch geen enkele reden om aan te nemen dat min keer min plus zou zijn [11, p. 871].

Het is echter de vraag hoe serieus we deze redenering van Cardano moeten nemen. In zijn *Ars Magna* uit 1545 doet hij de negatieve getallen namelijk nog af als onbruikbaar en zegt hij dat deze vermeden moeten worden. Hij gebruikt hier de gangbare regels voor vermenigvuldiging met negatieve getallen. Bovendien zegt hij zelfs in hoofdstuk 6 van de *Aliza* dat min keer min altijd plus geeft [8, p. 379]. Cardano spreekt zichzelf dus regelmatig tegen. De problemen die blijven bestaan met de casus irreducibilis zijn voor hem echter reden om in de *Aliza* nieuwe, gewaagdere, mogelijkheden te verkennen. Tegenwoordig zien we in dat het argument dat hij geeft niet geldig is; het is gebaseerd op Euclidius' meetkunde, maar dit heeft Cardano te ver doorgetrokken [8, p. 405]. We moeten echter niet de focus leggen op dit resultaat, maar op de reden waarom Cardano dit onderwerp opnieuw wil overdenken. Cardano wilde dat de gangbare vermenigvuldigingsregels nogmaals overdacht werden, om in te gaan tegen het gemak waarmee regels omtrent de negatieve getallen worden geaccepteerd, bijvoorbeeld in de abbacotraditie [11, p. 372]. Hoewel zijn argument zelf niet werkte, heeft hij wel succesvol laten zien dat deze verklaring niet volstaat en de negatieve getallen nog een verdere uitwerking vereisen.

1.3 Thomas Harriot

Thomas Harriot (1560-1621) gebruikte in zijn algebraïsche vergelijkingen af en toe negatieve getallen. Dit deed hij door vergelijkingen in zijn geheel gelijk te stellen aan een negatief getal, zoals bijvoorbeeld het geval

[1] 'Et ideo patet communis error dicentium, quod m. in m. producit p. neque enim magis m. in m. producit p. quam p. in p. producat m.' [7, p. 399].



Figuur 1.1: Cardano's schematische weergave van de vermenigvuldiging $(10 - 2) \times (10 - 2)$ [7, p. 398].

is voor $9x - 18 - x^2 = -4$ (met oplossingen $x = 2$ en $x = 7$) [14, p. 252]. Negatieve uitkomsten van een vergelijking geeft hij daarentegen niet. Sterker nog, deze omschrijft Harriot als 'onverklaarbaar en onmogelijk' [16, p. 21]. Daarnaast experimenteerde hij met verschillende regels voor het vermenigvuldigen met negatieve getallen. In het bijzonder kwam hij uit op een systeem van regels waarbij elke vermenigvuldiging van negatieve en positieve getallen een positief getal oplevert, behalve min keer min, wat gelijk zou zijn aan een negatief getal [16, p. 139]. Hij beschreef deze regels in dichtvorm, mogelijk omdat hij de ideeën te gedurfd vond om in wiskundige termen te beschrijven:

> Yet lesse of lesse makes lesse or more
> Use which is best keep both in store
> If lesse of lesse you will make lesse
> Then bate the same from that is lesse.
>
> But if the same you will make more
> Then adde to it the signe of more.
> The rule of more is best to use
> Yet for some cause the other choose
>
> So both are one, for both are true
> Of this inough and so adeu.
>
> Thomas Harriot, overgenomen uit [19, p. 63]

Harriot schijft hier, te lezen in de eerste twee regels, dat de vermenigvuldiging van twee negatieve getallen een positief of negatief getal kan opleveren. Met 'lesse of lesse' bedoelt hij 'min keer min', wat dus min of plus kan opleveren: zowel $-a \times -b = -ab$ als $-a \times -b = ab$ zijn mogelijk. Beide gevallen vindt hij plausibel en het staat een wiskundige vrij om te bepalen welke hij wil hanteren. Wel lezen we in de tweede alinea, derde zin, dat hij de voorkeur geeft aan een positieve uitkomst (dus $-a \times -b = ab$) – hoewel hij in de één na laatste regel opnieuw schrijft dat de beide uitkomsten van deze vermenigvuldiging gelegitimeerd zijn.

1.4 Antoine Arnauld

Antoine Arnauld (1612–1694) was in de eerste plaats een theoloog en filosoof. Hoewel zijn carrière als theoloog controversieel was stond hij bekend als een geleerde en invloedrijke filosoof. Bovendien heeft hij veel bijgedragen aan het filosofische debat in de 17e eeuw. Zijn werken waren erg populair voor meer dan 50 jaar en zijn bovendien tussen 1775 en 1782 heruitgegeven in 42 delen [15].

In Arnaulds *Nouveau éléments de géometrie* uit 1667 schrijft hij over de manier waarop wiskundige regels tegen onze intuïties van grootheden en verhoudingen ingaan wanneer we ze toepassen op de negatieve getallen. Neem bijvoorbeeld twee verschillende getallen a en b met $a > b$. Dan volgt volgens hem uit de regels voor verhoudingen die in die tijd algemeen geaccepteerd werden dat

$$\frac{a}{b} > \frac{b}{a}.$$

Bekijken we echter het geval $a = 1$ en $b = -1$ (dus inderdaad $a > b$), dan zou hieruit moeten volgen dat

$$\frac{1}{-1} > \frac{-1}{1}.$$

Dit gaat volgens Arnauld echter in tegen onze algebraïsche regels. Hij was daarom tegen het gebruik van de negatieve getallen en van mening dat deze niet onderwezen moesten worden [11, p. 867, 868].

We zullen in het volgende hoofdstuk zien dat ook d'Alembert dit probleem behandelt. Hoewel De Gelder en enkele andere bronnen dit vervolgens als 'de paradox van d'Alembert' zullen omschrijven, zien we dus dat het oorspronkelijk van Arnauld komt.

1.5 Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Leibniz (1646–1716) vond het probleem van Arnauld belangrijk genoeg om er in 1712 op te reageren. Hij gaf bovendien een manier om met dit probleem om te gaan. Volgens Leibniz is deze kwestie namelijk helemaal niet problematisch wanneer we gewoon blind de regels toepassen. Een positief getal gedeeld door een negatief getal levert nu eenmaal een negatief getal op, net als een negatief getal dat gedeeld wordt door een positief getal [11, p. 868]. Dit zijn regels die we gewoon blind kunnen volgen om op het antwoord te komen. We hoeven niet te twijfelen of deze uitkomst problematisch is of niet, we kunnen er simpelweg van uitgaan dat

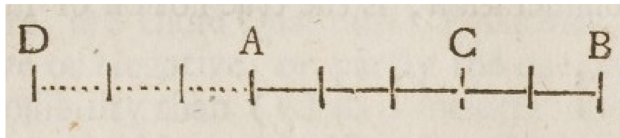
$$\frac{1}{-1} = -1 = \frac{-1}{1}.$$

Leibniz erkent dus Arnaulds probleem, maar is tegelijkertijd van mening dat zo lang een berekening de juiste vorm heeft, we deze kunnen uitvoeren. Ditzelfde doet men volgens hem ook bij de complexe getallen, en daar levert dit ook geen discussie op. Door simpelweg de algebraïsche regels te volgen kan het antwoord gevonden worden [14, p. 252].

1.6 John Wallis

John Wallis (1616–1703) wilde aantonen waar de 'nieuwe' algebra toe in staat was zonder zich te beroepen op de 'oude' meetkunde [21, p. 141]. In 1655 beschreef hij zijn ideeën in *Arithmetica infinitorum*. Hij was toen Savilian-professor in de meetkunde in Oxford en zou dat blijven tot aan zijn dood [21, p. 141].

Hij zette zich sterk af tegen het idee van negatieve grootheden, '[a]angezien het niet mogelijk is dat



Figuur 1.2: Wallis' weergave van een wandeling voor- en achteruit [25, p. 265].

enige grootheid *minder dan niets* kan zijn, of enig *getal minder dan geen*'[2] [25, p. 264]. Hoewel de kale algebraïsche notatie deze getallen dus minder dan nul doet lijken, is het echter niet zo dat de negatieve getallen zelf absurd en onbruikbaar zijn, volgens Wallis. Hij geeft onderstaande uitleg om ze op de juiste, fysische manier te interpreteren.

Dit doet hij de getallen met het teken $-$ voor te stellen alsof ze 'gewoon' het teken $+$ hebben, maar ze op een tegenovergestelde manier op te vatten. Dat wil zeggen, als we $+3$ zien als het zetten van drie stappen vooruit, dan kunnen we -3 interpreteren als het zetten van drie stappen achteruit. We kunnen dit voorstellen als een man die vijf stappen vooruit zet (van punt A naar punt B), en vervolgens twee stappen terug (van B naar C). Hij eindigt dan drie stappen voorwaarts vanaf A, aangezien $+5-2=+3$. Wallis geeft hierbij figuur 1.2. Interessanter wordt het echter als de man vanaf B in plaats van twee stappen, acht stappen terug zet. Hij komt dan uit op punt D [25, p. 265].

Wallis onderschrijft dat dit een moeilijke situatie is - de man komt uit op minder dan nul stappen voorwaarts ten opzichte van punt A. Het was volgens hem echter onmogelijk om minder dan niets te hebben! Gelukkig geeft hij ons een manier om hiermee om te gaan. Kijken we namelijk naar de lijn die zich vanaf A achterwaarts uitstrekt, dan zien we dat de situatie niet langer onmogelijk is. We kunnen immers zeggen dat de man drie stappen achter A is uitgekomen! Dit laat dus slechts zien dat onze aanname dat de wandeling vanaf A vooruit ging, niet waar is [25, p. 265].

Uit deze passage blijkt dat elk getal een punt op dezelfde lijn aanduidt. Het zijn dus geen lengtes van lijnstukken zelf, maar punten op één en dezelfde lijn. Volgens Kline ging 'John Wallis, beïnvloed door Viète, Descartes, Fermat en Harriot, [...] deze mannen ver voorbij door de algebra te bevrijden van meetkundige interpretatie' [14, p. 281]. We zien dat hier inderdaad terug.

Wallis benadrukt dus dat de negatieve getallen (mits correct opgevat) niet kleiner zijn dan nul. In zijn *Arithmetica Infinitorum* (1655) geeft hij die juiste opvatting. Hij schrijft dat uit $\frac{1}{0}=\infty$ volgt dat breuken met een positieve teller en negatieve noemer groter dan oneindig moeten zijn [14, p. 253]. Geven we de volgende vergelijking, dan zien we inderdaad dat de breuken kleiner dan $\frac{1}{0}$ positief zijn en de getallen groter dan $\frac{1}{0}$ negatief:

$$\ldots < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \ldots .$$

Heeffer benadrukt dat dit idee vaak is geïnterpreteerd alsof Wallis meent dat de negatieve getallen zelf

[2] 'Since that it is not possible that any *Magnitude* can be *Less than Nothing*, or any *Number Fewer than None*' [25, p. 264].

groter dan oneindig zijn. Onder andere Kline heeft dit volgens hem om onbekende redenen verkeerd opgevat. Toch drukt Wallis' zichzelf volgens Heeffer totaal niet ambigu uit en meent hij slechts dat 'de verhouding van een positief met een negatief getal is een *rationem plusquam infinitam*, een "verhouding groter dan oneindig" '[3] [11, p. 272].

[3] Cursivering toegevoegd.

Hoofdstuk 2

Jean le Rond d'Alembert: *Négatif*

2.1 De *Encyclopédie* en d'Alembert

In de *Encyclopédie* van Diderot en d'Alembert vinden we een lemma over negatieve getallen: *Négatif*. Diderot wilde in deze eerste encyclopedie ooit alle beschikbare kennis samenbrengen en beschikbaar maken voor een breed publiek. Zo werd dit een typisch Verlicht werk, gepubliceerd tussen 1751 en 1772 [10, p. 86].

Voluit heette deze encyclopedie de *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une Société de Gens de lettres*. De inhoud was net zo omvangrijk als de titel; in dit referentiewerk zijn 74.000 lemma's opgenomen [10, p. 86]. Deze lemma's zijn geschreven door veel verschillende auteurs (genaamd de *Encyclopédistes*) onder hoofdredactie van Denis Diderot. Jean le Rond d'Alembert was coredacteur en droeg voornamelijk zorg voor de wetenschappelijke redactie. Het lemma *Négatif* was dan ook van zijn hand. In de loop der jaren ging hij echter ook steeds meer onwetenschappelijke lemma's schrijven. Zijn betrokkenheid bij de *Encyclopédie* eindigde in 1757, nadat zijn artikel over de stad Genève voor problemen zorgde[1] [17, p. 115].

Zonder ooit enige formele wetenschappelijke scholing gehad te hebben, wist Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) zichzelf bekend te maken met de werken van de meeste belangrijke natuur- en wiskundigen van zijn tijd. Vanaf 1739 schrijft hij hier ook over en vanaf 1741 bekleedt hij een positie binnen de Académie des Sciences. D'Alembert reisde zelden, werkte 's ochtends en 's middags en bracht de avond door in een salon. Een vrouw had hij niet, hoewel hij wel een tijdje heeft samengewoond met de liefde van zijn leven, Julie de Lespinasse [17, p. 110].

In de *Encyclopédie* vult het lemma *Négatif* meer dan een pagina. Dit is opvallend lang, veel andere onderwerpen worden in slechts een paar zinnen afgedaan. Blijkbaar vormen de negatieve getallen een

[1] In dit artikel prijst d'Alembert de stad Genève, maar doet hij ook enkele (tactloze) suggesties om de stad verder te verbeteren. Deze vallen niet in goede aarde. Vooral de suggestie dat de Genuese Calvinistische onderwijspraktijk wordt herzien wekt woede op bij zowel de Genuezen als katholieken in Frankrijk.

concept dat veel uitleg verdient. Het lemma *Positíf* zegt bijvoorbeeld slechts het volgende:

> **Positief**, een positieve grootheid, *(in de Algebra.)* is een grootheid die het teken "+" heeft of zou moeten hebben; het wordt zo genoemd in tegenstelling tot een negatieve, kleinere grootheid. *Zie ook* Negatieve Grootheid. [2] [18]

Het lemma *Négatif* werd bijzonder goed ontvangen en is volop geprezen voor zijn duidelijkheid. Bovendien was het vanaf het moment dat het uitgebracht werd tot nog bijna 100 jaar daarna erg invloedrijk [12, p. 29]. We zullen later ook zien dat bijvoorbeeld De Gelder de ideeën van d'Alembert bespreekt. Merk hierbij op dat het werk van De Gelder dateert uit 1815, dus meer dan 50 jaar later.

2.2 D'Alemberts opvatting van de negatieve getallen

Volgens d'Alembert was het concept van negatieve getallen één van de drie meest fundamentele problemen in de wiskunde.[3] Het is volgens d'Alembert dan ook niet gemakkelijk om duidelijk te maken wat de natuur van negatieve getallen nu precies is.

Kort gezegd zijn de negatieve getallen volgens d'Alembert 'het tegenovergestelde van de positieve: waar het positieve eindigt, begint het negatieve'[4] [3, p. 72]. Deze passage kan via nul gaan, maar ook via oneindig. Dit eerste is het geval in

$$y = x - a,$$

aangezien $y > 0$ voor $x > a$, $y = 0$ voor $x = a$ en $y < 0$ voor $x < a$. Een passage via oneindig zie je bijvoorbeeld bij

$$y = \frac{1}{x - a}.$$

Hier geldt namelijk dat $y > 0$ voor $x > a$, $y = \infty$ voor $x = a$ en $y < 0$ voor $x < a$. Let wel dat een passage langs nul of oneindig niet automatisch betekent dat het teken moet wisselen; d'Alembert merkt op dat er bijvoorbeeld ook sprake kan zijn van een maximum [3, p. 73, 74]. Dit is bijvoorbeeld het geval als we kijken naar een vergelijking als $(x - 10)^2$: deze vergelijking passeert ook 0 (namelijk voor $x = 10$) maar wisselt hierbij niet van teken.

Dat de negatieve getallen het tegenovergestelde zijn van de positieve getallen, betekent echter niet dat we ze mogen opvatten als de getallen kleiner dan nul. Dat levert namelijk problemen op: 'Zeggen dat een negatief getal minder is dan nul, is uitgaan van iets onvoorstelbaars'[5] [3, p. 72]. Dit legt d'Alembert uit met

[2] '**Positif**, quantité positive, *(en Algebre.)* c'est une quantité qui a, ou qui est censée avoir le signe "+"; elle est ainsi appellée par opposition à la quantité négative, plus petite. *Voyez* Quantité, Négatif.'

[3] De andere problemen zijn volgens hem het concept 'oneindigheid' in de calculus en de ambigue status van parallelle lijnen in de meetkunde [16, p. 25].

[4] 'Les quantités négatives sont le contraire des positives: où le positif finit, le négatif commence' [3, p. 72].

[5] 'Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir' [3, p. 72].

de volgende paradox. We weten namelijk dat de verhouding die -1 heeft tot 1, gelijk is aan de verhouding die 1 heeft tot -1. Oftewel,

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}.$$

Wanneer we dus zouden stellen dat -1 kleiner is dan nul, zou dit betekenen dat het kleinere zich op dezelfde manier tot het grotere verhoudt als het grotere tot het kleinere [5, p. 97]. Dat maakt dat er sprake is van een paradox. We kunnen volgens d'Alembert niet anders dan concluderen dat het absurd is dat -1 kleiner zou zijn dan nul.

Deze paradox herkennen we uit het vorige hoofdstuk. We zagen hem namelijk ook al bij Antoine Arnauld, die hem heeft geïntroduceerd. Helaas voor Arnauld noemt d'Alembert zijn naam echter nergens, en in meerdere bronnen wordt deze paradox dan ook aan d'Alembert toegeschreven. Dit gebeurt zowel bij bronnen uit die tijd (bijvoorbeeld De Gelder, [9]) als bij moderne bronnen (bijvoorbeeld Beckers, [5]). Gezien de uitleg van d'Alembert is het echter onwaarschijnlijk dat hij onbekend was met de ideeën van Arnauld.

Volgens d'Alembert worden de negatieve grootheden vaak gerepresenteerd door realistische grootheden, bijvoorbeeld in de meetkunde.[6] Het verschil tussen een positieve en negatieve rechte lijn wordt dan bijvoorbeeld gegeven door de relatieve afstand tot een gemeenschappelijk punt. Dit laat het lijken alsof de negatieve uitkomsten in de calculus óók realistische grootheden zijn - en hoewel ze dat volgens d'Alembert ook zijn, zijn het wel grootheden waarbij men een ander idee moet hebben dan bij positieve grootheden [3, p. 73].

Wanneer er uit een vergelijking namelijk een negatieve uitkomst volgt, betekent dat volgens d'Alembert dat er in beginsel een verkeerde aanname is gedaan. 'Het teken "$-$", dat we vinden voor een getal, wordt gebruikt om een foutieve aanname recht te zetten en te corrigeren'[7] [3, p. 73]. In het lemma bekijkt d'Alembert het geval waarin een variabele x samen met het getal 100 optelt tot 50. We kunnen dan de vergelijking

$$x + 100 = 50$$

bekijken en daaruit concluderen dat $x = -50$. We hebben hiermee gevonden dat de grootheid 50 is, maar aangezien we hier een negatieve waarde hebben, weten we ook dat we een verkeerde aanname hebben gedaan; het getal zou moeten worden afgetrokken in plaats van opgeteld! De vergelijking die we eigenlijk zouden moeten bekijken is

$$100 - x = 50.$$

We zien dus dat d'Alembert meent dat het optellen van een negatief getal gelijk is aan het aftrekken van een positief getal. Aangezien het eerste scenario onwenselijk is, kunnen we dat voorkomen door de vraag te formuleren op de tweede manier.

[6] Hier gebruikt d'Alembert de uitdrukking 'des quantités réelles,' om aan te geven dat de grootheden een fysische betekenis hadden in de werkelijkheid. Aangezien de term *reëel* binnen de wiskunde tegenwoordig een heel andere betekenis heeft, wordt hier en in het vervolg het woord *realistisch* gebruikt.

[7] 'Le signe $-$ que l'on trouve avant une quantité sert à redresser et à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse' [3, p. 73].

Volgens d'Alembert bestaat er dus geen geïsoleerde negatieve hoeveelheid, zoals bijvoorbeeld -3. Als je -3 écus van iemand krijgt, bedoel je daar eigenlijk mee dat je 3 écus aan hem moet betalen [3, p. 73]. D'Alembert meent dus dat een minteken hoogstens iets verandert aan de toestand waarin het getal verkeert [5, p. 97]. Deze toestanden kunnen we echter in elkaar omzetten: op deze manier interpreteert hij negatieve getallen altijd via hun positieve tegenhanger.

Het is dus een kleine aanpassing in de vraagstelling die bepaalt of de uitkomst positief of negatief zal zijn. Volgens d'Alembert is het ook juist doordat je zo gemakkelijk een negatief getal om kan zetten in zijn positieve tegenhanger, dat 'negatieve wortels realistische oplossingen aanduiden'[8] [3, p. 73]. Het is juist deze mogelijkheid tot omschrijven die de negatieve getallen tot bestaande grootheden maakt, aldus d'Alembert. Imaginaire oplossingen zijn volgens hem namelijk niet om te schrijven en deze wijst hij dan ook af.

Ook deze strategie herkennen we uit het vorige hoofdstuk. Daar zagen we dat koopmannen in eenzelfde soort redenering ook de context gebruikten om negatieve getallen om te zetten in positieve. Dit betekende echter niet zonder meer dat zij de negatieve getallen ook accepteerden. Het omschrijven van negatieve getallen naar positieve doet bovendien denken aan wat we lazen over Descartes in het vorige hoofdstuk.

2.3 Het product van twee negatieve getallen

Ook d'Alembert bespreekt waarom de vermenigvuldiging van twee negatieve getallen resulteert in een positief getal. Zoals we net gezien hebben betekent een negatieve uitkomst volgens d'Alembert dat er een foutieve aanname is gemaakt in het opstellen van de vergelijking. In plaats van dat de variabele zou moeten worden opgeteld, moet hij worden afgetrokken. Het optellen van een negatief getal is dus gelijk aan het aftrekken van een positief getal en 'om dezelfde reden is het aftrekken van een negatief getal, gelijk aan het optellen van een positieve'[9] [3, p. 73].

Nu we dit weten, weten we volgens d'Alembert ook hoe we twee negatieve getallen moeten vermenigvuldigen: 'want dat betekent dat de vermenigvuldiging van $-a$ met $-b$ gelijk is aan het aftrekken van b maal het negatieve getal $-a$'[10] [3, p. 73]. D'Alembert neemt hier stilzwijgend aan dat a, b positief. We moeten dit probleem dus niet zien als de vermenigvuldiging van $-a$ en $-b$, maar als het aftrekken van $-ab$. Dit is op zijn beurt weer gelijk aan het optellen van het positieve ab. Zo hebben we gevonden waarom $-a \times -b = ab$.

Volgens d'Alembert is dit idee 'zo simpel, dat [hij betwijfelt] of het vervangen kan worden door een duidelijkere en exactere'[11] [3, p. 73]. Hoewel deze uitleg volledig is gegrond op het idee dat een negatief getal eigenlijk een 'vermomd' positief getal is, weet d'Alembert dit probleem inderdaad helder uit te leggen.

[8] 'les racines *négatives* indiquent des solutions réelles' [3, p. 73].

[9] '... donc par la même raison en retrancher une *négative*, c'est en ajouter une positive' [3, p. 73].

[10] '... car que signifie la multiplication de $-a$ par $-b$, c'est qu'on retranche b de fois la quantité *négative* $-a$' [3, p. 73].

[11] '... si simple, que je doute qu'on puisse lui en substituer une plus nette & plus exacte' [3, p. 73].

Opvallend is dat d'Alembert de moeite neemt om te benadrukken dat de algebraïsche operaties met negatieve getallen door de hele wereld geaccepteerd worden en worden gezien als exact [3, p. 73]. Hier kunnen echter de nodige kanttekeningen bij geplaatst worden. Zelfs als het zo is dat de regel $-a \times -b = ab$ algemeen wordt geaccepteerd, wil dat nog niet zeggen dat er overeenstemming is over hoe deze regel uitgelegd moet worden. We zien dat deze uitleg van d'Alembert zich sterk baseert op zijn eigen ideeën over de aard van de negatieve getallen, maar over die ideeën heerst er geen consensus. Zo schrijft d'Alembert in dit lemma bijvoorbeeld dat het absurd is om negatieve getallen te zien als kleiner dan nul. Dit wordt echter zelfs binnen de *Encyclopédie* tegengesproken! Zo is er een ander lemma waarin de negatieve getallen precies op deze absurde wijze worden gedefinieerd: als kleiner dan nul [5, p. 97].

2.4 Het woordenboek van Stammetz

Het is interessant om ook te kijken naar het woordenboek van Joan Stammetz [20]. Dit werk kunnen we zien als de Nederlandse tegenhanger van de Franse *Encyclopédie*, hoewel meer gericht op de wetenschappen. De titel van dit woordenboek begint met *Groot en volledig woordenboek der wiskunde, sterrekunde, meetkunde, rekenkunde, ...* (et cetera) en is dus vooral gericht op wiskundige kennis. Net als Diderot heeft Stammetz zich ten doel gesteld om de contemporaine wetenschappelijke kennis breed beschikbaar te maken, zodat dit voor iedereen toegankelijk wordt. Stammetz richt zich hierbij niet alleen op wat er in het Nederlands is geschreven, maar wil ook bijeenbrengen wat er in andere talen over de wetenschappen is geschreven. Zijn woordenboek is uitgebracht in 1758, dus grofweg gezien in dezelfde tijd als dat de *Encyclopédie* van Diderot werd uitgegeven.

Het woordenboek van Stammetz bevat echter geen lemma over de negatieve getallen of een vergelijkbare term. Wanneer we kijken naar het lemma over *Cyffers* [20, p. 115] vinden we een uitleg over verschillende cijfersystemen, waaronder het Romeinse. De Arabische getallen zoals wij deze kennen komen daarin niet voor. Opvallend, want deze worden in hetzelfde lemma wel gebruikt om figuren aan te duiden.

We bekijken ook het lemma over aftrekken, *Minus*. Aftrekken wordt beschreven als een operatie waarbij 'het Kleindere tegen het Grooter Getal als een geheel gehouden, en daar van afgetrokken word' [20, p. 303]. Het getal dat men van een ander getal aftrekt wordt gedefinieerd als *Numerus Minuendus* of *Kleindere*, wat al impliceert dat dit getal kleiner moet zijn dan het getal waar het van wordt afgetrokken. Door aftrekken op deze manier te definiëren zal de uitkomst van deze operatie dus altijd een positief getal zijn.

Interessant is ook het lemma *Cyfra*. Het woord 'cyfra' is Arabisch voor nul en dit lemma gaat dan ook over het teken dat wij tegenwoordig kennen als '0'. In onze moderne wiskunde is dit één van de getallen, maar Stammetz schrijft dat hij meent dat dit teken in de arithmetica 'voor zig zelf geene eigen Betekening, gelyk de overige negen Cyffers heeft, maar gebruikt word, om de leedige plaatzen te vervullen, daar geen Getal staat' [20, p. 116]. Dit teken is bovendien van andere aard dan de overige getallen en moet daar niet mee verward worden. Het houdt alleen een plaats bezet en is zelf geen getal. Eenzelfde uitleg vinden we in het lemma *Zero*, waarin gesproken wordt over hetzelfde teken 0 maar dan in de rekenkunst [20, p. 505].

In het woordenboek van Stammetz is er dus geen plaats voor negatieve getallen. Door aftrekken zo te definiëren dat er altijd een kleiner getal van een groter getal wordt afgetrokken, is het zeker dat deze operatie een positief getal zal opleveren. De negatieve getallen zijn onnodig. Zelfs het zien van de nul als een getal moet worden voorkomen. Hoewel de twee werken dus uit dezelfde tijdsperiode komen en qua inhoud en doelstelling vergelijkbaar zijn, staan zij dus lijnrecht tegenover elkaar in hun omgang met de negatieve getallen. De problemen waar d'Alembert mee worstelt zijn totaal niet aan de orde bij Stammetz. We zien dus ook dat d'Alemberts uitspraak, dat de algebraïsche operaties met negatieve getallen door de hele wereld geaccepteerd zouden worden, niet klopt. Er zijn niet alleen verschillende opvattingen mogelijk over de negatieve getallen, maar het is zelfs mogelijk om het bestaan ervan volledig te ontkennen.

Hoofdstuk 3

Jacob Pierson Tholen: *Theses Philosophicae*

3.1 Over Jacob Tholen

In dit hoofdstuk bekijken we het proefschrift van Jacob Pierson Tholen [22]. Hij studeerde in Franeker en richtte zich vooral op de wis- en natuurkunde. Zijn *Theses Philosophicae* is geschreven in 1784, dus ongeveer 30 jaar nadat d'Alembert het lemma *Négatif* schreef. Dat dit lemma inderdaad erg invloedrijk was zullen we ook terugzien in dit proefschrift. Tholen was duidelijk op de hoogte van de ideeën van d'Alembert. In tegenstelling tot het stuk van d'Alembert werd Tholens proefschrift echter niet erg bekend.

Het karakter van Jacob Tholen wordt in het *Biographisch woordenboek der Nederlanden* lovend beschreven. Zo begint het lemma over hem als volgt:

> THOLEN (Jacobus Pierson), een man, wiens geleerdheid, rondborstigheid en onkrenkbare eerlijkheid door velen werden geroemd, die wel is waar bijna niets in druk heeft nagelaten, doch des te meer in de harten zijner talrijke leerlingen, werd den 20sten September van het jaar 1764 te Leeuwarden geboren. [2, p. 105]

Tholen verkreeg zijn doctoraat in 1784 onder de beroemde hoogleraar Jan H. van Swinden, door het verdedigen van de *Theses Philosophicae* waar we hier het eerste deel van zullen bestuderen. Dit eerste deel is wiskundig van aard en beschrijft zijn ideeën over de negatieve getallen. Het deel is dan ook getiteld 'Iets over de Negatieve Getallen; en hun vermenigvuldiging' [1] [22, p. 3]. In de overige delen presenteert hij vooral zijn ideeën over natuurkundige onderwerpen. (Hoewel deel 9 slechts drie woorden leest: 'Wonderen zijn mogelijk' [2] [22, p. 13].)

Na het voltooien van zijn proefschrift volgt Tholen zijn leraar Van Swinden naar Amsterdam en wordt hij vervolgens lector in de wis- en vestingbouwkunde op de Frieslandse Hoogeschool. In 1797 wordt hij benoemd tot hoogleraar. De inaugurale redevoering die hij toen uitsprak is één van de weinige werken die we van hem hebben. Tholen stond bovendien bekend als een vaardig onderwijzer en erg hartelijk man. Van

[1] 'Quaedam de Quantitatibus Negativis, earumque multiplicatione' [22, p. 3].

[2] 'Miracula sunt possibilia' [22, p. 13].

der Aa schrijft hierover dat hij 'niet alleen [...] gedurende zoo vele jaren als leeraar zijne leerlingen steeds gul en vriendelijk met raad en onderwijs ter zijde [stond]; ook in andere betrekkingen gaf hij menigmaal blijken van zijn kennis en menschlievend karakter' [2, p. 106].

Jacob Tholen stierf in Franeker in 1824, op zijn geboortedag 20 september.

3.2 Iets over de Negatieve Getallen...

De *Theses Philosophicae* van Tholen is het eerste Nederlandse werk dat zich serieus buigt over de conceptuele vraagstukken rondom de negatieve getallen [5, p. 106]. In het buitenland was er hier al wel meer over geschreven en we weten dat Tholen met enkele buitenlandse stukken over dit onderwerp bekend was. Tholens docent Van Swinden hield zich bovendien ook bezig met dit soort fundamentele kwesties [5, p. 106].

Tholen begint met de bewering dat het 'in de Algebra een bestaande regel is, dat een positieve grootheid vermenigvuldigd met een negatieve grootheid, een negatief product oplevert' [3] [22, p. 4]. Op dezelfde manier zegt deze regel ook dat het product van een negatief getal en een positief getal, een negatief getal is. De vermenigvuldiging van twee negatieve getallen levert daarentegen een positief getal op.

De uitleg van deze regel staat centraal in Tholens betoog. Hij is volgens hem namelijk 'inderdaad op het eerste gezicht ofwel absurd, ofwel moeilijk om in te zien met het verstand' [4] [22, p. 4]. Dit maakt dat hij de regel in zijn proefschrift met een aantal woorden wil verduidelijken.

Allereerst is er natuurlijk een bruikbare definitie van vermenigvuldiging nodig. Zo zouden we vermenigvuldiging kunnen definiëren als het herhaaldelijk optellen van een getal. Tholen noemt dat deze definitie vaak wordt gehanteerd, maar helemaal niet goed genoeg is! Hoewel dit namelijk prima gaat zo lang er gehele getallen worden gebruikt, zorgt het voor fouten op het moment dat er gerekend wordt met breuken. In dat geval zal de uitkomst van de vermenigvuldiging namelijk kleiner zijn dan de twee getallen waar we mee begonnen, waardoor de uitkomt onmogelijk het resultaat van een optelling kan zijn.

Beter is het volgens Tholen je bij vermenigvuldiging te richten op het behoud van onderlinge verhoudingen. Dat wil zeggen, om de uitkomst van de vermenigvuldiging $a \times b$ te vinden, zoeken we naar het getal x zodat $x : a = b : 1$. Hierbij gaat Tholen er in de eerste plaats (stilzwijgend) van uit dat $a, b > 0$, hoewel hij later ook negatieve getallen zal invullen voor a en b. Het doel van zijn betoog is om de lezer te overtuigen dat deze definitie ook mag worden toegepast op de negatieve getallen. Tholen schrijft dat '[a]ls $\frac{1}{6}$ wordt vermenigvuldigd met $\frac{1}{5}$, zal dat $\frac{1}{30} : \frac{1}{6} = \frac{1}{5} : 1$ zijn, dat wil zeggen, zoals $\frac{1}{5}$ een vijfde deel van de eenheid is, zo is $\frac{1}{30}$ een vijfde deel van de breuk $\frac{1}{6}$' [5] [22, p. 3].

Deze definitie werkt inderdaad een stuk beter dan de eerder genoemde. Volgens Beckers is deze zelfs, in ieder geval voor zo ver dit de meetkundige constructie van x toestaat, 'zo valide als je maar zou kunnen

[3] '... in *Algebra* est regula constans, quod quantitas positiva per negativam multiplicata, efficiat productum negativum' [22, p. 4].
[4] '... quod quidem prima fronte aut absurdum, aut difficile intellectu videtur' [22, p. 4].
[5] 'Si multiplicatur $\frac{1}{6}$ per $\frac{1}{5}$ erit $\frac{1}{30} : \frac{1}{6} = \frac{1}{5} : 1$ i. e. uti $\frac{1}{5}$ est quinta pars unitatis ita est $\frac{1}{30}$ quinta pars fractionis $\frac{1}{6}$' [22, p. 3].

wensen'[6] [5, p. 106]. Dit omdat men de Euclidische meetkunde destijds zag als het hoogtepunt van formaliteit. Het is dus niet zo bijzonder dat Tholen uitkomt bij een definitie die zich leent voor een meetkundige interpretatie.

In de *Theses Philosophicae* besteedt Tholen expliciet aandacht aan de meetkunde. Zo stelt hij bijvoorbeeld dat 'in de *Meetkunde* negatieve lijnen niet verschillen van positieve, behalve met betrekking tot de plaats van een punt, dat als begin dient'[7] [22, p. 4]. Deze uitspraak doet sterk denken aan een passage bij d'Alembert, waarin deze waarschuwt voor de foutieve ideeën die deze meetkundige voorstelling lijkt te impliceren. Volgens d'Alembert doet juist deze meetkundige vergelijking het namelijk lijken alsof negatieve getallen hetzelfde zijn als positieve getallen, terwijl er hier wel degelijk een verschil in zit.

Precies datgene wat d'Alembert probeert te nuanceren, is wat Tholen beweert. Volgens Tholen kun je uit deze meetkundige vergelijking namelijk juist zien dat negatieve getallen gelijk zijn aan positieve getallen. Hij geeft bovendien de sinus en cosinus als voorbeeld. Het hangt namelijk af van de hoek of deze positief of negatief zijn, en dat laat zien dat 'deze negatieve sinus en cosinus even zo echt zijn als positief, en aan deze gelijk, niet kleiner dan nul'[8] [22, p. 4].

Dat Tholen totaal niet ingaat op deze nuance is opvallend. Door de woordkeuze en formulering van deze passage kunnen we met zekerheid stellen dat hij goed op de hoogte was van wat d'Alembert heeft geschreven. Later zal Tholen opnieuw ideeën presenteren die we ook al zagen bij d'Alembert, en dan geeft hij bovendien precies hetzelfde voorbeeld als d'Alembert gaf (namelijk de vergelijking $x + 100 = 50$). Tholen moet dus geweten hebben van d'Alemberts waarschuwing dat ondanks dat de meetkundige voorstelling dat doet vermoeden, de negatieve getallen niet precies gelijk zijn aan de positieve. Toch beweert Tholen dat deze wel gelijk zijn aan elkaar, met als belangrijkste argument juist deze meetkundige voorstelling. Tegenargumenten op d'Alembert ontbreken opvallend genoeg in zijn betoog. Bovendien geeft Tholen zelfs nieuwe argumenten (zoals bovenstaande over de sinus en cosinus) die juist gebaseerd zijn op hun meetkundige voorstelling.

Tholen bekijkt de negatieve getallen ook op een meer rekenkundige manier. Hij bekijkt de reeks

$$\ldots,\ a-3b,\ a-2b,\ a-b,\ a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \ldots$$

voor drie verschillende waarden van a. De waarde van b benoemt Tholen niet, maar uit de tekst maken we op dat hij stilzwijgend aanneemt dat $b > 0$. Telkens bestuderen we de term $a - b$. Stellen we namelijk dat $a = b$, dan geldt dat de term $a - b$ gelijk is aan nul. Stellen we dat $a = 2b$, dan geldt dat $a - b$ positief is. Als we ten slotte stellen dat $a = 0$, dan is de term $a - b$ negatief. '[H]et kan dus dat grootheden zowel positief als negatief zullen zijn in de berekening, afhankelijk van de plaats van een punt waarvandaan wij beginnen te tellen'[9] [22, p. 5]. Op deze manier laat Tholen opnieuw zien dat negatieve getallen volgens hem helemaal

[6] '... this definition was as sound as one might wish for' [5, p. 106].
[7] '... in *Geometria* lineae negativae a positivis non differunt, nisi respectu situs puncti, quod pro initio sumitur' [22, p. 4].
[8] '... sunt autem hi sinus et cosinus negativi aeque reales ac positivi, et his aequales, non cyfra minores' [22, p. 4].
[9] '... patet ergo quantitates positivas fieri et negativas ratione situs puncti a quo terminos numerare incipimus' [22, p. 5].

niet verschillen van de positieve getallen. De waarde is dus niet persé kleiner dan nul, hij is alleen negatief in zijn verhouding met een gekozen punt. Door dit punt anders te kiezen kan het zijn dat deze waarde positief wordt.

Het is interessant om de term $a = b$ nog eens te bekijken. In dit geval geldt namelijk dat $a - b = 0$, en bovendien dat $a - 2b = -b$. Uit deze laatste gelijkheid kunnen we dus concluderen dat de volgende term in de reeks de nul gaat zijn. Op dezelfde manier kunnen we aan de term $-nb$ dus zien dat de nul kan worden bereikt in n stappen van grootte b [5, p. 107].

Tholen doet vervolgens een aantal uitspraken die we eerder gehoord lijken te hebben. Zo schrijft Tholen dat het aftrekken van een negatief getal gelijk is aan het optellen van een positief getal. Vandaar ook dat we kunnen concluderen dat negatieve getallen even echt zijn als positieve; ze zijn zo gemakkelijk in elkaar om te zetten! Bovendien geeft Tholen een voorbeeld van een vergelijking met een negatieve uitkomst,

$$x + 100 = 50,$$

en ook deze vergelijking hebben we eerder gezien in precies deze vorm. Net als d'Alembert schrijft Tholen dat de uitkomst $x = -50$ slechts aantoont dat we een fout hebben gemaakt in onze aanname dat x bij 100 moest worden opgeteld. In plaats daarvan hadden we moeten kijken naar de vergelijking

$$100 - x = 50,$$

waaruit vervolgens volgt dat $x = 50$.

Tholen herhaalt dus niet alleen enkele ideeën die we al terugvonden bij d'Alembert, hij geeft zelfs letterlijk dezelfde voorbeelden als d'Alembert deed! We zien de grote invloed van d'Alembert – hoewel zijn ideeën worden herhaald zonder dat zijn naam daarbij ook maar één keer genoemd wordt.

3.3 ... en hun vermenigvuldiging

Na al deze voorbeelden hoopt Tholen zijn lezer overtuigd te hebben van de echtheid van negatieve getallen en het feit dat ze op dezelfde manier als positieve getallen kunnen worden gebruikt in berekeningen. Dit legitimeert het om zijn definitie van vermenigvuldiging ook toe te passen op negatieve getallen.

Tholen definieerde de vermenigvuldiging $a \times b$ als het zoeken naar het getal x zodat $x : a = b : 1$. Voordat Tholen kijkt naar de vermenigvuldiging van twee negatieve getallen, past hij zijn definitie toe op $-a$ en b (waarbij hij opnieuw stilzwijgend aanneemt dat $a, b > 0$). We zoeken dus naar het getal x zodat $x : -a = b : 1$. Op deze manier vinden we $x = -ab$. Tholen zelf gebruikt hiervoor een tussenstap en vindt eerst het getal y zodat $y : a = b : 1$, waarna hij concludeert dat deze een minteken krijgt.

Op dezelfde manier kunnen we de vermenigvuldiging van $-a$ en $-b$ bekijken. Tholen concludeert simpelweg dat we door het toepassen van zijn definitie hier de uitkomst $+ab$ verkrijgen. Zijn formulering is daarbij interessant. Hij merkt namelijk op dat $-a \times -b = ab$, 'behalve als aan a of b het teken $-$ vooraf is gegaan'[10] [22, p. 6]. Uit deze formulering blijkt opnieuw dat een negatief getal voor Tholen gelijk is aan zijn positieve tegenhanger, alleen in een andere manifestatie. Dit zagen we ook al in de manier waarop wordt omgegaan met de negatieve uitkomst van de vergelijking $x + 100 = 50$. Ook deze moet worden omgeschreven naar de positieve vorm.

3.4 Tot slot over de *Theses Philosophicae*

We kunnen dus zeker zijn dat Tholen bekend was met de ideeën van d'Alembert. Enkele van deze ideeën heeft hij overgenomen (zij het zonder d'Alemberts naam ook maar één keer te noemen). Een voorbeeld hiervan is de manier waarop een negatieve uitkomst van een vergelijking moet worden geïnterpreteerd. Andere ideeën heeft hij overgenomen, hoewel hij er een andere argumentatie bij geeft. Zo menen beide bijvoorbeeld dat een negatief getal niet kleiner is dan nul, maar doen zij dit om een andere reden. Opvallend is vooral dat Tholen hierbij geen aandacht besteed aan d'Alemberts paradox, dat $1 : -1 = -1 : 1$, terwijl juist Tholen op verschillende punten nadruk legt op verhoudingen.

Hoewel Tholen dus een aantal bekende ideeën herhaalt, geeft hij ook nieuwe punten. Door zijn definitie van vermenigvuldigen heeft hij een eigen manier nodig om uit te leggen hoe de vermenigvuldiging van twee negatieve getallen werkt.

[10] '... ab nam a et b prae se ferentes signum $-$ est indicam' [22, p. 6].

Hoofdstuk 4

Jacob de Gelder: *Proeve over den waren aard van den positieven en negatieven toestand*

4.1 Over Jacob de Gelder

Het volgende werk dat wij bekijken is geschreven door Jacob de Gelder (1765 - 1848). Zijn *Proeve* was een invloedrijk Nederlands werk uit 1815. Het is met 243 pagina's (exclusief voorwoord en 5 bijlagen met figuren) dan ook het meest omvangrijke werk dat er destijds over de negatieve getallen geschreven is [5, p. 108].

De Nederlandse wiskundige Jacob de Gelder kennen we vooral van zijn duidelijke en vernieuwende ideeën over het doel van de wiskunde en de manier waarop wiskunde zou moeten onderwezen. Zelf heeft hij echter niet veel onderwijs mogen genieten. Afkomstig uit de sociale middenklasse kreeg hij les op een Franse school. Hoewel dit gezien werd als een prima opleiding betekende het ook dat hij niet door kon studeren aan een universiteit. Daarvoor was namelijk een opleiding aan een Latijnse school nodig, wat slechts was weggelegd voor de hogere sociale klasse [4, p. 18, 19].

Aan het eind van de jaren 80 van de achttiende eeuw richtte De Gelder net zo'n schooltje op als waar hij zelf les had gehad. Terwijl hij zich richtte op onder andere het wiskundeonderwijs, schreef hij ook zijn eerste boeken. De school ging echter failliet in 1795. 'Met geene tijdelijke middelen bedeeld en van zijn bestaan beroofd, was de toekomst voor hem donker' [1, p. 81]. Dankzij zijn vriendschap met de hoogleraar Van Swinden (die wij ook al zagen als begeleider van Tholens *Theses Philosophicae*) wist hij het echter financieel te redden en lukte het hem zelfs om wat naamsbekendheid op te bouwen. Zo verkreeg hij enkele kortere aanstellingen als onderwijzer, tot hij in 1814 werd aangesteld als professor op de militaire academie te Delft. Dat hij hier in 1818 vervolgens ontslagen werd deed zijn carrière eigenlijk alleen maar goed: in 1819 volgde een aanstelling als buitengewoon hoogleraar in de wiskunde aan de Leidse universiteit. In 1824 werd hij benoemd tot gewoon hoogleraar, wat hij zou blijven tot 1840 [4, p. 19].

4.2 Over de *Proeve*

De Gelder heeft veel geschreven werken achtergelaten. Eén van deze werken is de *Proeve over den waren aard van den positieven en negatieven toestand der grootheden in de stelkunst en in de toepassing van dezelve op den meetkunst* uit 1815. Hij werkte ten tijde van de publicatie reeds als professor in Delft maar schreef het boek al eerder, in 1813. Het boek heeft, zoals de meeste van zijn werken, vooral een educatieve doelstelling. De Gelder was in de eerste plaats een onderwijzer. Dit boek is dan ook vooral geschreven als studieboek, en niet als filosofisch werk. De wiskundige kennis op zich was daarbij niet het hoofddoel, maar nodig voor het natuurkundige onderzoek [5, p. 121].

De Gelder schrijft zelf ook dat hij er naar streeft om met dit werk eindelijk duidelijkheid te verschaffen over de manier waarop negatieve getallen moeten worden opgevat. Dit is volgens hem namelijk alleen maar onduidelijker geworden nadat anderen (zoals bijvoorbeeld d'Alembert) hierover geschreven hebben. Vooral voor beginnende wiskundigen is dit volgens hem verwarrend - en De Gelder neemt zich voor om die verwarring voor eens en voor altijd weg te nemen.

De Gelder heeft veel lof gekregen voor de manier waarop hij dit heeft aangepakt. Het boek werd goed ontvangen en kreeg zelfs tien jaar na verschijningsdatum nog goede kritieken [5, p. 108]. Bovendien verwijst De Gelder naar zijn ideeën uit de *Proeve* in het schoolboek over algebra dat hij in 1826 schreef.[1] Dit boek werd tot in de jaren 1840 in Nederland veelvuldig gebruikt [5, p. 108].

Het werk wordt voorafgegaan door een brief van het Hollandsch Instituut van Wetenschappen en Kunsten, waarin het wordt geprezen om zijn duidelijkheid. Dit instituut is in 1808 opgericht door Lodewijk Napoleon en het was een voorloper van de KNAW. Na enkele keren van naam gewisseld te zijn, heette het sinds 1814 officieel het *Nederlandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten te Amsterdam*. Sinds dat jaar is het ook pas echt een Nederlandse organisatie, aangezien het in de voorgaande jaren sterk beïnvloed werd door de Franse bezetting [13, p. 17].

Het instituut is opgedeeld in vier klassen voor verschillende gebieden van de wetenschap. De Eerste Klasse bevatte onder andere een afdeling voor de *wiskunde, sterrenkunde, landmeetkunde, benevens aardrijks- en zeevaartkunde* en is dan ook de klasse die de aanbevelingsbrief voorafgaand aan de *Proeve* heeft geschreven [13, p. 122-129]. Specifiek kwam deze van Cornelis Krayenhoff (natuurkundige, arts en generaal), Jacob Floryn en Obbe Bangma (beide wis- en zeevaartkundige). De Tweede, Derde en Vierde Klasse bevatten afdelingen voor andere (niet-wiskundige) wetenschapsgebieden.

Opmerkelijk is dat De Gelder zelf nooit lid is geweest van dit instituut (Tholen was dat sinds 1812 bijvoorbeeld wel). Al met al betekende deze lovende brief voor De Gelder dus een aanbeveling van de meest vooraanstaande Nederlandse wetenschappers uit het vakgebied. De Gelder is hier duidelijk blij mee, aangezien hij de brief een prominente plaats heeft gegeven voorin zijn boek en hem ook uitgebreid bespreekt in zijn voorwoord.

[1] Dit boek was getiteld: *Verhandeling over het verband en den zamenhang der natuurlijke en zedelijke wetenschappen, en over de wijze om zich dezelve eigen te maken en aan anderen meede te deelen.*

In de brief die het boek vooraf gaat wordt de suggestie gedaan om het boek van De Gelder uit te geven in het Frans in plaats van in het Nederlands. De Gelder reageert opvallend fel op deze kritiek. De Franse bezetting zit duidelijk nog vers in het geheugen en De Gelder pleit er dan ook voor dat wetenschappers weer meer in de landstaal gaan publiceren. Daarnaast zou hij nog liever in het 'deftig en mannelijk Latijn' schrijven dan in het 'winderige en verwijfde Fransch' [9, p. ix].

4.3 Aanpak van De Gelder

De Gelder had een duidelijk beeld van de manier waarop wiskunde beoefend zou moeten worden. Het belangrijkste was dat er in een wiskundige theorie niets mocht voorkomen wat strijdig was met het gezond verstand. Hij was een diepgelovige man die meende dat God de wereld had gecreëerd. Wiskundige ideeën waren volgens hem dan ook bedoeld om meer te weten te komen over onze schepping. We kunnen deze ideeën naast de werkelijkheid leggen en zo ervaren dat ze waar zijn. Ze hoeven dus niet worden getoetst, want het zijn geen uitvindingen, maar ontdekkingen. Nieuwe bewijzen waren daarbij nuttig omdat zij zouden zorgen voor een beter begrip en een scherpere formulering [6, p. 48].

Zijn geloof zorgde ervoor dat De Gelder minder problemen had met de negatieve getallen dan veel buitenlandse wiskundigen. De grote rol voor de overeenkomst met de werkelijkheid stond hem namelijk toe om metaforen te gebruiken in de bepaling van een begrip (zoals de negatieve getallen), in tegenstelling tot veel andere wiskundigen [6, p. 48]. Door metaforen toe te staan en vast te houden aan de bekende rekenregels is het mogelijk om een plek te geven aan de negatieve getallen. De enige eisen zijn dat de nieuwe rekenregels voor deze getallen passen in het systeem van oude regels en dat er genoeg metaforen zijn om deze regels aannemelijk te maken. Zonder metaforen te gebruiken wordt het echter een stuk lastiger om de negatieve getallen te legitimeren. In dat geval moeten de negatieve getallen namelijk eerst geconstrueerd worden en moet er vervolgens worden bewezen dat de rekenregels voor de positieve getallen daar ook gelden. Dit moderne inzicht stelt ons in staat om de rechtvaardiging achter De Gelders aanpak van de negatieve getallen te begrijpen.

De Gelder noemt zelf verschillende soorten metaforen. Zo kon men negatieve getallen bijvoorbeeld opvatten als schuld of achterwaartse afstand. De Gelder zag hoe veel moeite andere wiskundigen hadden met de negatieve getallen en de internationale aandacht voor deze kwestie was de aanleiding om zijn ideeën hierover nauwkeurig uit te werken in de *Proeve* [6, p. 48].

Volgens De Gelder vereist 'de rang en het aanzien, welke de Wiskunst onder de Wetenschappen bekleedt' dat haar 'Beginselen in [...] een helder licht [worden gesteld]' [9, p. 14]. Dat is volgens De Gelder ook wat het verschil maakt tussen een natuurkundige en een wiskundige verklaring. Bij een natuurkundige verklaring gaat men er volgens De Gelder van uit 'dat namelijk eene onderstelling, welke alle verschijnselen verklaart, voor voldoende mag gehouden worden'[2] [9, p. 15]. Wanneer we een wiskundig begrip echter volledig willen

[2] Origineel is volledig cursief.

begrijpen, moeten we alle uitgangspunten waar dit begrip op berust óók begrijpen. De principes waarmee wordt begonnen moeten zelf onmiskenbaar waar zijn.

De Gelder gaat daarom uit van drie grondbeginselen:

1. *"Wij hebben getracht de begrippen der dingen uit derzelver eigenlijke wording en oorsprong te verklaren, zonder aan den klank der woorden, waardoor die begrippen worden uitgedrukt, te blijven hangen, noch uit andere wetenschappen hulpmiddelen, ter verklaring en opheldering dezer begrippen, te ontleenen.*

2. *Hebben wij in de toepassing van eenig algemeen deel der Wiskunst op eenig ander gedeelte, bij voorbeeld, van de Algebra op de Meetkunst, zorgvuldig in acht genomen, om de gronden en beginselen van het toegepaste gedeelte, overeenkomstig den aard van beide, op de eenvoudigste en natuurlijkste wijze te verklaren.*

3. *En eindelijk hebben wij ons voorgeschreven, om, ingevalle er wezenlijke kritieken op eenen algemeen aangenomen kunstterm kunnen gemaakt worden, dit gebrekkig woord te blijven behouden, ingevalle het niet mogelijk was, een ander in deszelfs plaats te stellen, op hetwelk, het zij op zich zelven, het zij in de gevolgen, niet dezelfde kritieken zouden kunnen gemaakt worden."* [9, p. 17, 18]

Het hoofdpunt van De Gelder is dat hij meent dat nieuw ingevoerde begrippen kunnen zorgen voor veel verwarring als deze niet op de juiste manier worden geïntroduceerd. Dat is ook wat er volgens hem is gebeurd met de negatieve getallen. De keuze voor de woorden *positief* en *negatief* in dit geval was iets wat volgens hem alleen maar tot onduidelijkheid heeft geleid, zo blijkt ook uit op meerdere punten uit zijn boek. Dit omdat het twee woorden zijn die al een betekenis hebben in andere vakgebieden en in het dagelijks leven. Deze betekenis verschilt echter van de betekenis in het geval van de negatieve getallen. Daardoor maakt men gemakkelijk verkeerde associaties.

In het eerste punt zien we dit sterk terug. De Gelder wil zijn verklaringen op puur stelkundige gronden geven. De betekenis van die de termen die hij daarvoor gebruikt in andere vakgebieden reeds hebben is daarbij irrelevant. Dit zal hij vooral uiteenzetten in het eerste deel van het boek, waarin hij uitwijdt over de 'aard, de hoedanigheid, beteekenis en behandeling der positieve en negatieve grootheden' [9, p. 18].

In het derde punt zien we iets soortgelijks. We lezen hier eigenlijk al dat De Gelder van mening is dat er veel kritiek te geven is op het gebruik van de termen *positief* en *negatief*. Echter is precies dezelfde kritiek óók te leveren op elke term die je zou gebruiken als vervanging van *positief* en *negatief*, dus daarom levert het volgens hem niets op om deze woorden te vervangen. Dit beargumenteert hij in deel drie van zijn boek.

Ten slotte kunnen we over het tweede punt hierboven zeggen dat De Gelder meent dat de verklaringen van de negatieve getallen die hij op basis van de 'algemeenheid der Stelkunst'[3] geeft, ook toepasbaar moeten zijn op de meetkunde [9, p. 18]. Dit is dan ook wat hij in deel twee van de *Proeve* probeert te verduidelijken.

In deze bespreking zullen wij alleen het eerste deel van de *Proeve* behandelen, omdat deze voor ons doel het meest relevant is.

[3] Origineel is volledig cursief.

4.4 De Gelder over de negatieve getallen

De Gelder maakt in zijn benadering van de negatieve getallen vooral gebruik van twee methoden. Het behouden en verklaren van de regels binnen de stelkunst, ook als deze worden uitgebreid met de negatieve getallen, is zijn belangrijkste uitgangspunt. Daarnaast maakt hij veelvuldig vergelijkingen met niet-wiskundige situaties om zijn uitspraken te verduidelijken. De Gelder legt zo verbanden tussen de wiskundige manier om de negatieve getallen te zien en de manier waarop dit in andere gebieden van de wetenschap of het dagelijks leven wordt gedaan. We zullen zien dat zijn uitleg steeds een combinatie van deze methoden is.

Volgens De Gelder vinden de positieve en negatieve getallen hun oorsprong in de stelkundige formule $x = a - b$. Er zijn hier twee gevallen mogelijk, namelijk $a > b$ en $a < b$ (waarbij stilzwijgend wordt aangenomen dat a, b positief).[4] Deze gevallen kennen $a = b$ als 'algemeene grenslijn' [9, p. 22]. In het eerste geval spreken we van een positieve uitkomst (met bijbehorend teken $+$) en in het tweede geval van een negatieve uitkomst (met bijbehorend teken $-$) [9, p. 21, 22]. De Gelder benadrukt dat het niet raar is om een stelkundige uitdrukking te definiëren door middel van twee termen a en b, aangezien het definiëren van een breuk door middel van een teller en een noemer op dezelfde wijze gaat.

Tegenwoordig zouden we uit een dergelijke uitleg al snel concluderen dat De Gelder van mening is dat de negatieve getallen kleiner zijn dan nul. Dit punt ligt echter erg gevoelig en De Gelder besteedt veel tijd aan het uitleggen van deze nuancering. We zullen er daarom later in deze paragraaf op terugkomen.

We kunnen alle mogelijke voorkomens van een stelkundige uitdrukking (bestaande uit de optelling of aftrekking van twee of meer termen) in de gewenste vorm $a - b$ schrijven. De Gelder legt uit hoe dit moet. Men behoort eerst de termen aangeduid met '+' op te tellen en deze som a te noemen. Vervolgens worden ook de termen aangeduid met '−' opgeteld en de som aangeduid als b. Op deze manier kunnen we de uitkomst dus altijd schrijven in de vorm $x = a - b$, de algemene vorm voor positieve en negatieve getallen.

Opvallend hierbij is dat De Gelder op dit moment alleen het geval $a = b$ noemt als mogelijkheid voor de passage van positief naar negatief, terwijl hij later zal benadrukken dat dit ook via oneindig kan gaan (zoals we ook al zagen bij d'Alembert).

De Gelder waarschuwt de lezer al gelijk dat het gebruik van de termen *positief* en *negatief* erg verwarrend is voor de ongeoefende wiskundige.[5] Zij worden misleid door de betekenis die deze termen in andere wetenschappen hebben gekregen - andere woorden zouden namelijk de tegengestelde natuur van positieve en negatieve getallen net zo goed kunnen weergeven [9, p. 23]. De afwegingen bij de keuze voor de juiste terminologie zijn een terugkerend thema dat De Gelder vooral behandelt in deel drie van zijn boek. Ook in dit eerste deel merken we echter dat hij hier veel mee bezig is.

[4] Later zal De Gelder aangeven dat de termen in een uitdrukking van deze vorm volgens hem altijd positief zijn. Helemaal stilzwijgend is dit dus niet, zie ook de eerste paragraaf van sectie 4.5.

[5] De Gelder is erg begaan met de beginnende wiskundige die zich aan zijn boek waagt. Zo geeft hij meerdere malen wat extra tips voor als deze zijn uitleg niet in een keer begrijpt, en raadt hij de beginner in zijn voorwoord aan om zelf op een kladblaadje mee te schrijven.

Het is volgens De Gelder onmogelijk om een negatief getal (en eigenlijk evenzo een positief getal) op een andere manier correct te interpreteren dan via de uitdrukking $a - b$. De Gelder schrijft letterlijk dat een getal zich in 'eenen positieven of negatieven toestand [kan] vertoonen' [9, p. 25]. Later zal hij nog benadrukken dat de positieve en negatieve getallen dus geen verschillende *soorten* getallen zijn, maar dezelfde soort getallen met een verschillende toestand. We kunnen zien dat alle getallen van dezelfde soort zijn, door de getallen 'op zich zelven' te nemen. Dit is een uitdrukking die De Gelder vaker gebruikt. Hij legt uit dat 'op zich zelven, dat is, buiten hunnen positieven of negatieven toestand' [9, p. 54]. Tegenwoordig zouden we dit de absolute waarde noemen. Negatieve getallen zijn dus een andere toestand van dezelfde soort getallen - 'want daar er eigenlijk geene negatieve getallen, als zoodanige, op zich zelve bestaan' [9, p. 66]. Deze opvatting is één van de centrale punten van zijn uitleg - we zien dat De Gelder dit zo belangrijk vond dat hij het zelfs benadrukte in de titel van zijn werk, *Proeve over den waren aard van den positieven en negatieven* ***toestand***.

Wat De Gelder hiermee bedoelt, is dat $+3$ en -3 volgens hem slechts 'abstracte getallen [zijn], welke in aard en hoedanigheid van elkander volstrekt niet onderscheiden zijn: de teekens $+$ en $-$ voor dezelve geplaatst, duiden slechts twee tegenovergestelde toestanden der formule $a - b$ aan' [9, p. 25]. Alleen op deze manier zullen de stelkundige bewerkingen en de 'éénheid en gelijkvormigheid van beginselen' toepasbaar blijven. Juist deze toepasbaarheid van de stelkundige regels na uitbreiding met de negatieve getallen is voor De Gelder een belangrijk doel.

De Gelder gebruikt twee metaforen ter verduidelijking van de manier waarop we deze toestand moeten zien. De eerste is die van een koopman, die als hij zijn winst of verlies berekent als volgt te werk gaat. Zijn totale winst is volgens De Gelder gelijk aan

$$\text{[som der winsten]} - \text{[som der verliezen]}.$$

Ook hier zien we de algemene vorm $a - b$ terug. In het geval dat $a > b$ (met opnieuw a, b positief) heeft de koopman volgens De Gelder inderdaad winst gemaakt, ofwel, heeft hij 'gewonnen'. Als echter $a < b$ heeft hij '*negatievelijk gewonnen;* hij heeft zich dan in het *tegengestelde geval van winnen*, dat is, in het *geval van verliezen* bevonden' [9, p. 28]. 'Deze koopman nu drukt zijne winst of zijn verlies uit door eene geldwaarde, welke, het zij men dezelve als winst of verlies beschouwe, in zich zelve niets anders dan eene geldwaarde blijft, zonder dat de bijgevoegde woorden van winst en verlies dezelve, even zoo min tot eene andere soort van grootheid maken, als de benaming van positief of negatief de waarde der formule $a - b$ tot eene andere soort van getal maken kan'[6] [9, p. 28, 29].

Evenzo beschouwt De Gelder het vooruit- en terugrekenen vanaf het huidige jaar, dat wil zeggen, het jaar 1813. De tegenstelling die de woorden *voor* en *na* uitdrukken is hetzelfde als wat de woorden *positief* en *negatief* uitdrukken. Ze veranderen niets aan de 'hoedanigheid van duurzaamheid' [9, p. 29]. Bovendien zijn ze volledig afhankelijk van het punt waarvandaan we zijn begonnen met tellen. Hetzelfde is het geval voor tegenstellingen als *debet* en *credit* of *onder* en *boven* [9, p. 49]. Opnieuw zien we hoe De Gelder de intuïtie

[6] Origineel is volledig cursief.

van de lezer probeert te gebruiken als argument en bovendien hoe hij zich bezighoudt met de naamgeving van het fenomeen dat hij probeert te omschrijven.

Ook De Gelder worstelt met de vraag of negatieve getallen nu wel of niet kleiner zijn dan nul. Zo schrijft hij dat hij het met d'Alembert eens is dat we $-a$ niet moeten beschouwen als zijnde minder dan nul (met opnieuw a positief). Tenminste, niet in 'eenen eigenlijken en stelligen zin' [9, p. 30]. Het is namelijk problematisch om voor een verklaring van de negatieve getallen dit als beginpunt te nemen. Deze uitspraak is namelijk niet volstrekt noodzakelijk en werkt alleen maar verwarrend bij een uitleg van de negatieve getallen aan beginners. Toch is deze uitdrukking 'wel uitgelegd en met naauwkeurigheid verklaard, in alles zoo geheel ongepast en volstrekt ongerijmd niet' [9, p. 33]. Dit komt doordat deze uitspraak gegrond is in ons dagelijkse taalgebruik, en dit is dan ook wat het rechtvaardigt. Hij is volgens De Gelder verknocht met de theorie van de negatieve getallen en kan daarom dan ook niet vermeden worden.

De Gelder neemt het de 'eerste uitvinderen der Stelkunst' niet kwalijk dat zij wél in letterlijke zin dachten dat negatieve getallen kleiner waren dan nul, want de reeks

$$\ldots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$$

lijkt dit volgens hem inderdaad te suggereren [9, p. 30]. Bovendien waren er destijds geen termen om dit begrip duidelijker uit te drukken.

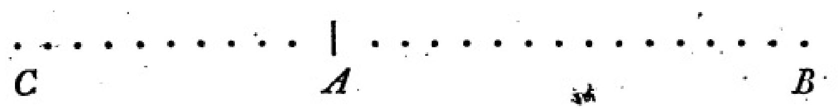
Dat deze spraakverwarring onnodig is, blijkt volgens De Gelder uit de vele vergelijkbare situaties waarin er geen dergelijke verwarring ontstond. Waar we de getallen zelf ooit zagen als verzamelingen eenheden, hebben we deze definitie moeten oprekken om de breuken toe te kunnen voegen. Evenzo kan vermenigvuldiging niet worden gezien als het herhaald optellen van een getal, omdat de vermenigvuldiging $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ eigenlijk een deling is.[7] Dergelijke uitbreidingen leverden echter geen verwarring op, zelfs niet toen het machtsverheffen, a^n, werd uitgebreid naar bijvoorbeeld $a^{\frac{1}{3}}$. Wat er bedoeld werd was voor wiskundigen nog steeds duidelijk genoeg, ook al paste de manier van uitdrukken niet langer precies bij de operatie [5, p. 110]. De Gelder schrijft dat:

> 'Geen wijsgeer, zoo veel ons bekend is, heeft zich tegen deze beteekenis van woorden en teekens, bij onderlinge overeenkomst, vastgesteld, immer verzet, noch zich aan de zeer oneigenlijke uitdrukking $a^0 = 1$ gestooten; en dit is ook zeer natuurlijk; omdat alle deze eigenlijke en oneigenlijke wijzen van zeggen, in de algemeene formulen $a \times b$ en a^n, in dezelver algemeenste uitgestrektheid genomen, liggen opgesloten en uit dezelve even zoo natuurlijk voortvloeijen, als, uit de algemeenheid der formule, $a - b$, het begrip van positief en negatief,' [9, p. 32, 33]

Om de kwestie definitief op te helderen legt hij uit hoe we dit volgens hem dan wél moeten interpreteren.

[7] Dit argument zijn we ook al tegengekomen bij Tholen, maar in tegenstelling tot Tholen geeft De Gelder geen alternatieve definitie van vermenigvuldiging (of van de andere operaties).

Men weet immers dat alle getalsbewerkingen gebaseerd zijn op twee hoofdbewerkingen, namelijk '*tellen* en *te rug tellen*' [9, p. 34]. Om dit te doen is er een beginpunt A nodig (merk op dat niet hoeft dat $A = 0$). Vanaf dit punt kunnen we optellen tot een punt B en evenzo kunnen we van daar ook weer terugtellen. Er is echter geen reden om te stoppen met terugtellen wanneer we bij A aangekomen zijn. Bekijk figuur 5.1; het is zeer goed mogelijk om door te tellen tot punt C.



Figuur 4.1: '... eene onbepaalde rij van punten, door het dwarsstreepje A afgescheiden' [9, p. 34].

Op dezelfde manier moeten we de term $a - b$ zien, volgens de Gelder. Allereerst telt hij op tot a en vervolgens telt hij vanaf hier b terug. Op deze manier verkleint de waarde van de formule $a - b$ stap voor stap. Dit stopt volgens De Gelder wanneer we opnieuw aankomen bij $b = a$, want van daar is terugtellen niet meer mogelijk (we zijn namelijk uitgekomen op 0). Men dient vervolgens 'de hoegrootheid van die onmogelijkheid, aan te duiden,' en dat wordt gedaan door aan te geven 'hoeveel aan het getal a ontbreekt, om b van hetzelve te kunnen aftrekken'[8] [9, p. 35]. Dit getal wordt het *deficit* genoemd en voor de duidelijkheid duidt men dit getal aan met een minteken.

De Gelders uitleg lijkt erg op de uitleg die we zagen bij John Wallis in hoofdstuk 1. Wallis interpreteerde de negatieve getallen door zich een wandeling voor te stellen. Hij gaf daarbij ook een schematische weergave van deze wandeling die lijkt op wat we tegenwoordig een getallenlijn zouden noemen. Dit zien we ook terug bij De Gelder. In tegenstelling tot De Gelder heeft de lijn van Wallis echter een duidelijk begin- en eindpunt: de lijn eindigt op een punt met een naam en een dwarsstreepje. Het is een lijn die is opgesteld bij een reeds bepaalde wandeling. De lijn van De Gelder heeft geen duidelijk begin- en eindpunt, hij noemt het zelf dan ook een 'onbepaalde rij van punten' [9, p. 34]. Hiermee benadrukt De Gelder dat er verschillende waarden kunnen worden ingevuld voor a en b.

Opvallend is dat De Gelder in deze passage twee verschillende betekenissen hanteert voor de eenheid. Sterker nog, dat doet hij binnen één zin: 'na van de éénheid tot a geteld te hebben, is men van a een getal van b éénheden te rug gegaan'[9] [9, p. 34, 35]. Zoals De Gelder later in een voorbeeld ook zal laten zien, moeten we 8 'eenheden' (acht maal een één) optellen vanaf 'de eenheid' (waarvoor hij later ook het woord 'nul' gebruikt) om bij het getal 8 te komen. Er is hier dus sprake van twee verschillende eenheden. In een rekenkundige reeks of rij punten is de eenheid wat wij nu zien als het getal 0, terwijl een getal bestaat uit een optelling van eenheden, ofwel het getal 1.

Deze uitleg lijkt opnieuw te suggereren dat de passage van positief naar negatief (of andersom) via nul zal gaan. Dit terwijl De Gelder later in zijn boek ook de mogelijk van een passage via oneindig zal bespreken (op dezelfde manier als we reeds zagen bij d'Alembert). Het is dus opvallend dat hij niet bespreekt hoe we deze figuur in dat geval moeten interpreteren; De Gelder is hier in zijn uitleg dus niet volledig.

[8] Origineel is volledig cursief.

[9] Origineel is volledig cursief.

Door getallen op deze manier via tellen en terug tellen te interpreteren, kunnen we de negatieve getallen in een reeks als

$$\ldots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$$

ook begrijpen. Merk bijvoorbeeld op dat we vijf plaatsen naar rechts moeten tellen om vanaf de term 3 naar de term -2 te komen. Het getal -2 zegt dus dat er aan de term 3 twee eenheden ontbreken om in vijf stappen op nul uit te komen. De operaties '$>$' en '$<$' blijven zo betekenisvol voor zowel de positieve als negatieve getallen, aangezien $-2 > -3$ slechts aangeeft dat 'het deficit -2 nader bij den eersten term der reeks is, dan het deficit -3' [9, p. 36].

We kunnen De Gelders theorie van de negatieve getallen als volgt samenvatten. Volgens De Gelder zijn getallen (en de grootheden die zij uitdrukken) altijd positief - getallen kunnen namelijk 'op zich zelven genomen' niet negatief zijn [9, p. 48]. Wat men positieve en negatieve getallen noemt, zijn één en dezelfde soort getallen, maar manifestaties van verschillende toestanden hiervan. We begrijpen dit door te kijken naar de algemene vorm $a - b$. Oftewel, we nemen een getal a in gedachten en tellen hiervan meer terug 'dan het mogelijk is'; het resultaat is de hoeveelheid die vervolgens moet worden opgeteld 'om de te rug telling tot nul te brengen' [9, p. 48]. Deze uitkomst duiden we aan met een $-$ om aan te geven dat dit getal een deficit is. De termen *positief* en *negatief* zijn slechts de termen die in de plaats komen van bekende termen uit de toepassingen, zoals *winst* en *verlies* of *voor* en *na*. Ten slotte kan de overgang van de positieve naar de negatieve toestand gaan via nul of via oneindig.

4.5 De negatieve getallen in operaties

De Gelder bekijkt vervolgens wat het betekent om verschillende bewerkingen uit te voeren wanneer we ook negatieve getallen in beschouwing nemen. Hierbij merkt hij op dat de tekens $+$ en $-$ twee betekenissen hebben. Wanneer ze voor een 'los' getal staan (zoals bijvoorbeeld $-a$), geven ze de toestand aan waarin dit getal verkeert. Dat wil zeggen, het teken laat zien of het getal positief of negatief is. Wanneer de $+$ en $-$ in een uitdrukking met verschillende getallen voorkomen (denk bijvoorbeeld aan $a - b + c + d - e$), dan laat dit zien hoe verschillende getallen moeten worden opgeteld of afgetrokken. De verschillende getallen zelf moeten we dus zien als positief [9, p. 39].

De belangrijkste operaties binnen de stelkunst zijn volgens De Gelder optellen en aftrekken. Een positief of negatief getal a bij een ander getal b optellen (als $b + a$), moet worden gezien als het samennemen van a en b waarbij a zijn eigen teken houdt. We kunnen deze getallen van elkaar aftrekken (als $b - a$) door ze opnieuw samen te nemen, maar nu a juist het tegenovergestelde teken te geven [9, p. 38]. Hierbij kan a nog steeds een positief of negatief getal zijn. De Gelder lijkt er bij het geven van deze regels van uit te gaan dat b positief is. Hij bespreekt verder niet wat het betekent om twee negatieve getallen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken, hoewel het voor zijn definitie geen problemen oplevert om b negatief te nemen.

Helemaal helder is zijn uitleg niet, want wat het precies betekent om twee getallen ‘samen te nemen’ blijft onduidelijk.

Voordat De Gelder zich waagt aan zijn uitleg van vermenigvuldiging, benadrukt hij dat het duidelijk mag zijn dat de som van positieve getallen zelf ook positief zal zijn, en de som van negatieve getallen negatief. Bovendien is elk positief getal b niets anders dan b maal de ‘positieve eenheid’ opgeteld [9, p. 42]. Dit betekent dat

$$b = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{b \text{ keer}}.$$

Op deze manier is $a \times b$ ‘niets anders dan de som van b getallen, die elk a éénheden bevatten’ [9, p. 42]. We zouden dit als volgt kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} a \times b &= \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{a \text{ keer}} \times b \\ &= \underbrace{\underbrace{+(1 + 1 + \ldots + 1)}_{a \text{ keer}} + (1 + 1 + \ldots + 1) + \ldots + (1 + 1 + \ldots + 1)}_{b \text{ keer}} \\ &= \underbrace{+a + a + \ldots + a}_{b \text{ keer}} \\ &= +ab. \end{aligned}$$

De Gelder noemt hier niet dat a, b positief zijn, maar aangezien hij later ook apart de gevallen waarin a en b negatief zijn bespreekt, zien we dat hij hier wel van uitgaat. Vervolgens breidt De Gelder deze redenering uit naar de negatieve getallen. Dit maakt $-b$ ‘niets anders dan b maal de éénheid negatief genomen’ [9, p. 42]. Ofwel,

$$-b = \underbrace{(-1) + (-1) + \ldots + (-1)}_{b \text{ keer}} = -\underbrace{1 - 1 - \ldots - 1}_{b \text{ keer}}.$$

Op dezelfde manier is $-a \times b$ ‘niets anders dan het negatieve getal $-a$, bij zich zelve opgeteld b malen,’ ofwel $-ab$ [9, p. 42]. Deze vermenigvuldiging kan ook worden uitgeschreven op de manier van hierboven en zo blijkt duidelijk dat dit gelijk is aan $-ab$. Bekijken wij bovendien $a \times -b$, dan moeten wij ‘het getal a zoo veelmaal negatief [...] nemen als er éénheden in b zijn’ [9, p. 42]. Zo vinden we dus eveneens dat $a \times -b = -ab$.

Het laatste geval is de vermenigvuldiging $-a \times -b$. Deze volgt volgens De Gelder volledig uit de voorgaande gevallen en hij noemt slechts het (volgens hem vanzelfsprekende) resultaat. Aangezien het eerste getal nu negatief is (namelijk, $-a$) ‘zal het [resultaat] door den negatieven toestand van den vermenigvuldiger positief worden' [9, p. 42]. Meer dan dit schrijft De Gelder niet. We kunnen zelf de achterliggende redenering samenvatten als:

$$
\begin{aligned}
-a \times -b &= \underbrace{((-1) + (-1) + \ldots + (-1))}_{a \text{ keer}} \times\ -b \\
&= \underbrace{(-1 - 1 - \ldots - 1)}_{a \text{ keer}} \times\ -b \\
&= \underbrace{-\ \underbrace{(-1 - 1 - \ldots - 1)}_{a \text{ keer}} - (-1 - 1 - \ldots - 1)\ -\ \ldots\ -\ (-1 - 1 - \ldots - 1)}_{b \text{ keer}} \\
&= +ab.
\end{aligned}
$$

De Gelder legt later uit dat 'een negatief getal negatief te denken, is hetzelve, in eenen tegengestelden zin, dat is positief te nemen; $-a$ met $-b$ te vermenigvuldigen is dus $+a$ te nemen $+b$ maal en het product is derhalve $+ab$' [9, p. 43].

Opvallend is dat De Gelder eerder heeft betoogd dat we vermenigvuldiging niet mogen zien als het herhaald optellen van een getal, aangezien dat problematisch is voor breuken als $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Toch is dit precies de definitie die hij in deze passage hanteert.

Na deze uitleg gaat De Gelder ervan uit dat hij deze kwestie nu 'geene de minste duisterheid meer hebben kan' [9, p. 43]. De vermenigvuldiging volgt volgens hem namelijk in alle gevallen de gewone rekenkundige regels voor vermenigvuldiging.

De Gelder meent dat, nu we volledige duidelijkheid hebben over vermenigvuldigen, delen ook niet moeilijk meer kan zijn. Hij gaat er hierbij van uit dat een breuk $\frac{b}{a}$ twee verschillende dingen kan betekenen. De eerste mogelijkheid is dat dit een verhouding van deel b tot geheel a is, en de tweede mogelijkheid is dat dit zien als een b^{ste} gedeelte van geheel a. Het grootste probleem dat De Gelder moet oplossen is hoe 'hoe eenig gedeelte des geheels als negatief kan gedacht worden' [9, p. 45]. Dit doet hij middels een meetkundige uitleg die we hier niet zullen behandelen.

Na zijn uitleg over breuken besluit De Gelder dat dit een nieuwe mogelijkheid voor de overgang tussen positieve en negatieve getallen geeft, namelijk via oneindig. Hij geeft hierbij dezelfde redenering als we ook al zagen bij d'Alembert.

4.6 Weerlegging van de tegenwerpingen van d'Alembert en Carnot

Er zijn volgens De Gelder een aantal 'standaard' tegenwerpingen die toepasbaar zijn op veel theoriën van de negatieve getallen. De Gelder bespreekt deze in de *Proeve* en gaat na in welke mate deze relevant zijn voor de theorie zoals hij deze heeft beschreven. Hij schrijft dat de tegenwerpingen gebundeld zijn in de werken van d'Alembert en Carnot en onderverdeeld kunnen worden in drie categorieën. Allereerst zijn er bedenkingen ten opzichte van de verklaring van de positieve en negatieve getallen zelf. Daarnaast zijn er bedenkingen bij de paradoxen die lijken te ontstaan wanneer de begrippen 'groter' en 'kleiner' worden toegepast op de negatieve getallen. Tot slot zijn er ook bedenkingen die ontstaan wanneer men de stelkunst toepast op de meetkunde. Dit laatste vormt de rode draad in het tweede deel van De Gelders boek en de tegenwerpingen van deze aard zullen we hier dan ook achterwege laten.

Het eerste punt dat De Gelder bespreekt is d'Alemberts uitspraak dat negatieve grootheden minder dan nul zouden zijn. Het is opvallend dat De Gelder deze woorden aan d'Alembert toeschrijft. Eerder in zijn boek schrijft De Gelder namelijk het tegenovergestelde:

> Naar onze wijze van verklaren, is, in eenen eigenlijken en stelligen zin, $-a$ niet een getal a van nul afgetrokken, en gevolgelijk $-a$ niet minder dan nul: dit zijn wij met de Heeren D'ALEMBERT en CARNOT volkomen eens. [9, p. 30]

In het hoofdstuk over d'Alembert eerder in deze scriptie hebben we het lemma *Négatif* uit de *Encyclopédie* bekeken. We zagen dat d'Alembert zich daar verzet tegen het idee dat negatieve getallen kleiner zouden zijn dan nul. Sterker nog, hij begint dit lemma met de volgende woorden:

> NEGATIEF, bijv. nw. (Algeb.) *negatieve* grootheden zijn, *in de Algebra,* de getallen die beïnvloed zijn door het teken −, en door meerdere wiskundigen worden gezien als minder dan nul. Dit laatste idee klopt echter niet, zoals we zo dadelijk zullen zien.[10] [3, p. 72]

Het zou natuurlijk kunnen dat d'Alembert zijn standpunt over deze kwestie in de loop van zijn leven heeft veranderd en in een ander werk dan *Négatif* het tegenovergestelde heeft betoogd. We kunnen daarom niet met zekerheid zeggen of De Gelder d'Alembert woorden in de mond heeft gelegd. Het zou een geschikt onderwerp zijn om in eventueel verder onderzoek nader uit te zoeken of d'Alembert ooit een dergelijke mening heeft verkondigd of er anders alternatieve redenen zijn voor De Gelder om dit aan te nemen. Onafhankelijk van d'Alemberts uitspraken is het echter zo dat De Gelder zichzelf wat betreft de mening van d'Alembert tegenspreekt.

Of de negatieve getallen al dan niet kleiner zijn dan nul heeft De Gelder al eerder besproken. Wat betreft zijn eigen standpunt blijft hij wel consequent en hij herhaalt zijn eerder verkondigde uitleg als reactie op deze tegenwerping. '[I]n zich zelve en volstrekt genomen' is de uitspraak dat negatieve getallen minder zijn dan nul 'tegenstrijdig en onverklaarbaar,' maar in het dagelijks taalgebruik is het 'zoo ondubbelzinnig en verstaanbaar [...], dat niemand in den zin dezer woorden eenige duisterheid ontdekt' [9, p. 52].

Een tweede veelgehoorde tegenwerping richt zich op de manier waarop de negatieve getallen kunnen worden gebruikt in ongelijkheden. De Gelder is het niet eens met de manier waarop d'Alembert en Carnot de

[10] 'NÉGATIF, adj. (Algeb.) quantités *négatives, en Algebre,* sont celles qui sont affectées du signe −, qui sont regardées par plusieurs mathématiciens, comme plus petites que zéro. Cette derniere idée n'est cependant pas juste, comme on le verra dans un moment.' [3, p. 72]

begrippen *groter* en *kleiner* toepassen op de negatieve getallen. Een juiste uitwerking hiervan is belangrijk, want '[d]e woorden grooter en kleiner zijn immers hier en overal, waar de begrippen van positief en negatief zijn' [9, p. 53]. Bepaalde ongelijkheden kan men zich volgens De Gelder altijd voorstellen, bijvoorbeeld $6 > 3$ of $3 > 0$. Het wordt echter moeilijker bij ongelijkheden als $+4 > -5$, of $-3 > -6$, of $0 > -3$. Dit is volgens De Gelder slechts voorstelbaar wanneer men een afdalende reeks (zoals bijvoorbeeld $\ldots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots$) in gedachten neemt. Men kan nu positieve en negatieve getallen met elkaar vergelijken doordat we de negatieve termen (via terugtellen) kunnen begrijpen als deficitten. We kunnen nu dus begrijpen dat $-3 > -6$, ook al geldt tegelijkertijd dat $3 < 6$.

Deze uitleg van De Gelder is gebaseerd op het centrale idee dat de negatieve getallen slechts een andere toestand zijn van dezelfde soort getallen. We kunnen deze vergelijkingen dus op twee manieren bekijken. Ten eerste kunnen we elk getal 'op zich zelve' bekijken; we kijken dan dus (in moderne verwoording) naar de ongelijkheid die geldt voor de absolute waarde van de getallen. Wanneer we echter 'een positief en een negatief getal' vergelijken, dan kunnen we beide toestanden in acht nemen middels de bovenstaande methode.

De Gelder schrijft dat de tegenwerpingen van d'Alembert en Carnot zijn gebaseerd op de eerste manier; zij bekijken alleen de getallen 'op zich zelven'. Volgens d'Alembert beïnvloedt het minteken alleen de toestand en dus niet de waarde van het getal. Dat is echter onjuist, volgens De Gelder. Hij meent bovendien dat de tegenwerping niet langer opgaat voor zijn nieuwe uitleg. Ook hier gebruikt De Gelder weer vergelijkingen met een niet-wiskundige situatie om zijn uitleg te verduidelijken. Hij schrijft dat 'het is even, als of men zeide: Pieter is minder geld schuldig dan Paulus; derhalve heeft Pieter meer rijkdom dan Paulus' [9, p. 54].

Deze bespreking van ongelijkheden brengt ons naar de volgende tegenwerping, die we inmiddels vaker hebben bestudeerd: de paradox van d'Alembert! De Gelder formuleert deze als

$$-8 : 4 = 6 : -3$$

in plaats van $1 : -1 = -1 : 1$, zoals d'Alembert zelf doet. Dit omdat het volgens De Gelder nu extra duidelijk is dat $-8 < 4$ en $6 > -3$. Het probleem van d'Alembert is hier dat -8 tot 4 staat zoals 6 tot -3, en dus het kleine tot het grote staat zoals het grote tot het kleine. Dat levert een paradox op.

De Gelder lost deze paradox op door een nieuw begrip te introduceren: de *reden*. Deze redens worden gedefinieerd als 'de verhoudingen van twee getallen of grootheden; in het bepalen van die redens heeft men met de getallen, als getallen, alleen te doen' [9, p. 56]. Hierbij heeft het al dan niet negatief zijn van één van de termen dus geen invloed.

In het geval van $-8 : 4 = 6 : -3$ kijken we dus niet naar $-8 < 4$ en $6 > -3$, maar alleen naar de vergelijking van de redens. We zien dan dat $8 > 4$ en $6 > 3$, 'zoo als het behoort' [9, p. 56]. Al met al was dit volgens De Gelder 'niet anders dan eene paradox of wonderspreuk' [9, p. 56].

Naast deze paradox van d'Alembert bespreekt De Gelder ook drie paradoxen die toegeschreven worden aan Carnot. Net als de bovenstaande paradox zijn die drie ook gebaseerd op de moeilijkheden rondom ongelijkheden met positieve en negatieve getallen. Omdat dit moeilijke onderwerp dus wel wat extra verduidelijking kan gebruiken, geeft De Gelder zes axioma's met uitleg. Deze axioma's gelden in eerste instantie alleen voor de positieve getallen. Later geeft De Gelder aan hoe deze veranderen door negatieve getallen. Beckers geeft deze in moderne notatie:

$$\begin{aligned}
&\text{Axioma 1: } a > b \Rightarrow a + c > b + c,\\
&\text{Axioma 2: } b > c \Rightarrow a - b < a - c,\\
&\text{Axioma 3: } a > b \text{ en } c > d \Rightarrow a + c > b + d,\\
&\text{Axioma 4: } a > b \Rightarrow ac > bc,\\
&\text{Axioma 5: } a > b \text{ en } c > d \Rightarrow ac > bd,\\
&\text{Axioma 6: } a > b \Rightarrow a : c > b : c. \quad \text{[5, p. 112]}
\end{aligned}$$

De eerste drie axioma's zijn evengoed waar voor negatieve getallen, dat is volgens De Gelder overduidelijk. Bij de laatste drie axioma's kan de ongelijkheid dan echter omdraaien, waardoor deze wel veranderen. Uit de eerder besproken regels van de vermenigvuldiging volgt dit echter op logische wijze, volgens De Gelder [9, p. 64].

4.7 Laatste woorden over de *Proeve*

Al met al zien we dat De Gelder in de *Proeve* de theorie van de negatieve getallen veel meer vanaf de grond probeert op te bouwen dan d'Alembert of Tholen deden. Op deze manier wordt het meer een volledige theorie van de negatieve getallen dan slechts een verklaring. De Gelder benadrukt in zijn inleiding dat hij zich dit inderdaad tot doel heeft gesteld. We zien dit terug in de manier waarop hij begint met het opstellen van de basisoperaties optellen en aftrekken en deze vervolgens gebruikt om vermenigvuldigen en delen te verduidelijken. Daarnaast geeft hij ook daadwerkelijk een aantal axioma's. Dit verschilt met de eerdere teksten, die zich meer richten op het verklaren van het fenomeen 'negatieve getallen' dan dat ze een volledige theorie hiervan geven.

De Gelder beroept zich in zijn verklaringen regelmatig op metaforen. Waar d'Alembert dringend waarschuwde voor de verwarring die vergelijkingen soms met zich kunnen meebrengen en Tholen alleen nut zag voor een vergelijking met de meetkunde, kijkt De Gelder vaak naar allerlei situaties buiten de wiskunde. De Gelder gebruikt deze vergelijkingen juist om zijn lezer ervan te overtuigen dat de ideeën die hij presenteert overeenkomen met wat we kunnen ervaren in de werkelijkheid.

Ten slotte besteedt De Gelder veel aandacht aan naamgeving. Hij benadrukt dat we tegenstellingen als *voor* en *na* of *debet* en *credit* precies dezelfde lading hebben als de woorden *positief* en *negatief*. Die hadden we net zo goed kunnen gebruiken. Deze woordkeuze was voor d'Alembert en Tholen geen enkel probleem, de terminologie lijkt voor hen vanzelfsprekend. Het lijkt alsof De Gelder duidelijk inziet wat hij met de negatieve getallen moet, maar dat hij worstelt met de naamgeving. Dit terwijl voor d'Alembert en Tholen de naamgeving duidelijk was en het fenomeen minder. De rollen zijn dus omgedraaid.

Hoofdstuk 5

Een vergelijking tussen *Négatif, Theses Philosophicae* en de *Proeve*

In deze scriptie hebben we een deel van het debat over de plaats van de negatieve getallen gezien. Dit debat vond plaats over een opvallend grote tijdspanne. We hebben argumenten besproken uit de zestiende eeuw, maar zien ook dat in 1815, als de *Proeve* gepubliceerd wordt, nog steeds niet alle onduidelijkheden zijn opgelost. Bovendien vindt De Gelder het nog steeds relevant om de paradox die we voor het eerst zagen bij Arnauld (in 1667!) te bespreken. Zoals Kline ook schrijft zien we dat de enkele argumenten die er zijn continu herhaald worden [14, p. 596]. Hoewel veel wiskundigen een duidelijke positie innamen en het debat fel gevoerd werd, was de verspreiding van nieuwe kennis langzaam.

Deze verspreiding gaat zelfs zo langzaam dat het ondanks de jarenlange discussie, heel goed mogelijk blijft om het gehele bestaan van de negatieve getallen te ontkennen. Dit zagen we bijvoorbeeld in het woordenboek van Stammetz. Op deze manier vormen de negatieve getallen natuurlijk ook geen probleem.

Door de auteurs die hier wel over schrijven wordt er met regelmaat geroepen dat de kwestie helemaal niet zo ingewikkeld is. D'Alembert schijft bijvoorbeeld dat 'de regels van de algebraïsche operaties met negatieve grootheden door de hele wereld geaccepteerd worden en in het algemeen worden gezien als exact' [1] [3, p. 73]. Het artikel van d'Alembert is echter helemaal niet op alle punten duidelijk en wordt later, bijvoorbeeld door De Gelder, nog volop bekritiseerd. Van wereldwijde overeenstemming is dus duidelijk geen sprake. De Gelder zelf meent ook dat het probleem is opgeblazen door wat verschillende auteurs hierover hebben gepubliceerd en dat de onduidelijkheden gemakkelijk uit de weg geruimd kunnen worden.

Zo gemakkelijk als ze het probleem doen overkomen, was het helaas niet. Een belangrijke onduidelijkheid is de vraag wát er nu eigenlijk bewezen moet worden. Er vindt rond 1800 een zuivering en een rigorisering van de wiskundebeoefening plaats. Intuïtie wordt daardoor steeds minder belangrijk en de redeneerstappen

[1] '... les regles des opérations algébriques sur les quantités négatives, sont admises par tout le monde, reçues généralement comme exactes ...' [3, p. 73].

die men mocht maken werden formeler en strenger. Het was niet zo dat het onderwerp van de redenering vanaf dat moment ‘gesteld’ werd op de manier waarop we dat tegenwoordig doen, maar het moest wel een ‘zinvolle en scherp geformuleerde abstractie van reële objecten of processen’ zijn [6, p. 14].

Wanneer we het bewijs dat de abbacorekenmeesters geven vergelijken met het bewijs dat De Gelder geeft, zien we dit inderdaad duidelijk terug. Dit terwijl er in beide gevallen hetzelfde doel wordt nagestreefd, want beide bewijzen hebben vooral een educatief doel.

Een opvallende overeenkomst die we vaak terugzien is de stellige overtuiging dat de negatieve getallen onmogelijk kleiner kunnen zijn dan nul. Het idee dat iets nooit *minder dan niets* kan zijn, vormde de hoofdreden om op zoek te gaan naar een alternatieve manier om met deze getallen om te gaan.

We zagen dat d’Alembert zelf eigenlijk nog veel moeite had met het accepteren van de negatieve getallen. Een belangrijke reden was voor hem dat een vergelijking met een negatieve uitkomst gemakkelijk kon worden omgeschreven zodat deze een positieve uitkomt kreeg. Dat laat zien dat hij de negatieve getallen zelf eigenlijk niet accepteerde, maar zich toch weer richtte op de positieve getallen. Een negatieve uitkomst (zoals -3 écus van iemand krijgen) interpreteert hij dus altijd via een positief getal (namelijk 3 écus aan iemand moeten geven).

D’Alembert richtte zich voornamelijk op het omschrijven van de vergelijking om zo de negatieve uitkomst te vermijden, iets wat Tholen (met letterlijk dezelfde voorbeelden) van hem heeft overgenomen. Tholen breidde zijn uitleg echter uit met een rekenkundige reeks, waarbij hij speelt met de waarden van termen $a - nb$ voor verschillende n. Door vooral te kijken naar het geval waar $a = b$ geeft Tholen een voorzichtig opzetje voor de interpretatie die we terugzien bij De Gelder.

De Gelder beweert namelijk dat elk negatief getal geschreven kan (en moet!) worden in de vorm $a - b$. Hij weet zo een manier te geven om de negatieve getallen te interpreteren als een geordend paar van twee positieve getallen.[2] Deze schrijfwijze weet hij te koppelen aan veel situaties in het dagelijks leven, bijvoorbeeld wanneer we [winst] − [verlies] berekenen, of [voorwaartse afstand] − [achterwaartse afstand]. Op deze manier legt hij de nadruk op de verhouding die er tussen de twee getallen bestaat: het ene getal is zo veel groter of kleiner dan het andere. Zo is een negatief getal altijd relatief vanaf een punt en hoeft dit dus niet persé kleiner dan nul te zijn.

In het eerste hoofdstuk hebben we gezien op hoeveel manieren de vermenigvuldiging van twee negatieve getallen kan worden uitgelegd. We hebben wiskundigen gezien die beargumenteerden dat dit een positieve uitkomst moest hebben, maar ook wiskundigen die meenden dat deze uitkomst negatief was. D’Alembert, Tholen en De Gelder zijn het er over eens dat $-a \times -b$ de positieve uitkomst ab heeft (a, b positief). Wel leggen ze dit op verschillende manieren uit.

Opvallend is in de eerste plaats dat ze alle drie menen dat dit een erg simpele en duidelijke regel is die gemakkelijk uit hun overige theorie volgt. In alle drie de gevallen is er maar vrij kort aandacht voor deze

[2] Deze uitleg lijkt bijzonder veel op het basisidee van de methode die wij tegenwoordig gebruiken om $\mathbb{Z}$ te construeren uit $\mathbb{N}$.

vermenigvuldiging, omdat de uitleg hiervan zo overduidelijk zou zijn.

D'Alembert baseert zich op de gelijkenissen tussen het optellen van een negatief getal en het aftrekken van een positief getal. Dat past goed in zijn uitleg van de negatieve getallen, die hij immers interpreteert als een foutieve aanname in de oorspronkelijke vergelijking. Hij beroept zich dus op de dualiteit tussen de positieve en negatieve getallen en het gemak waarop deze kunnen worden omgeschreven. Tholen benadrukt dit punt eveneens, maar richt zich daarnaast vooral op verhoudingen. Hij meende dat de vermenigvuldiging $-a \times -b$ eigenlijk zoekt naar het getal x zodat $x : -a = -b : 1$. Het voordeel van deze methode is dat het ook werkt bij breuken. Dat is bij de uitleg van De Gelder zeker niet het geval: die ziet een getal a als a positieve eenheden en $-a$ als a negatieve eenheden. In dit laatste geval kunnen we deze eenheden $-b$ maal nemen om zo uit te komen op $-a \times -b$. Doordat we nu een negatief getal opnieuw negatief nemen wordt dit een positief getal.

Hoewel d'Alembert, Tholen en De Gelder alle drie menen dat $-a \times -b = ab$ leggen ze dit dus op drie verschillende manieren uit. De grote verschillen in hun opvattingen over de negatieve getallen zelf maken dat een eenduidige uitleg van deze rekenregel nog niet zo makkelijk te geven is.

We zien heel duidelijk dat deze wiskundigen op de hoogte waren van wat anderen schreven over dit onderwerp en zich hierdoor ook lieten beïnvloeden. Bovendien ontwikkelt het idee van de negatieve getallen, zij het langzaam, inderdaad richting het beeld van de negatieve getallen dat wij tegenwoordig hebben. De Gelder is de eerste waarvan we lezen dat hij meent dat alle gehele positieve en negatieve getallen geschreven moeten worden in de vorm $x = a - b$. Deze uitdrukking zien we echter ook al bij Tholen als bij d'Alembert terug, zij het als deel van een argument ongerelateerd aan dit onderwerp. Dat deze wiskundigen van elkaars werk op de hoogte waren mag echter duidelijk zijn.

Interessant om te bekijken is ook het onderscheid tussen grootheden en getallen. Beide termen zijn we in deze scriptie tegengekomen. Zo had d'Alembert het steeds over *quantités négatives* en Tholen over *quantitates negativae*. De Gelder gebruikt beide termen en schrijft dat beide zowel positief als negatief kunnen zijn, maar benadrukt ook dat ze beide iets verschillends aanduiden:

> '*Men moet, in het beschouwend en werkdadig gedeelte der Wiskunst, zal men zich de dingen in hare ware gedaante voorstellen, een behoorlijk onderscheid stellen tusschen de grootheden, welke men, in derzelver verband en zamenhang, beschouwt, en tusschen de abstracte getallen, welke de betrekking en de onderlinge afhankelijkheid dezer grootheden uitdrukken:* dit onderscheid is zoo wezenlijk, als het onderscheid tusschen het levend voorwerp en zijn afbeeldsel.' [9, p. 26]

De term *grootheden* duidt vanuit historisch perspectief op een algemener begrip dan *getallen*. Euclides redeneert bijvoorbeeld over grootheden en bedoelt daarmee dat zijn stellingen waar zijn voor alle uitingen hiervan: dat kunnen lijnstukken zijn, maar bijvoorbeeld ook oppervlakten of hoeken. Ook voor De Gelder is het zo dat een wiskundig vraagstuk een vraag stelt over grootheden. Getallen geven slechts de verhoudingen tussen de grootheden weer: zoals de ene hoek twee keer zo groot kan zijn als de ander. Binnen een vergelijking zie je volgens De Gelder dan ook getallen terugkomen, waarmee dus de verhoudingen tussen de termen worden aangeduid. Het eindantwoord dat uit de vergelijking komt is echter altijd een grootheid en dat betekent dat er in sommige gevallen nog een extra selectie van de uitkomsten plaats moet vinden. Het zou namelijk zo kunnen zijn dat de vergelijking 'uitkomsten [zou] kunnen geven, die onwaarheden behelzen of met zich zelven zouden kunnen strijdig zijn' [9, p. 27]. Ofwel, in ons specifieke probleem zijn niet alle algemene oplossingen ook daadwerkelijk geldig.

Na alle moeite die wordt gedaan om aan te tonen dat de negatieve getallen dezelfde status horen te krijgen als de positieve getallen, valt het op dat ze impliciet toch ondergeschikt blijven. We hebben verschillende auteurs horen zeggen dat positieve en negatieve getallen van dezelfde 'soort' zijn. Op het moment dat er echter een variabele wordt gedefinieerd, wordt er eigenlijk altijd vanuit gegaan dat deze positief is, zonder dat men het nodig acht om dat erbij te vermelden. Impliciet blijft er zo toch nog een verschil tussen positieve en negatieve getallen: de positieve getallen zijn nu eenmaal een stuk dieper geworteld in het wiskundige denkbeeld.

Conclusie

Na al deze woorden over ‘minder dan niets’ hebben we vooral gezien dat de discussie nog lang niet afgelopen is na 1815. Het feit dat het probleem destijds nog steeds niet was opgelost laat het misschien lijken alsof er niet veel is bereikt met de werken van d’Alembert, Tholen en De Gelder, maar het tegendeel is waar. Met de argumenten die zij hebben opgebracht hebben ze een meer of minder grote bijdrage geleverd aan het vinden van een manier om met de negatieve getallen om te gaan.

We hebben ook gezien dat men in de wiskunde kan weten *dat* iets waar is, zonder dat men weet *waarom* dat zo is. Want wat moet er nu eigenlijk verklaard worden? Ook voor de regel dat $-a \times -b = ab$ zijn er verschillende verklaringen te geven, sommigen logischer dan andere. Door al deze verschillende verklaringen naast elkaar te leggen zien we wat er nodig was om deze regel te begrijpen en waar het probleem dus zit. Het idee dat er iets zou kunnen bestaan wat minder dan niets is, zorgt voor zo veel weerstand dat wiskundigen er alles aan proberen te doen om de negatieve getallen op een andere manier te verklaren. Een interessant onderwerp voor toekomstig onderzoek zou zijn om uit te zoeken waar dit idee vandaan komt; want hoewel er veel over wordt geschreven, zijn eigenlijk alle wiskundigen het met elkaar eens dat dit idee absurd klinkt. Hoewel we dus op meerdere plekken zijn tegengekomen dat dit een wijdverspreid idee zou zijn, zijn we zelf niet één aanhanger tegengekomen. Dat maakt dit specifieke idee de moeite waard om beter te bestuderen.

In het bijzonder zagen we bovendien dat De Gelder deze uitspraak toeschrijft aan d’Alembert, terwijl d’Alembert voor zover wij weten het tegenovergestelde betoogde. Hoe De Gelder aan dit idee komt is ook een onderwerp voor verder onderzoek.

Het lijkt onwaarschijnlijk dat de acceptatie van de negatieve getallen zo lang op zich heeft zitten wachten. In deze scriptie hebben we echter de problemen gezien die zich rond deze getallen opstapelden. We kunnen dan ook niet anders dan concluderen: het is ook niet niets, die negatieve getallen!

Bibliografie

[1] Aa, Abraham J. van der: *Biographisch woordenboek der Nederlanden*, volume 7, hoofdstuk Jacob de Gelder, pagina's 80–84. J.J. Van Brederode, 1862.

[2] Aa, Abraham J. van der: *Biographisch woordenboek der Nederlanden*, volume 18, hoofdstuk Jacobus Pierson Tholen, pagina's 105–107. J.J. Van Brederode, 1874.

[3] Alembert, Jean le Rond d': *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres*, volume 11, hoofdstuk Négatif, pagina's 72–74.

[4] Beckers, Danny J.: *Jacob de Gelder en de wiskundige ideologie in Nederland (1800-1840)*. Gewina, 19:18–28, 1996.

[5] Beckers, Danny J.: *Positive thinking, conceptions of negative quantities in the Netherlands and the reception of Lacroix's algebra textbook*. Revenue d'histoire des mathémathiques, 6:95–126, 2000.

[6] Beckers, Danny J.: *Het despotisme der Mathesis*. Uitgeverij Verloren, 2003.

[7] Cardano, Girolamo: *Opera Omnia*. Lyon: Jean Antoine Huguetan and Marc Antione Ravaud, 1663.

[8] Confalonieri, Sara: *The Unattainable Attempt to Avoid the Casus Irreducibilis for Cubic Equations*. Springer Spektrum, 2013.

[9] Gelder, Jacob de: *Proeve over den Waren Aard van den Positieven of Negatieven Toestand der Grootheden in de Stelkunst*. 's Gravenhage en Amsterdam: de gebroeders Van Cleef, 1815.

[10] Gillispie, Charles C.: *Complete Dictionary of Scientific Biography*, volume 4, hoofdstuk Diderot, Denis, pagina's 84–90. Charles Scribner's Sons.

[11] Heeffer, Albrecht: *Historical Objections Against the Number Line*. Science & Education, 20:863–880, 2011.

[12] Hefendehl-Hebeker, Lisa: *Negative Numbers: Obstacles in their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs*. For the Learning of Mathematics, 11:26–32, 1991.

[13] Kaa, Dick J. van de en Y. de Roo: *De leden van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen: een demografisch perspectief: 1808 tot 2008*. KNAW Press, 2008.

[14] Kline, Morris: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1972.

[15] Kremer, Elmar: *Antoine Arnauld*. In Zalta, Edward N. (redactie): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, zomer 2018 uitgave, 2018.

[16] Martínez, Alberto A.: *Negative Math: how mathematical rules can be positibely bent*. Princeton University Press, 2006.

[17] Morton Briggs, J.: *Complete Dictionary of Scientific Biography*, volume 1, hoofdstuk Alembert, Jean le Rond d', pagina's 110–117. Charles Scribner's Sons.

[18] Onbekend: *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres*, volume 13, hoofdstuk Positif, pagina 160.

[19] Pycior, Helena M.: *Symbols, Impossible Numbers and Geometric Entanglements*. Cambridge University Press, 1997.

[20] Stammetz, Joan L.: *Groot en volledig woordenboek der wiskunde, sterrekunde, meetkunde, rekenkunde, tuigwerkkunde, burger-, scheeps- en krygsbouwkunde, gezichtkunde, water- en vuurwerkkunde, benevens andere nuttige kunsten en wetenschappen*. Steven van Esveldt, 1758.

[21] Struik, Dirk Jan: *Geschiedenis van de wiskunde*. Uitgeverij Het Spectrum, 2001.

[22] Tholen, Jacob P.: *Theses philosophicae*. Franequerae: Viduam Gulielmi Coulon, 1784.

[23] Thomaidis, Yannis: *Aspects of Negative Numbers in the Early 17th Century*. Science Education, 2:69–86, 1993.

[24] Vredenduin, Piet G. J.: *Grepen uit de geschiedenis van het negatieve getal*. Euclides, 61(10):331–337, 1985-1986.

[25] Wallis, John: *A Treatise of Algebra, both Historical and Practical: shewing, The Original, Progress, and Advancement thereof, from time to time, and by what Steps it hath attained to the Heighth at which now it is*. Londen: John Playford, 1685.

Appendix: *Less than nothing?*[1]

English summary of a bachelor thesis on nothing less than the negative number and their problematic acceptance.

It proved quite a struggle to establish the right of existence of the negative numbers. For many years, mathematicians found the idea of something being *less than zero* absurd, but at the same time they realized more and more that there was no way around these numbers. Without a decent introduction, different mathematicians came up with different suggestions – although not all equally convincing. We will look at the approaches by d'Alembert, Tholen and De Gelder from around the years 1750-1815. Mathematics is becoming more and more abstract, but at the same time lacking in foundations [14, p. 393]. The study of the negative numbers therefore provides an interesting case study of the way mathematicians dealt with a subject they could not fully comprehend.[2]

Development in the acceptance of the negative numbers happened slowly, so we will start with a discussion of some of the earlier approaches. This will introduce us to some fundamental arguments in this discussion. Then we continue with a study the lemma *Négatif*, written by the Frenchman Jean le Rond d'Alembert for the encyclopedia of Diderot. D'Alembert wrote this influential work in the years 1750 and received persistent praise for its clarity in the following decades. We will also study the first ever Dutch work on negative numbers, namely the *Theses Philosophicae* by Jacob Pierson Tholen. This dissertation from 1784 is largely devoted to the negative numbers and we will see that Tholen's view is greatly influenced by d'Alembert. Finally we look at the *Proeve over den waren aard van den positieven en negatieven toestand*,[3] written by Jacob de Gelder in 1815. This remains the most important Dutch work on the negative numbers for decades and intends to clear all misunderstanding around the negative numbers. Of special interest in our analysis of all mathematicians will be the explanation of the multiplication of two negative numbers.

[1] A more thorough exposition of the subject can be found in the complete (Dutch) thesis titled 'Minder dan niets?', written under supervision of dr. S.A. Wepster.

[2] Comparable discussions took place on similar topics, such as limits. Interestingly, not only d'Alemberts lemma on negative numbers for Diderot's *Encyclopédie* proved of great influence: in the discussion on limits, his corresponding lemma had equal impact [14, p. 433].

[3] 'Essay on the true nature of the positive and negative state'.

Finally, we should be careful not to let our modern views get in the way of our purposes. Our modern custom of indicating that a number x is negative by writing that $x < 0$, for example, is something that sounds absurd in the time period we are studying. Furthermore, as the existence of the negative numbers is the subject being discussed, it is assumed that all introduced variables are positive.

5.1 Views on negative numbers

In this section we will examine some (mostly western) views that do provide an interesting account of the negative numbers, such that we know the context of the ideas of d'Alembert, Tholen and De Gelder.

The negative numbers came to Europe via the Arabs, who denied the existence of the negative numbers altogether [14, p. 192]. Most Europeans were sceptic of negative numbers as well, but made an exception when these could be easily accepted in their context. This was for example the case for the north Italian *maestri d'abbaco*, who educated boys to become merchants between 1300-1500 [11, p. 869]. They were the first to provide 'proofs' that the multiplication of two negative numbers resulted in a positive number – although these were actually more explanations than convincing proofs [11, p. 869]. The context of debt and profit made it possible for a merchant to interpret a negative number as a positive one, such that he could work with it [11, p. 864].

Girolamo Cardano (1501–1576) was aware of the ideas of the *maestri d'abbaco*, but did not agree with their reasoning. Interestingly, he used exactly their example to prove the opposite in *De Regula Aliza* [8, p. 385]![4] However, it is the question how seriously we should take Cardano, as we know him to contradict himself on this subject.[5] We could see this argument as criticism on the ease with which (unproven) rules involving negative numbers are accepted [11, p. 372].

Thomas Harriot (1560-1621) experimented with different systems of rules for the multiplication of negative numbers [14, p. 252]. He especially described a system where all multiplications result in a positive number, except the multiplication of two negatives: this produces a negative number [16, p. 139]. As he thought these ideas were too daring to describe in mathematical terms, he chose to describe them via a poem.[6]

Antoine Arnauld (1612–1694) described a paradox in his 1667 *Nouveau éléments de géometrie* that would later become known as 'd'Alembert's paradox' [15]. He takes two numbers a and b, with $a > b$ and claims that

$$\frac{a}{b} > \frac{b}{a}.$$

[4] Obviously, Cardano's proof was faulty – he extended the ideas of Euclidean geometry too far [8, p. 405].

[5] In his *Ars Magna* from 1545 he argues to avoid the negative numbers, but at the same time uses the ordinary calculation rules to work wit them. In chapter 6 of the *Aliza* he even proclaims that minus times minus always results in plus [8, p. 379].

[6] This poem can be found in the complete thesis or in Pycior: [19, p. 63].

However, taking $a = 1$ and $b = -1$ would then lead to

$$\frac{1}{-1} > \frac{-1}{1},$$

at least if we assumed $1 > -1$. Arnauld therefore denied this idea and argued that the use of negative numbers should be avoided [11, p. 867, 868]. Even though Arnauld was the first to mention this paradox, we find it attributed to d'Alembert in all sources (both contemporary, such as De Gelder [9], and modern, such as Beckers [5]).

John Wallis (1616–1703) advocated for a correct, physical interpretation of the negative numbers. He believed we should think of the negative numbers as a walk starting from a certain point A. Numbers preceded by a "+" should be interpreted as steps forward and numbers preceded by a "−" as steps backward. It is very well possible that the man walking ends up at some point before A after a certain sequence of steps. We should conclude from our assumption that the walk was going forwards is apparently wrong. Furthermore Wallis (being against the idea that negative numbers are less than zero) argued for the existence of negative numbers greater than infinity. He claimed this followed from $\frac{1}{0} = \infty$ and the sequence

$$\ldots < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \ldots. ,$$

as the fractions after $\frac{1}{0}$ are both negative and greater than infinity.

5.2 Jean le Rond d'Alembert: *Négatif*

We find the lemma *Négatif* in the *Encyclopédie* of Diderot. This first encyclopedia ever aims to unify all available knowledge and make it available for the public, therefore representing the thought of the Enlightenment [10, p. 86]. It was published between 1751 and 1772 and had Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) as its scientific editor - although he was only involved up to 1757[7] [17, p. 115]. For the lemma *Négatif* d'Alembert received excessive praise.

According to d'Alembert, negative numbers are 'the opposite of the positive: where the positive ends, the negative begins' [8] [3, p. 72]. This passage is possible via zero or infinity. The former is the case for

$$y = x - a,$$

as $y > 0$ for $x > a$, $y = 0$ for $x = a$ and $y < 0$ for $x < a$. The latter we see when looking at

$$y = \frac{1}{x - a},$$

[7] D'Alembert left after writing a problematic lemma on the city of Geneva. In the article he praised the city, but also did some suggestions for improvement. These were not appreciated [17, p. 115].

[8] 'Les quantités négatives sont le contraire des positives: où le positif finit, le négatif commence' [3, p. 72].

as $y > 0$ for $x > a$, $y = \infty$ for $x = a$ and $y < 0$ for $x < a$.

All the while we should be careful to conceive the negative numbers as less than zero: 'Saying that a negative number is less than zero, is to advance something inconceivable'[9] [3, p. 72]. According to d'Alembert we can see this by looking at what became known as 'd'Alemberts paradox', which reminds us of Arnauld's:

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}.$$

Saying that -1 is less than zero would mean that the lesser is to the greater as the greater is to the lesser – a paradox [5, p. 97].

Negative quantities are often represented as if they are 'realistic' quantities, especially in geometry.[10] D'Alembert warns us not to let these representations confuse us in thinking that negative and positive numbers are similar!

When we obtain a negative solution for a certain equation, we actually have started with a faulty assumption, according to d'Alembert. 'The sign "$-$"which we find before a quantity, is used to straighten an erroneous assumption and correct it'[11] [3, p. 73]. He looks at the case where a variable x together with the number 100 add up to 50:

$$x + 100 = 50.$$

Finding $x = -50$, we should conclude that the quantity is indeed 50 but that our assumption of adding 100 was wrong. We should have subtracted it! The equation becomes

$$100 - x = 50.$$

Altering the question enables us to interpret negative numbers via their positive counterpart – a strategy similar to that of the *maestri d'abbaco*. In both approaches the 'solution' of working with the negative numbers is to avoid them.

D'Alembert believes that adding a negative number is equal to subtracting a positive, and therefore 'for the same reason, subtracting a negative number is equal to adding a positive'[12] [3, p. 73]. This makes the multiplication of $-a$ with $-b$ the same as the subtraction of b times the negative $-a$.[13] We should thus see this problem as the subtraction of $-ab$, which in turn equals to adding the positive ab. We have found how to multiply two negative numbers.

According to d'Alembert, these algebraic operations with negative numbers are accepted by the entire

[9] 'Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir' [3, p. 72].

[10] D'Alembert uses the words *quantités rélles* to indicate quantities that have some physical significance, but we translate this to *realistic*, as the word *real* has an unrelated meaning in our current mathematical language.

[11] 'Le signe − que l'on trouve avant une quantité sert à redresser et à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse' [3, p. 73].

[12] '... donc par la même raison en retrancher une *négative*, c'est en ajouter une positive' [3, p. 73].

[13] As mentioned, a, b are implicitly assumed to be positive.

world [3, p. 73]. However, this remark is not undisputed, as even in the *Enclyclopédie* itself some of d'Alemberts ideas are contradicted. In a different lemma, negative numbers are described as exactly the thing d'Alembert resisted to so fiercely: being less than zero [5, p. 97].

It is interesting to compare the *Encyclopédie* to the dictionary of Joan Stammetz, its Dutch counterpart that was published in 1758. This dictionary does not contain a lemma on negative numbers. Neither do they appear in any other lemma. Fittingly, the lemma *Minus* describes subtraction as the operation where 'the Smaller is hold against the Bigger Number, and subtracted of it' [14] [20, p. 303]. As two works from the same time period, similar in both content and objective, the differences in treatment of the negative numbers are surprisingly big.

5.3 Jacob Pierson Tholen: *Theses Philosophicae*

The Dutch Jacob Pierson Tholen (1764-1824) promoted with his *Theses Philosophicae* in 1784. His supervisor was the famous Jan van Swinden. Working on mathematics and physics at the University of Franeker, he created the first serious Dutch work on the negative numbers. It sets out to clarify a rule Tholen believes to be absurd at first sight: the 'existing rule in Algebra, that a positive quantity multiplied with a negative quantity, results in a negative product' [15] [22, p. 4].

Firstly Tholen proposes a new definition of multiplication. Multiplication is often seen as repeated addition, but this does not suffice when calculating with fractions. Instead he proposes that the result of the multiplication $a \times b$ is the number x such that $x : a = b : 1$ [22, p. 3].

D'Alembert warned that geometric representations could invoke the (mistaken) idea that negative numbers are equal to positive numbers. This similarity is exactly the thing Tholen argues for, providing this argument and new ones (both geometric and other) [22, p. 4]. It is surprising that he does not reference d'Alembert anywhere, as we can see by the choice of words that Tholen was acquainted with his ideas. In a later passage Tholen will even provide the exact same example as we have seen with d'Alembert (writing that $x+100 = 50$ should be interpreted as $100-x = 50$). We definitely see the great influence of d'Alembert. [16]

Tholen claims that negative numbers are not less than zero. By changing the values of variables in an arithmetic sequence he argues that 'it is therefore possible that quantities will occur both positive and negative in a calculation, depending on the position of a point from which we start counting' [17] [22, p. 5]. The value of a negative number does therefore not have to be less than zero, it is just negative with respect to a given point.

[14] '... het Kleindere tegen het Grooter Getal als een geheel gehouden, en daar van afgetrokken word' [20, p. 303].

[15] '... in *Algebra* est regula constans, quod quantitas positiva per negativam multiplicata, efficiat productum negativum' [22, p. 4].

[16] Although the ideas of d'Alembert are thus widely present in this work of Tholen, d'Alembert's paradox ($1 : -1 = -1 : 1$) remains absent in the *Theses*.

[17] '... patet ergo quantitates positivas fieri et negativas ratione situs puncti a quo terminos numerare incipimus' [22, p. 5].

After explaining his ideas on the nature of negative numbers, Tholen takes their multiplication to be nothing but a correct application of his definition. We can solve $-a \times b = x$ by solving $x : -a = b : 1$, finding $x = -ab$ [22, p. 6]. Similarly $-a \times -b = x$ is solved via $x : -a = -b : 1$, finding $x = ab$ [22, p. 7].

5.4 Jacob de Gelder: *Proeve over den waren aard van den positieven en negatieven toestand*

This 'Essay on the true nature of the positive and negative state' is written by Jacob de Gelder (1765 - 1848). It was published in 1815 and its 243 pages (excluding appendices) make it the most extensive Dutch work written about negative numbers of its time [5, p. 108]. At the time of publishing the *Proeve*, De Gelder worked at the military academy of Delft, although he had finished writing in 1813. De Gelder is known for his clear and innovative ideas on the aim and educative practice of mathematics.

The book begins with a letter from the Hollandsch Instituut van Wetenschappen en Kunsten, a precursor of the KNAW.[18] Their acclaiming letter was a recommendation from the most prominent Dutch scientists in the discipline and noticeably pleased De Gelder.[19]

The *Proeve* is not a philosophical work, but a study book for students [5, p. 121]. It is divided into three chapters of which the first is the most relevant for our purposes. De Gelder works thoroughly and explicates the fundamental principles he adheres. His most important point is that misunderstanding caused by a wrong introduction of new concepts should be avoided. A main example of this is the inconvenient choice for the phrases *positive* and *negative*, as these are used in quite differently in mathematics than in other disciplines and daily life [9, p. 25].

De Gelder proposes that both positive and negative numbers can always be written using the formula $x = a - b$, as we know the cases $a > b$ and $a < b$.[20] He legitimizes the method of defining a number via two terms by the fact that fractions are defined similarly. The case $a = b$ forms the 'general boundary line'[21] [9, p. 22]. This seems to imply that the only boundary between positive and negative numbers is 0, but De Gelder writes in a later passage that it is also possible that this transition goes via infinity (as we recognize from d'Alembert). We should finally note that this definition does not imply that De Gelder thinks that negative numbers are less than zero, as we will come back to later.

The *Proeve*'s most fundamental idea, even appearing in its title, is that a number can 'demonstrate [itself]

[18] The Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences

[19] Authors were Cornelis Krayenhoff (physicist, doctor en general), Jacob Floryn en Obbe Bangma (both mathematician as well as nautical expert). De Gelder himself has never been a member of this institute.

[20] Implicitly assuming that a, b are positive – although later in his book De Gelder mentions that the terms in an expression are always positive.

[21] 'algemeene grenslijn' [9, p. 22]

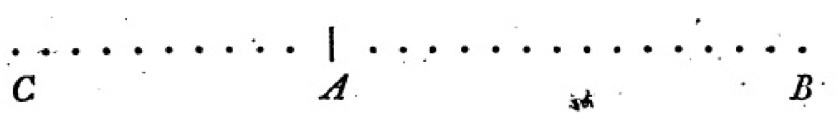
in a positive or negative state' [22] [9, p. 25]. These states are indicated by the signs "+änd "−".

Two metaphors are explored to illustrate this idea. The first is that of a merchant calculating his profit via the formula

$$[\text{sum of gains}] - [\text{sum of loss}].$$

The interesting case here is when the merchant obtained '*negative profit*; he found himself in the *opposite case of winning*, that is, in the *case of losing*' [23] [9, p. 28]. The second metaphor is that of counting forwards and backwards from the current year, so 1813. When speaking of *before* and *after* 1813, these words express the same thought as the words *negative* and *positive* do. From this we see De Gelder's involvement in finding the right words.

De Gelder acknowledges that there exists confusion, but argues determinedly that negative numbers are not less than zero. In contrast to Tholen, d'Alembert is referenced directly. De Gelder points to similar situations where this confusion did not arise. Think of the multiplication $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, which is actually a division [9, p. 32, 33]. We should interpret negative numbers within a contect of '*counting* and *counting backwards*' [24] [9, p. 34]. See figure 5.1:



Figuur 5.1: '... eene onbepaalde rij van punten, door het dwarsstreepje A afgescheiden' [9, p. 34].

Starting at a point A (not necessarily $A = 0$), we can count up to a point B, and from there back towards A. We could continue counting backwards until we arrive at C. In much the same way we should interpret an expression as $a - b$. Counting a steps forwards, then counting b steps backwards. When we arrive at the point $a = b$, it is not possible to count backwards any more. We therefore 'indicate the quantity of this impossibility' [25] [9, p. 35]. This idea reminds us of the ideas of John Wallis.

To understand the multiplication of two negative numbers, we should note that any positive number b is nothing but b times the positive unity [9, p. 42]. This way, $a \times b$ is 'nothing but the sum of b numbers, each containing a units' [26] [9, p. 42]. After explaining how multiplication works for positive numbers, De Gelder devotes just one sentence in his book to explain multiplication for negative numbers, as he appears it to be without any difficulties. We can schematically interpret his ideas of the multiplication $-a \times -b$ as:

[22] '... in eenen positieven of negatieven toestand [kan] vertoonen' [9, p. 25].

[23] '... *negatievelijk gewonnen;* hij heeft zich dan in het *tegengestelde geval van winnen*, dat is, in het *geval van verliezen* bevonden' [9, p. 28].

[24] '*tellen* en *te rug tellen*' [9, p. 34].

[25] '... de hoegrootheid van die onmogelijkheid, aan te duiden' [9, p. 35]. Original is italic.

[26] '...niets anders dan de som van b getallen, die elk a éénheden bevatten' [9, p. 42].

$$
\begin{aligned}
-a \times -b &= \underbrace{((-1) + (-1) + \ldots + (-1))}_{a \text{ times}} \times\ -b \\
&= \underbrace{(-1 - 1 - \ldots - 1)}_{a \text{ times}} \times\ -b \\
&= -\ \underbrace{\underbrace{(-1 - 1 - \ldots - 1)}_{a \text{ times}} - (-1 - 1 - \ldots - 1)\ -\ \ldots\ -\ (-1 - 1 - \ldots - 1)}_{b \text{ times}} \\
&= +ab.
\end{aligned}
$$

A confusing passage begins when De Gelder claims that he opposes d'Alemberts view of negative numbers being less than zero. As far as we know, d'Alembert did not advocate such a view. However, De Gelder does make some interesting observation regarding d'Alembert's paradox, formulated as

$$-8 : 4 = 6 : -3.^{27}$$

The paradox occurs as -8 is to 4 what 6 is to -3, so the lesser is to the greater as the greater is to the lesser. De Gelder challenges with d'Alemberts view that a minus sign only affects the number's state and not its quantity. He introduces the term *reden* and claims we should not look at $-8 < 4$ and $6 > -3$ but only at $8 > 4$ en $6 > 3$.

De Gelder invokes metaphors from in- and outside mathematics to provide a complete theory of the negative numbers, which sets De Gelder apart from d'Alembert (being against this) and Tholen (who only approved of geometric analogies). De Gelder furthermore devotes much attention to terminology: it seems as if he knows how to work with negative numbers, but struggles with the language to do so.

5.5 A comparison between *Négatif, Theses Philosophicae* and the *Proeve*

We have studied a situation where mathematicians believe something is true, but do not know why. A recurring claim is that negative numbers can impossibly be less than zero. We saw that d'Alembert had trouble accepting the negative numbers, as his interpretation was based on the conversion of negative numbers to their positive counterpart. For him, a negative solution meant that the question used a wrong assumption. Tholen copied his explanation (using precisely the same example) but also provided a new perspective in introducing the concept of a starting point for counting. This gave the setup for De Gelder's focus on counting forwards and backwards, what he connected to his main point of numbers having the form $a - b$. De Gelder

[27] Instead of $-1 : 1 = 1 : -1$.

furthermore paid much attention to metaphors and terminology.

Although the three authors agree on the outcome of the multiplication of two negative numbers, they provide a different explanation. D'Alembert focused on the similarities between positive and negative numbers and the ease with which these can be converted. Tholen points at the importance of ratios and his new description of multiplication. De Gelder, in turn, sees $-a \times -b$ as taking $-b$ times a negative units.

We have seen fragments of a discussion that stretches across a wide time span: in 1815 De Gelder still finds it relevant to discuss the paradox first introduced by Arnauld in 1667. It is a discussion that progresses slowly, as the same arguments come up often and it remains an acceptable position to deny the existence of negative numbers for very long (as in Stammetz's dictionary). We also saw that these mathematicians did not work in isolation and greatly influenced each other. Furthermore, it is surprising that d'Alembert, Tholen and De Gelder were all keen to write that the subject is not difficult at all, even though we also see much criticism directed towards earlier mathematicians, especially in the works of d'Alembert and De Gelder. We should conclude that in 1815 the negative numbers were still controversial and subject for discussion, but also that the work of d'Alembert, Tholen and De Gelder was not for nothing.