

HET FIZIER GERICHT OP...

OPEN PROBLEMEN

In Fzizer belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. Hier een bijdrage over open problemen zoals die worden ingezet op de U-Talent Academie.

Susanne Tak
Rogier Bos
Cécile Kleijer



In een welbekend spelletje voor twee spelers pakken de spelers om de beurt een, twee of drie lucifers van een stapel. Ze beginnen bijvoorbeeld met 21 lucifers. De speler die (noodgedwongen) de laatste lucifer pakt heeft verloren. Speler A laat speler B beginnen. Is dat aardig? In dit eenvoudig uit te leggen spelletje zitten aspecten die nog onopgelost zijn. Met dit open probleem, en andere open problemen, laten we op de U-Talent Academie leerlingen aan de slag gaan. De U-Talent Academie is een intensief pre-universitair programma in de bètavakken voor getalenteerde leerlingen uit 5 en 6 vwo, deels uitgevoerd door de Universiteit Utrecht en deels door 27

partnerscholen uit Midden-Nederland. Twee dagen per maand volgen leerlingen onderwijs op de universiteit. Ook op school krijgen de leerlingen aanvullend uitdagend lesmateriaal.

Laten we eerst beredeneren wat bij dit spel een goede strategie is. Als je aan de beurt bent en er ligt nog maar 1 lucifer, dan heb je verloren. We noemen 1 een *v*-positie (*v* voor verliezend). Omdat je 1, 2, of 3 lucifers mag pakken zijn 2, 3 en 4 winnende posities (*w*-posities). Je kunt namelijk vanuit al deze posities de ander op een *v*-positie brengen. Als er 5 lucifers liggen breng je



APS Rekenen en Wiskunde

Ook in het schooljaar 2015-2016 organiseert APS Rekenen en Wiskunde diverse cursussen en studiedagen, o.a.:

8 oktober	Studiemiddag Examentraining rekenen vo/mbo
15 oktober	Studiemiddag De startende rekendocent
6 november	Start cursus De nieuwe wiskundeprogramma's havo/vwo
12 november	Start cursus Toegevoegde waarde van digitale media in de rekenles vo en mbo

U kunt zich aanmelden via onze site www.aps.nl/agenda

Maatwerk trainingen, coaching en studiemiddagen rekenen/wiskunde. Rekendidactiek, omgaan met verschillen in de rekenles, zwakke rekenaars, nieuwe examenprogramma's wiskunde.

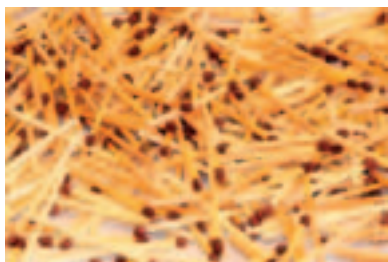
Informatie

APS-Academie
030 28 56 722
academie@aps.nl
www.aps.nl



wat je ook doet de ander op een w -positie, dus 5 is een v -positie. Kortom: een positie is een v -positie, tenzij je de ander met een greep op een v -positie kan krijgen. Als we per aantal lucifers 1, 2, 3,... opschrijven wat voor positie het is dan krijgen we de rij $v, w, w, w, v, w, w, w, v, w, w, w, v, \dots$ Je ziet een eenvoudig zich herhalend patroon ontstaan van v, w, w, w . Als je je tegenstander op een positie $4k + 1$ met $k \in \mathbb{N}$ krijgt, dan kun je met slim spel winnen. De conclusie over speler A hierboven is duidelijk.

Maar wat als iedere speler kan kiezen tussen twee, vijf of zes lucifers? We noemen dit *regel* $\{2,5,6\}$. Ook nu ontstaat er een zich herhalend patroon, namelijk $v, v, w, w, v, w, w, w, v, w, w$. Het is bewezen dat het patroon van verliezende en winnende posities bij elke regel na enige tijd periodiek wordt.^[1] Het is echter nog een open probleem om vanuit elke regel meteen het patroon te voorspellen. Het is ook onbekend hoe groot de periode wordt bij een gegeven regel. Kunt u bijvoorbeeld snel zeggen wat de periode is bij de regel $\{2,4,7,10\}$?



Op de U-Talent Academie laten we leerlingen uit 5 en 6 vwo met dit probleem en andere open problemen aan de slag gaan. Wij denken dat leerlingen met open problemen laten werken positieve effecten heeft. Het zorgt voor een houding die niet (alleen maar) gericht is op het vinden van 'het antwoord'. Immers, de leerlingen weten dat het probleem open is. Daarmee verschuift de aandacht naar andere manieren om toch succes te boeken, zoals bijvoorbeeld het oplossen van een deelprobleem of een eenvoudigere variant van het probleem. Hierbij maken we de leerlingen duidelijk dat 'mislukking' ook goed is. Zoals Edison gezegd schijnt te hebben: '*I have not failed. I've just found ten thousand ways that won't work.*'

Om de leerlingen op weg te helpen bij het werken aan open problemen richt het lesmateriaal van de U-Talent Academie zich op het leren van strategieën voor probleem-aanpak. We baseren ons hier op het werk van Pólya op dit gebied.^[2] Hij onderscheidt in probleemaanpak vier fasen: (i) het probleem/de vraag begrijpen, (ii) een plan maken, (iii) het plan uitvoeren en (iv) het antwoord controleren en terugblikken op het proces. Ook suggereert Pólya heuristieken, die wij hebben ingedeeld bij de verschillende fasen en aangevuld. Een voorbeeld van een heuristiek in de eerste fase is 'lijkt het probleem op

een probleem dat je al kent?' en in de tweede fase zijn er onder andere de heuristieken 'los het probleem op voor een bijzonder geval', 'gebruik (wiskundige) hulpmiddelen' en 'begin achteraan / werk achterstevoren'.

Hoe ver komt een leerling hiermee? Een voorbeeld: op de U-Talent Academie heeft een groepje leerlingen gebruikgemaakt van de heuristiek 'los het probleem op voor een bijzonder geval'. Ze onderzochten regels van drie opeenvolgende getallen, zoals $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{11,12,13\}$. Ze ontdekten onder andere dat de grootte van de periode dan altijd de som van het kleinste en het grootste getal in de regel is.

Wilt u zelf eens op onderzoek uit? We raden u de heuristieken 'gebruik (wiskundige) hulpmiddelen' en 'ontdek een patroon' aan. U kunt daarbij gebruikmaken van de door ons ontwikkelde tool.^[3]

Naast het luciferprobleem komen in ons lesmateriaal ook andere open problemen aan bod. We achten echter niet alle open problemen geschikt. We hanteren de volgende criteria: (1) het probleem is snel te begrijpen voor leerlingen uit 5/6 vwo, (2) leerlingen kunnen ermee aan de slag, omdat het probleem voldoende mogelijkheden biedt om er heuristieken 'op los te laten' en (3) een succeservaring is mogelijk. Bijvoorbeeld op een speciaal geval van het probleem. Problemen die aan deze criteria voldoen, zijn volgens ons niet alleen geschikt voor de U-Talent Academie, maar ook goed bruikbaar op school. Ze bieden uitdagende mogelijkheden voor een profielwerkstuk voor wiskunde en passen prima binnen wiskunde D. Ze lenen zich ook goed voor een verdiepende opdracht waar de snellere en betere leerling zelfstandig mee aan de slag kan gaan. Onze collectie van open problemen is op aanvraag beschikbaar (zodat u altijd de meest recente versie heeft). Ook zijn we altijd op zoek naar leuke open problemen voor de leerlingen, dus als u suggesties heeft, horen we dat graag (*s.w.tak@uu.nl*). Wij durven er onze handen voor in het vuur te steken dat uw leerlingen warmlopen voor open problemen!

Noten

- [1] Byrnes, S. (2003). Poset game periodicity. *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 3(G3).
- [2] Onder andere in zijn boek *How to solve it*.
- [3] Zie www.fisme.science.uu.nl/jcu/problemen/lucifers/lucifers-web.html

Over de auteurs

Susanne Tak, Rogier Bos en Cécile Kleijer werken bij het Freudenthal Instituut als respectievelijk onderwijsontwikkelaar, docent en curriculumcoördinator voor de U-Talent Academie. E-mailadressen: *s.w.tak@uu.nl*, *r.bos@cgu.nl*, *c.c.kleijer@uu.nl*