

BACHELORSCHRIJFTE WISKUNDE

Het vermoeden van de eenzame looper
Een vergelijking tussen reële getallen en veeltermringen



Universiteit Utrecht

Auteur:
Leah BEKKERING
(4302869)

Begeleider:
dr. Damaris SCHINDLER

13 juni 2018

Samenvatting

Het vermoeden van de eenzame loper, een probleem dat nu 50 jaar oud is, gaat over het volgende: Zij k het aantal lopers op een cirkelvormige baan van lengte 1. Elke loper start op hetzelfde punt en heeft een verschillende constante snelheid. Een loper is eenzaam als de afstand van de loper tot alle andere lopers minstens $1/k$ is. Het vermoeden luidt dat elke loper op een moment eenzaam is. In deze scriptie wordt op het vermoeden een analogie naar functielichamen gemaakt. Daarnaast bekijken we de eenzame loper in tweedimensionale situatie op een torus. We nemen de lezer hierin mee in een zoektocht naar de juiste formulering van het probleem in twee dimensies.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Het vermoeden van de eenzame loper	5
2.1	Een blik op het vermoeden	5
2.2	Een zoektocht naar het bewijs	7
3	Diofantische benadering	9
3.1	Dirichlet en Kronecker	9
3.2	Diofantische benadering voor het vermoeden	11
4	De wereld van de veeltermringen	15
4.1	De constructie van rationale getallen	15
4.2	De volledigheid van \mathbb{R}	16
4.3	De structuur van eindige lichamen	18
5	De eenzame loper in een veeltermring	24
6	Lopers in een dimensie hoger	27
6.1	Telkens hetzelfde rondje	28
6.2	Het vermoeden voor twee lopers in twee dimensies	30
6.3	Het vermoeden voor drie lopers in twee dimensies	31
6.4	Het vermoeden in twee dimensies voor willekeurige k	35
7	Afsluiting	37
	Referenties	38

1 Inleiding

Al sinds 1967 houdt het vermoeden van de eenzame loper wiskundigen in zijn greep. Een probleem dat in het eerste opzicht zo simpel lijkt, maar nog steeds niet is opgelost! Inmiddels zijn er tientallen artikelen over geschreven waarin bewijzen worden geleverd voor specifieke situaties of waarin een de ondergrens waarvoor het vermoeden wel te bewijzen is verbeterd, maar een echt bewijs heeft nog niemand kunnen geven.

In deze scriptie maak ik een vergelijking tussen het probleem in de reële getallen en de veeltermringen - een analogie waardoor wiskundigen een beter inzicht krijgen in wiskundige problemen, zoals het vermoeden van de eenzame loper. De artikelen die tot nu toe over dit onderwerp zijn geschreven, zijn ingewikkeld te lezen een bachelorstudent Wiskunde. Ikzelf heb de artikelen wel gelezen. In deze scriptie neem ik de lezer dan ook mee in de onderzoeken die ik heb gelezen. Omdat dit onderwerp een leuke en interessante toepassing is van de kennis die een bachelorstudent heeft opgedaan tijdens de bachelor Wiskunde, zal deze scriptie zeker bijdragen aan de kennis en het niveau van de lezer.

Ik geef in deze scriptie de achtergrondinformatie en voorkennis die nodig is om deze artikelen wél goed te kunnen lezen. Daarnaast breid ik het vermoeden uit tot een probleem in twee dimensies. Hiervoor stel ik een aantal eisen vast en geef ik de lezer inzicht hoe het vermoeden gezien kan worden in deze situatie. Naar lopers op een torus is al veel onderzoek gedaan, maar het is in de literatuur nog niet specifiek gelinkt met het vermoeden van de eenzame loper. Het laatste deel van deze scriptie is dus een onderzoek wat ik zelf heb gedaan en wat nieuwe stof aan de literatuur toevoegt.

Het artikel van Chow en Rimanić [CR17] is het artikel waarop een groot deel van deze scriptie op gebaseerd is. Daarnaast is er een aantal andere artikelen over het vermoeden van de eenzame loper als [BHK01] en [BGGST96] waar ik veel informatie en inspiratie over het onderwerp uit heb gehaald. De andere bronnen heb ik vooral gebruikt als achtergrond informatie om inzicht in het probleem te krijgen. Om duidelijk te maken wanneer ik informatie uit artikelen heb gehaald en wanneer ik achtergrondinformatie heb gezocht heb ik vaak gerefereerd naar de bronnen.

In het eerste hoofdstuk formuleer ik het probleem zoals het in de wiskunde bekend is. De twee hoofdstukken daarna, hoofdstuk 3 en 4, geven de benodigde voorkennis om het vermoeden beter te begrijpen. Hoofdstuk 3 gaat over diofantische benadering, dat een aanname wat in het vermoeden gebruikt wordt duidelijk uitlegt. Hoofdstuk 4 geeft de voorkennis die nodig is om het vermoeden in veeltermringen te begrijpen. Hierin zal de opbouw van de reële getallen worden uitgelegd en wordt er een analogie gegeven met veeltermringen. In het hoofdstuk wat daarop volgt zal het vermoeden in de structuur van veeltermringen worden beschreven. Hoofdstuk 6 kan gezien worden als een uitbreiding op het onderzoek, waarin het vermoeden wordt bekeken in een dimensie hoger. Zoals net vernoemd is dit mijn eigen onderzoek.

Deze bachelorscriptie is geschreven op het niveau dat voor bachelorstudenten Wiskunde te begrijpen is. Hiervoor raad ik aan dat de student de vakken *Inleiding Getaltheorie*, *Ringen en Galoistheorie* en *Inleiding Topologie* heeft gevolgd.

2 Het vermoeden van de eenzame loper

Het vermoeden van de eenzame loper is een probleem dat wiskundigen al 50 jaar in zijn greep houdt. In al die tijd is het nog geen enkele wiskundige gelukt om het probleem op te lossen voor elk aantal lopers en elke mogelijke snelheid. Sterker nog, het maximale aantal lopers waarvoor dit vermoeden is bewezen, is zeven lopers [BS08]. In deze sectie beginnen we met een uitleg van het vermoeden en we sluiten het af met een overzicht van relevante en recente ontdekkingen op het gebied van het vermoeden van de eenzame loper.

2.1 Een blik op het vermoeden

Het vermoeden van de eenzame loper formuleren we als volgt (zie ook [BGGST96]).

Vermoeden 2.1 (Het vermoeden van de eenzame loper). *Beschouw $k + 1$ personen rennend op een cirkel van lengte 1. Alle $k + 1$ lopers starten op dezelfde tijd en positie. Het is geen wedstrijd; elke loper i heeft een constante snelheid v_i , allen (paarsgewijs) verschillend van elkaar. We noemen een loper j eenzaam als de afstand van loper j tot alle andere k lopers minstens $1/(k + 1)$ is. Dan zegt het vermoeden dat voor willekeurige $k + 1$ lopers met willekeurige snelheden, elke loper op een zeker moment eenzaam is.*

In 1967 is dit vermoeden geïntroduceerd door Wills [W67] in een onderzoek naar diofantische benaderingen en door Cusick [C73] in zijn artikelen over *view-obstruction problems*. Later is het vermoeden door Bohman, Holzman en Kleitman [BHK01] vertaald naar een begrijpelijker probleem (waarin de lopers op een cirkel werden geïntroduceerd) en deze formulering wordt nu voornamelijk gebruikt om het vermoeden te beschrijven.

Waarom is de ondergrens $1/(k + 1)$ eigenlijk zo vanzelfsprekend? Deze ondergrens is beredeneerd vanuit de uiterste situatie: alle lopers zijn tegelijk eenzaam. Op het moment dat dit het geval is, staan er $k + 1$ lopers evenredig verdeeld op een cirkel. Hierdoor is de afstand tussen elke loper precies $1/(k + 1)$.

Voordat we een wiskundige formulering van het vermoeden van de eenzame loper kunnen geven, is wat extra terminologie nodig. Zij $x \in \mathbb{R}$. Laat $\|x\|$ de afstand zijn van x naar het dichtstbijzijnde gehele getal. Een getal x is te schrijven als

$$x = [x] + \{x\}, \tag{1}$$

waarbij $[x]$ het gehele getal van x weergeeft en $\{x\}$ het decimale gedeelte, dus $0 \leq \{x\} < 1$. Neem bijvoorbeeld $x = 3,14$, dan geldt $[x] = 3$ en $\{x\} = 0,14$. Met behulp van (1) is $\|x\|$ nu te schrijven als

$$\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\}). \tag{2}$$

Op deze manier kunnen we de volgende equivalentierelatie definiëren.

Definitie 2.1. *Zij $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. We definiëren \sim als volgt: $t_1 \sim t_2$ dan en slechts dan als $\|t_1\| = \|t_2\|$.*

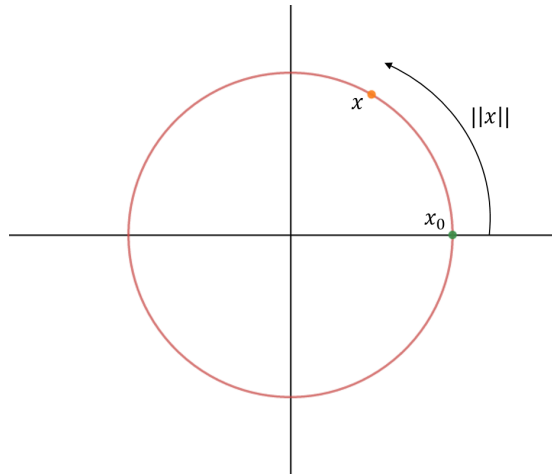
Dit definieert een equivalentierelatie. Merk op dat geldt $\|\cdot\| \leq \frac{1}{2}$. Deze definitie levert het volgende lemma op.

Lemma 2.1. Zij $d \in \mathbb{Z}$ en $t_1 \sim t_2$ met de equivalentierelatie gedefinieerd als in bovenstaande definitie. Dan geldt $\|dt_1\| = \|dt_2\|$.

Bewijs. Merk op dat $\|t_1\| = \|t_1 + k\|$, voor $k \in \mathbb{Z}$, want met (2) zien we $\|t_1 + k\| = \min(\{t_1\}, 1 - \{t_1\})$ en $k \in \mathbb{Z}$ heeft hier geen invloed op. Dus geldt $t_1 \sim t_2$ dan en slechts dan als $\|t_2\| = \|t_1 + k\|$. Dus $\|dt_1\| = \|d(t_1 + k)\|$ en omdat $t_1 \sim t_2$, geldt $\|d(t_1 + k)\| = \|dt_2\|$. Hiermee hebben we bewezen dat $t_1 \sim t_2$ impliceert $\|dt_1\| = \|dt_2\|$. \square

Opmerking 2.1. Het is essentieel dat $d \in \mathbb{Z}$. Stel namelijk $d = \frac{1}{2}$ en $t = \frac{1}{4} + \mathbb{Z}$, dus bijvoorbeeld $t_1 = \frac{1}{4}$ en $t_2 = \frac{5}{4}$. We zien dat $t_1 \sim t_2$, want $\left\| \frac{1}{4} \right\| = \frac{1}{4} = \left\| \frac{5}{4} \right\|$. Echter, $\|dt_1\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right\| = \left\| \frac{1}{8} \right\| = \frac{1}{8}$ en $\|dt_2\| = \left\| \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \right\| = \left\| \frac{5}{8} \right\| = \frac{3}{8}$. Voor $d \notin \mathbb{Z}$ geldt het lemma dus niet.

Het vermoeden is geformuleerd op een cirkel van lengte 1. We kunnen een vergelijking zien tussen de gedefinieerde norm en een punt op de cirkel. In Figuur 1 zien we een cirkel van lengte 1 en twee punten. Het punt x_0 zien we als het startpunt. We zien dat het punt x op de cirkel ligt en de afstand op de cirkel tot het startpunt $\|x\|$ heeft. De lengte is immers altijd kleiner of gelijk aan 1.



Figuur 1: De norm op een cirkel van lengte 1

De afstand tot het dichtstbijzijnde gehele getal is dus te vergelijken met de afstand naar het startpunt x_0 . In deze afbeelding is ook zichtbaar dat $\|x\| \leq \frac{1}{2}$, want de afstand tot x_0 kan niet groter zijn dan een halve cirkel. Merk op dat de afstand van een punt k naar x_0 equivalent is met $k(\text{mod } 1)$. Op deze manier vormen alle punten in het interval $[0, 1)$ hun eigen equivalentieklasse. De verzameling van de klassen modulo 1 (ook wel modulo \mathbb{Z} genoemd) noteren we met de quotiëntgroep \mathbb{R}/\mathbb{Z} ([Ca17], p. 32). Wiskundig is dit gedefinieerd als

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{r + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{R}\}.$$

De nevenklassen zijn dan $r + \mathbb{Z}$ met $r \in [0, 1)$.

Als laatste wordt er in het wiskundige vermoeden één looper als stationair gezien, dat wil zeggen dat deze een snelheid van nul heeft. We kunnen dit zonder verlies van algemeenheid aannemen, omdat we op deze manier nog steeds $k + 1$ willekeurig verschillende snelheden beschouwen.

Nu we voldoende notatie hebben ingevoerd, kunnen we het vermoeden van de eenzame looper op een wiskundige manier formuleren. Deze formulering komt uit [CR17], die weer een herformulering is van [BHK01].

Vermoeden 2.2 (Het vermoeden van de eenzame looper). *Zij D een verzameling van k positieve gehele getallen. Dan is er een $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ zodanig dat*

$$\|t \cdot d\| \geq \frac{1}{k+1}, \quad \forall d \in D. \quad (3)$$

Merk op dat we in het vermoeden $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nemen. We zouden het vermoeden ook kunnen omschrijven, dat er oneindig veel $t \in \mathbb{R}$ zijn waarvoor (3) geldt. Met $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ geven we, zoals hierboven uitgelegd, een voortbrenger van de equivalentieklasse $t + \mathbb{Z}$ weer. Alle $t \in \mathbb{R}$ waarvoor het decimale gedeelte $\{t\}$ gelijk is aan elkaar, zitten in dezelfde klasse.

In onderzoeken naar het vermoeden van de eenzame looper wordt vaak gebruik gemaakt van het onderstaande afstandsbegrip. Zij hiervoor D weer een verzameling van k positieve gehele getallen. Definieer

$$\delta_k(D) := \sup_{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \min_{d \in D} \|dt\| \quad (4)$$

en δ_k als het infimum over alle verzamelingen D [CR17]. Daarnaast zullen we in het volgende hoofdstuk de stelling van Dirichlet bewijzen, waarna nog duidelijker wordt hoe we aan deze ondergrens komen.

2.2 Een zoektocht naar het bewijs

Waarom heet dit probleem echter nog steeds een vermoeden en kunnen we het niet als een stelling met bewijs presenteren? In de afgelopen vijftig jaar is het vermoeden inmiddels voor $k < 7$ bewezen [BS08]. Echter, voor acht of meer lopers is het nog steeds een vraag of het vermoeden klopt. We geven nu een kort overzicht van de ontdekkingen voor een klein aantal lopers.

Voor $k = 1$ is het vermoeden triviaal. Stel namelijk looper 1 stationair en de snelheid van looper 2 gelijk aan $v_2 - v_1$, de snelheid van looper 2 minus de snelheid van looper 1. Nu, als de tweede looper precies op de helft van de eenheidscirkel is, zal de afstand tussen hem en looper 1 precies $\frac{1}{2}$ zijn en we hebben het vermoeden bewezen. Wills [W67] heeft het probleem voor $k = 2$ bewezen. Samen met Betke [BW72] heeft hij in 1972 de situatie $k = 3$ bewezen. Ook Cusick [C73, C74, C82] heeft dit probleem bewezen.

Cusick bleef verder gaan met zijn onderzoek en samen met Pomerance [CP84] heeft hij $k = 4$ bewezen. Dit was een lastig bewijs waarvoor de computer nodig was. Echter vond Bienna samen met vier andere onderzoekers [BGGST96]

een eenvoudiger en korter bewijs voor de situaties $k = 3, 4$. Daarna schreven Bohman, Holzman en Kleitman [BHK01] een artikel over zes lopers en hierin hebben ze $k = 5$ bewezen. Ook hier werd naar gekeken en in 2004 vond Renault [R04] een korter bewijs. In 2008 is de situatie $k = 6$ bewezen door Barajas en Serra [BS08]. Ook Tao heeft gekeken naar de situatie en heeft een aantal tussenstellingen gevonden [T17]. Hij heeft hierin tot op heden de grootste ondergrens, waarvoor het vermoeden waar is, gevonden. Daarnaast heeft hij het vermoeden bewezen wanneer alle lopers een lage snelheid hebben. Zijn onderzoek is één van de meest recente onderzoeken op het gebied van het vermoeden van de eenzame loper.

In de volgende hoofdstukken ga ik in op ten eerste waarom we in het hierboven gegeven vermoeden de verzameling D met gehele getallen hebben genomen en ten tweede zal ik in het daarop volgende hoofdstuk een vergelijking maken tussen de structuur van de reële getallen en die van veeltermringen; een structuur waarin meer te ontdekken is over het vermoeden dan wanneer we met reële getallen blijven onderzoeken.

3 Diofantische benadering

In het vorige hoofdstuk is het vermoeden van de eenzame looper beschreven, waarbij gebruik gemaakt werd van gehele getallen. Echter, waarom mag men gebruik maken van enkel de gehele getallen, terwijl het vermoeden geldt voor élk soort getal? Bohman, Holzman en Kleitman hebben hier in 2001 een bewijs voor geleverd [BHK01]. Het bewijs voor dit lemma vergt voorkennis over diofantische benadering. We behandelen daarom eerst andere bekende stellingen, omdat deze in het lemma van Bohman, Holzman en Kleitman [BHK01] gebruikt zullen worden. Daarna geven we het bewijs voor dit genoemde lemma.

3.1 Dirichlet en Kronecker

Een van de belangrijkste stellingen met betrekking tot diofantische benadering komt van Dirichlet [D42]. De stelling is als volgt, waarbij het bewijs een vertaling en uitbreiding is van [S80].

Stelling 3.1 (Dirichlet). *Zij $\alpha, Q \in \mathbb{R}$ met $Q > 1$. Dan bestaan er $p, q \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $1 \leq q < Q$ en $|q\alpha - p| \leq \frac{1}{Q}$.*

Bewijs. Neem eerst aan dat $Q \in \mathbb{Z}_{>1}$. We bekijken de volgende $Q + 1$ getallen

$$0, 1, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(Q-1)\alpha\}.$$

Deze getallen liggen allen in het interval $0 \leq x \leq 1$. Verdeel nu het interval $0 \leq x \leq 1$ in Q verschillende intervallen:

$$\frac{u}{Q} \leq x < \frac{u+1}{Q}, \quad u = 0, 1, \dots, Q-1,$$

waarbij het $<$ -teken door \leq vervangen wordt als $u = Q-1$. Merk op dat elk interval nu lengte $|\frac{1}{Q}|$ heeft. Vanwege het duiventilprincipe [D42] moet er nu minstens één tusseninterval zijn dat twee of meer van de $Q + 1$ getallen bevat. Stel $r_1\alpha, r_2\alpha$, met $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ en $0 \leq r_2 < r_1 < Q$ liggen in een dergelijk tusseninterval. Dan bestaan er $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ zodanig dat

$$|(r_1\alpha - s_1) - (r_2\alpha - s_2)| \leq \frac{1}{Q}. \quad (5)$$

Stel nu $p = s_1 - s_2$ en $q = r_1 - r_2$, dan geldt $1 \leq q < Q$, want $r_1 - r_2 \geq 1$ en $0 \leq r_1, r_1 < Q$, dus ook $r_1 - r_2 < Q$. Invullen van p, q in (5) geeft nu

$$\begin{aligned} |(r_1\alpha - s_1) - (r_2\alpha - s_2)| &= |(r_1 - r_2)\alpha - (s_1 - s_2)| \\ &= |q\alpha - p| \leq \frac{1}{Q}. \end{aligned}$$

Stel nu $Q \notin \mathbb{Z}$. Neem $Q' = [Q] + 1$ en gebruik voor Q' dezelfde redenering als hierboven. Er geldt weer $1 \leq q < Q'$, want $q \in \mathbb{Z}$ en dus geldt $1 \leq q \leq [Q]$. Dit impliceert weer $1 \leq q < Q$ en hiermee is het bewijs voor $Q \in \mathbb{R}$ voltooid. \square

Opmerking 3.1. Terugkijkend naar het vermoeden en het $\delta_k(D)$ gedefinieerd in (4), zien we dat de stelling van Dirichlet zegt dat het infimum $\delta_k \leq 1/(k+1)$. Dit verklaart waarom we $\|dt\| \geq 1/(k+1)$ stellen in het vermoeden.

Als we de twee ongelijkheden van de stelling samenvoegen, verkrijgen we het volgende [S80].

Gevolg 3.1. *Zij $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en $Q \in \mathbb{R}$ met $Q > 1$. Dan bestaan er een oneindig aantal paren $p, q \in \mathbb{Z}$ met p, q relatief priem zodanig dat $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.*

Bewijs. We weten door Stelling 3.1 al dat $|\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q}$. Gebruik nu het feit dat $1 \leq q < Q$, dan geldt

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qQ} < \frac{1}{q^2}. \quad (6)$$

Rest te bewijzen: er is een oneindig aantal paren $p, q \in \mathbb{Z}$ waarvoor dit geldt. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat er $p, q \in \mathbb{Z}$ bestaan waarvoor de stelling geldt met p, q relatief priem. Stel nu dat er een eindig aantal paren zijn waarvoor (6) waar is. We weten dat α irrationaal is, wat betekent dat $\alpha p - q$ nooit nul zal zijn. We kunnen dus een $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ groot genoeg vinden zodat $\frac{1}{n} < |\alpha q - p|$ voor alle $p, q \in \mathbb{Z}$ waarvoor de benadering geldt. Echter, volgens Stelling 3.1 bestaat er een $k < n, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ en een $b \in \mathbb{Z}$ met b, k relatief priem, waarvoor geldt $|\alpha k - b| \leq \frac{1}{n}$ en volgens (6) dus ook $|\alpha - \frac{b}{k}| < \frac{1}{k^2}$. Maar dan hebben we een nieuw paar k, b gevonden met $\frac{b}{k} \neq \frac{p}{q}$. Dit levert een tegenspraak op en dus kunnen we een oneindig aantal paren $p, q \in \mathbb{Z}$ vinden met p, q relatief priem, waarvoor (6) waar is. Hiermee hebben we het gevolg bewezen. \square

Opmerking 3.2. Wanneer $\alpha \in \mathbb{Q}$ is de stelling niet waar voor een oneindig aantal paren [S80]. Stel namelijk $\alpha = \frac{u}{v}$, dan

$$\frac{1}{q^2} > \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{u}{v} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{qu - pv}{qv} \right| \geq \frac{1}{qv}.$$

Echter, dit zou betekenen dat $v < q$ en dus zijn er maar q mogelijke paren die aan (6) voldoen.

Opmerking 3.3. M

We zien dat de benadering van Dirichlet aangeeft in welke mate een irrationaal getal te benaderen is met rationale getallen. De stelling van Dirichlet wordt soms ook anders geformuleerd [M01].

Stelling 3.2 (Dirichlet, geherformuleerd). *Zij $\theta \in \mathbb{R}^n$ en $\epsilon > 0$. Dan zijn er $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}^n$ zodanig dat $|q\theta_i - p_i| < \epsilon$ voor alle i . Bovendien geldt $1 \leq q < \epsilon^{-n}$.*

Merk op dat in Stelling 3.1 $n = 1$ en dat $\epsilon = Q$. Met deze herformulering van Dirichlet zien we dat de volgende stelling van Kronecker een veralgemenisering van Dirichlet is. De stelling is vrij vertaald uit [M01]. Hierin wordt het begrip *algebraïsch getal* gebruikt, wat betekent dat het getal een nulpunt is van een niet-triviaal polynoom in \mathbb{C} met gehele coëfficiënten, of in ons geval in \mathbb{R} (zie [B18], p. 67). Daarnaast wordt het begrip *lineaire onafhankelijkheid over \mathbb{Q}* van $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ gebruikt. Hiermee wordt bedoeld dat we geen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ niet allemaal gelijk aan 0 kunnen vinden waarvoor

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \theta_1 + \dots + a_n \theta_n = 0.$$

Stelling 3.3 (Kronecker). *Laat $1, \theta_1, \dots, \theta_n$ reële algebraïsche getallen zijn die lineair onafhankelijk over \mathbb{Q} zijn. Dan geldt voor elke $\alpha \in \mathbb{R}^n$ dat er een $q \in \mathbb{N}$ en $p \in \mathbb{Z}^n$ bestaat, zodanig dat $|q\theta_i - \alpha_i - p_i| < \epsilon$, voor elke i .*

Er zijn talloze bewijzen te vinden van deze stelling. Drie van de bewijzen zijn te vinden in [HW38]. Het derde bewijs in deze bron, het bewijs van Bohr op p. 388, is de meest interessante versie voor getaltheoretici. We bekijken nog de eendimensionale situatie van de stelling van Kronecker, waarvan het bewijs ook te vinden is in het boek van Hardy en Wright [HW38]. In deze stelling wordt het begrip *dicht* geïntroduceerd. Een verzameling punten is *dicht* in een interval als de afsluiting van de verzameling gelijk is aan het interval [C17]. Dus, als we naar de stelling kijken, geldt dat $\overline{\{(q\theta)\}} = (0, 1)$.

Stelling 3.4 (Kronecker, eendimensionaal). *Zij θ irrationaal. Neem $q \in \mathbb{N}$ als in Stelling 3.2 en 3.3. Dan is de verzameling punten $(q\theta)$ dicht in het interval $(0, 1)$.*

Merk op dat we deze stelling ook kunnen zien in de n -dimensionale situatie, waarin we kijken naar een open vierkant, kubus of hyperkubus. Met een hyperkubus wordt een kubus in een hogere dimensie bedoeld, niet per definitie driedimensionaal.

3.2 Diofantische benadering voor het vermoeden

Met alle definities en stellingen die we zojuist hebben behandeld, kijken we naar het lemma van Bohman, Holzman en Kleitman over het gebruik van rationale snelheden in plaats van irrationale snelheden. Het lemma is als volgt.

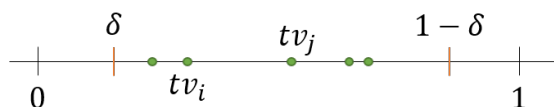
Lemma 3.1 ([BHK01]). *Zij $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Stel dat voor elke collectie $v_1, \dots, v_{n-2} \in \mathbb{Q}^+$ er een $t \in \mathbb{R}^+$ bestaat waarvoor*

$$\{v_i t\} \in (\delta, 1 - \delta) \text{ voor } i = 1, \dots, n - 2.$$

Dan geldt dat voor elke collectie $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^+$, waarvoor er een paar u_i, u_j is zodat $u_i/u_j \notin \mathbb{Q}$, er een $t \in \mathbb{R}^+$ is zodat

$$\{u_i t\} \in (\delta, 1 - \delta) \text{ voor } i = 1, \dots, n - 2.$$

Laten we eerst kijken naar wat het lemma zegt. We bekijken voor een zekere δ de collectie van rationale getallen v_1, \dots, v_{n-2} die, vermenigvuldigd met een $t \in \mathbb{R}^+$ in het interval $(\delta, 1 - \delta)$ moeten liggen. In Figuur 2 is hier een weergave van te zien, waarin een aantal punten in het interval zijn getekend. Dit is uiteraard een willekeurig aantal met willekeurige plaatsing van de punten. Als dit geldt, dan moet voor elke collectie $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^+$ met tenminste een paar u_i, u_j zodat u_i/u_j niet rationaal, er een $t \in \mathbb{R}^+$ zijn, zodat alle $u_i t$ in hetzelfde



Figuur 2: Weergave van het interval $(\delta, 1 - \delta)$ in $(0, 1)$.

interval liggen als alle punten $v_i t$. Hier komen we na het bewijs nog op terug.

Met deze kennis kunnen we naar het bewijs van het lemma kijken. Het bewijs komt ook uit [BHK01]. Echter, dit is een heel beknopt bewijs en gaat er vanuit dat de lezer bekend is in de wiskunde. Daarom is dit bewijs hieronder uitgebreider gegeven dan in [BHK01] om het begrijpelijk te maken voor de lezer.

Bewijs van Lemma 3.1. Laat $\vec{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})$ en bekijk de verzameling

$$M(\vec{u}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^{n-1} : \exists t \in \mathbb{R} \text{ en } k \in \mathbb{Z}^{n-1} \text{ zodanig dat } \vec{y} = t\vec{u} - \vec{k}\}.$$

We kunnen $M(\vec{u})$ zien als de n -dimensionale versie van $\{u_i t\}$. Daarom zullen we bewijzen dat $M(\vec{u})$ de open hyperkubus $(\delta, 1 - \delta)^{n-1}$ doorsnijdt.

Claim: Het is voldoende te bewijzen $\overline{M(\vec{u})} \cap (\delta, 1 - \delta)^{n-1} \neq \emptyset$.

Bewijs: We gaan deze claim met behulp van een tegenspraak bewijzen. Stel $\xi \in \overline{M(\vec{u})}$ zodanig dat ξ niet in $M(\vec{u})$ ligt, dus

$$\xi \in \overline{M(\vec{u})} \setminus M(\vec{u}).$$

Bovendien stel $\xi = \overline{M(\vec{u})} \cap (\delta, 1 - \delta)^{n-1}$. Dit betekent dat $M(\vec{u}) \cap (\delta, 1 - \delta)^{n-1} = \emptyset$. Echter, $(\delta, 1 - \delta)^{n-1}$ is open. Dit betekent dat we een bolletje om ξ heen kunnen tekenen met straal $\epsilon > 0$, zodat $B(\xi; \epsilon) \subset (\delta, 1 - \delta)^{n-1}$. Maar $\xi \in \overline{M(\vec{u})} \setminus M(\vec{u})$, dus dit punt ligt op de rand. Hierdoor zien we dat $B(\xi; \epsilon) \cap M(\vec{u}) \neq \emptyset$ en dat betekent dat $M(\vec{u}) \cap (\delta, 1 - \delta)^{n-1} \neq \emptyset$. We hebben een tegenspraak gevonden en hiermee is de claim bewezen. ■

Nu kunnen we Kronecker's stelling gebruiken. Zij u_1, \dots, u_{n-1} lineair onafhankelijk over \mathbb{Q} . Dan is, volgens Stelling 3.3 en 3.4, $M(\vec{u})$ dicht in $(0, 1)^{n-1}$. We zien direct dat $\overline{M(\vec{u})}$ de hyperkubus doorsnijdt en er valt niets meer te bewijzen. Neem daarom aan dat de snelheden u_1, \dots, u_{n-1} lineair afhankelijk zijn, dus we kunnen homogene lineaire vergelijkingen vinden zodat

$$a_1 u_1 + \dots + a_{n-1} u_{n-1} = 0 \tag{7}$$

en $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$. Neem een maximale verzameling van lineair onafhankelijke vergelijkingen als in (7) en schrijf dit als de rijen van een matrix A . Dit betekent dat de matrix A een $m \times (n - 1)$ matrix in \mathbb{Q} is en omdat elke rij onafhankelijk is, heeft A rank m . Bovendien geldt door (7) dat $\vec{u} \in \ker(A)$. Op deze manier kunnen we schrijven

$$\overline{M(\vec{u})} = \ker(A) + \mathbb{Z}^{n-1}. \tag{8}$$

We weten dat \vec{u} in $\ker(A)$ ligt. Bovendien zijn alle u_i positief, dus deze vector ligt in het positieve hyperoctant van \mathbb{R}^{n-1} . Daarnaast heeft A alleen rationale elementen. Hierdoor bevat $\ker(A)$ ook een vector \vec{r} met positieve rationale componenten. We hebben aangenomen dat \vec{u} geen veelvoud van een rationale vector is en dus heeft $\ker(A)$ dimensie twee of hoger. Daarom kunnen we een vector $\vec{s} \in \ker(A)$ vinden met rationale componenten en geen factor van \vec{r} . Dit geeft dat we i, j kunnen vinden waarvoor geldt

$$\frac{s_i}{r_i} < \frac{s_j}{r_j} \text{ en } \frac{s_k}{r_k} \notin \left(\frac{s_i}{r_i}, \frac{s_j}{r_j} \right) \text{ met } k = 1, \dots, n - 1. \tag{9}$$

Bekijk nu de vector

$$\vec{w} = (r_i + r_j)\vec{s} - (s_i + s_j)\vec{r}.$$

Omdat \vec{r}, \vec{s} rationaal in $\ker(A)$, is \vec{w} ook een rationale vector in $\ker(A)$. We zien dat $w_i = -w_j$ en bovendien $w_k \neq 0$ voor $k = 1, \dots, n-1$. Zij namelijk $w_k = 0$, dan zou gelden

$$\frac{s_k}{r_k} = \frac{s_i + s_j}{r_i + r_j}$$

en dit is in tegenspraak met (9).

Zij nu v_1, \dots, v_{n-2} een collectie van positieve rationale getallen dat $|w_1|, \dots, |w_{n-1}|$ bevat. Door (9) kunnen we aannemen dat dit zo is. De aanname van het lemma is dat we een $t \in \mathbb{R}^+$ kunnen vinden zodat $\{v_i t\} \in (\delta, 1 - \delta)$ ligt voor $i = 1, \dots, n-2$. Omdat $\vec{w} \in \ker(A)$, ligt ook $t\vec{w} \in \ker(A)$ en met (8) zien we nu dat $M(\vec{w})$ de hyperkubus $(\delta, 1 - \delta)^{n-1}$ moet doorsnijden. Hiermee is het bewijs voltooid. \square

Opmerking 3.4. In het bewijs van Lemma 3.1 zien we waarom het belangrijk is dat we minstens één paar u_i, u_j hebben waarvoor $u_i/u_j \notin \mathbb{Q}$. Stel namelijk dat voor alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ geldt dat $u_i/u_j \in \mathbb{Q}$, dan kunnen we alle u_i schrijven als het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 u_1 = u_1 \\ u_2 &= \alpha_2 u_1 \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= \alpha_{n-1} u_1 \end{aligned}$$

met $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{Q}$. Bekijk nu $M(\vec{u})$ als gedefinieerd in het bewijs van Lemma 3.1. Omdat alle u_i lineair afhankelijk zijn van u_1 krijgen we maar één \vec{y} die bevat is in $M(\vec{u})$. We zullen dus nooit een $M(\vec{u})$ vinden die dicht is in $(0, 1)^{n-1}$ en we kunnen het bewijs niet voltooien. De voorwaarde dat er minstens één paar u_i, u_j is zodat $u_i/u_j \notin \mathbb{Q}$ is dus essentieel.

Omdat het vermoeden van de eenzame loper in Vermoeden 2.2 anders geformuleerd is dan in het artikel van Bohman, Holzman en Kleitman [BHK01], is het nog niet snel te zien waarom dit lemma laat zien dat we rationale snelheden in plaats van reële snelheden mogen gebruiken. Met dezelfde notatie die ingevoerd is in Vermoeden 2.2 zou het vermoeden in [BHK01] als volgt zijn.

Vermoeden 3.1 ([BHK01]). *Voor elke collectie D met k positieve reële getallen bestaat er een $t \in \mathbb{R}^+$ zodat*

$$\{d_i t\} \in [1/(k+1), k/(k+1)], \quad \text{voor } i = 1, \dots, k.$$

Met deze formulering van het vermoeden zien we dat we nu niet k positieve reële getallen hoeven te gebruiken, maar dat met behulp van Lemma 3.1, k rationale getallen ook voldoende zijn. Neem hiervoor $1/(k+1) < \delta < k/(k+1)$.

Nu blijft er nog één vraag over: waarom mogen we dan gehele snelheden gebruiken in plaats van rationale getalen? Neem hiervoor $t \in \mathbb{R}^+$ en $d \in \mathbb{Z}^+$ als in het

vermoeden. We kunnen td als volgt schrijven:

$$td = tp \cdot \frac{d}{p}, \quad p \in \mathbb{Z}^+,$$

waarbij $tp \in \mathbb{R}$ en $\frac{d}{p} \in \mathbb{Q}$. We zien dat voor elk positief geheel getal d we een rationaal getal d/p kunnen vinden waardoor het vermoeden nog steeds geldt.

Hoe kunnen we dit vertalen naar Vermoeden 2.2? Dit bewijzen we in het volgende lemma.

Lemma 3.2. *Zij D een collectie met k positieve gehele getallen en $t \in \mathbb{R}^+$. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

1. $\|d_i t\| \geq \frac{1}{k+1}$.

2. $\{d_i t\} \in [\frac{1}{k+1}, \frac{k}{1+k}]$.

Bewijs. (1) \Rightarrow (2). Zij $\|d_i t\| \geq \frac{1}{k+1}$. Dat betekent dat de afstand tot het dichtstbijzijnde gehele getal groter is dan $1/(k+1)$. Ofwel, als we naar een interval $[0, 1]$ kijken, ligt $d_i t$ rechts van $1/(k+1)$ (of is er gelijk aan). Echter, de afstand tot 1 moet ook groter zijn dan $1/(k+1)$, ofwel: $d_i t$ moet op of links van $k/(k+1)$ liggen, dus in het interval $[1/(k+1), k/(k+1)]$.

(2) \Rightarrow (1) Zij $\{d_i t\} \in [\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1}]$. Dan is de afstand van het laagste punt tot 0 gelijk aan $1/(k+1)$ en de afstand van het hoogste punt tot 1 ook. Ofwel: de afstand van het interval tot een geheel getal is minstens $1/(k+1)$ en hiermee is het bewijs voltooid. \square

Wat een simpele aanname leek te zijn - dat we 'gewoon' snelheden als gehele getallen kunnen nemen - blijkt dus een hoop achtergrondinformatie nodig te hebben! Diofantische benadering is een interessant vakgebied binnen de getaltheorie. Wie hier meer over wil weten kan talloze boeken over diofantische benadering vinden waar hier verder op in wordt gegaan. Voor deze scriptie is de besproken informatie over diofantische benadering voldoende. In het volgende hoofdstuk gaan we een ander vakgebied in.

4 De wereld van de veeltermringen

Zoals al eerder benoemd is, heeft de structuur van veeltermringen, veel inzicht gegeven in het vermoeden van de eenzame looper. Een van de eerste onderzoeken naar de analogie tussen reële getallen en veeltermringen was door Weber en Dedekind in 1882 [WD82]. Chow en Rimanić hebben in de polynoom structuur sommige bewijzen van het vermoeden een stuk eenvoudiger gemaakt en in de situatie van 8 of meer lopers hebben ze aan de hand van veeltermringen ook al mooie hulpstellingen bewezen. De manier waarop de structuur van veeltermringen is opgebouwd, is vergelijkbaar met de structuur van lichamen als \mathbb{Q} en \mathbb{R} .

Hiervoor is het belangrijk om eerst de structuur van lichamen als \mathbb{Q} en \mathbb{R} te begrijpen. De structuur van deze lichamen komt voort uit de natuurlijke getallen \mathbb{N} . We zullen daarom eerst kijken naar de gehele en rationale getallen, waarbij het triviaal lijkt hoe deze uit \mathbb{N} voortkomen, maar wat toch een hoop relevante kennis oplevert als we er dieper op ingaan. Vervolgens kijken we naar \mathbb{R} . Nadat we weten hoe deze lichamen zijn opgebouwd, kunnen we een analogie maken met ringen.

4.1 De constructie van rationale getallen

De natuurlijke getallen zijn gegeven door

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Er zijn verschillende formele definities van de natuurlijke getallen, maar omdat het doel van dit hoofdstuk is om te kijken naar de constructie van de rationale en reële getallen, zullen we hier niet dieper op ingaan. De natuurlijke getallen zijn commutatief, waarin optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd zijn. We zien nu dat \mathbb{Z} wordt gegeven door

$$\mathbb{Z} := \{\pm n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Om vanuit \mathbb{Z} de rationale getallen te definiëren stellen we de volgende equivalentierelatie op:

Definitie 4.1 ([K14]). *Een equivalentierelatie \sim op $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0}$ is gedefinieerd als volgt.*

$$(m, n) \sim (k, l) \iff m \cdot l = k \cdot n. \quad (10)$$

Stelling 4.1. *De relatie gedefinieerd als in (10) is een equivalentierelatie.*

Bewijs. We tonen de drie axioma's aan van een equivalentierelatie: reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit. Reflexiviteit is als volgt in te zien: $(m, n) \sim (m, n)$, want $m \cdot n = m \cdot n$. Nu zij $(m, n) \sim (k, l)$. Dan $m \cdot l = k \cdot n$. Maar dan ook $k \cdot n = m \cdot l$, dus $(k, l) \sim (m, n)$. De equivalentierelatie \sim is dus ook symmetrisch. Rest te bewijzen: transitiviteit. Stel hiervoor $(m, n) \sim (k, l)$ en $(k, l) \sim (o, p)$, dus $m \cdot l = k \cdot n$ en $k \cdot p = l \cdot o$. Dus er geldt ook $m \cdot l \cdot k \cdot p = k \cdot n \cdot l \cdot o$. Voor het gemak laten we het vermenigvuldigingsteken nu achterwege. We zien

$$\begin{aligned} 0 &= mlkp - knlo \\ &= kl(mp - no). \end{aligned}$$

Als $mp - no = 0$, zijn we klaar. Stel nu $kl = 0$, dan $k = 0$, want $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ dus $l \neq 0$. Dan ook $ml = 0$ en $lo = 0$, dus $m = o = 0$. Dit impliceert $mp = no = 0$, en we hebben reflexiviteit bewezen. \square

We zullen de equivalentieclassen van \sim van het paar (a, b) op een intuïtieve wijze als $\frac{a}{b}$ definiëren. Met deze equivalentierelatie kunnen we de rationale getallen als volgt definiëren.

Definitie 4.2 ([K14]). *De rationale getallen zijn gedefinieerd als de verzameling van alle equivalentieclassen onder \sim . Met andere woorden:*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0}) / \sim = \left\{ \frac{m}{n} : (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0} \right\}. \quad (11)$$

Zij $m, k \in \mathbb{Z}$ en $l, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. De verzameling van rationale getallen heeft de volgende vermenigvuldiging en optelstructuur:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} + \frac{k}{l} &= \frac{lm + kn}{ln} \\ \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} &= \frac{mk}{ln} \end{aligned}$$

Het moge duidelijk zijn dat deze optelling en vermenigvuldiging goed gedefinieerd zijn. Merk op dat elk element ongelijk aan nul een inverse heeft:

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-1} = \frac{b}{a},$$

want $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$. Met $\frac{0}{b}$, $b \in \mathbb{Z}_{>0}$, heeft \mathbb{Q} ook een nul element. We zien dat we de verzameling \mathbb{Q} dus ook als een ring kunnen zien en omdat elk element ongelijk aan nul een inverse heeft, is het ook een lichaam [B18].

Opmerking 4.1. Vanuit de ringentheorie weten we dat \mathbb{Z} een domein is [B18]. Het kleinste quotiëntlichaam dat heel \mathbb{Z} bevat kunnen we dan noteren met $Q(\mathbb{Z})$. Definieer de volgende functie:

$$\mathbb{Z} \rightarrow Q(\mathbb{Z}), \quad r \mapsto \frac{r}{1}. \quad (12)$$

De ring \mathbb{Z} kan nu worden beschouwd als een deelring van $Q(\mathbb{Z})$ waarbij aan elk element r een element $\frac{r}{1} \in Q(\mathbb{Z})$ wordt gekoppeld. We zien dus dat $\mathbb{Q} = Q(\mathbb{Z})$ en \mathbb{Z} is een deelring van \mathbb{Q} .

4.2 De volledigheid van \mathbb{R}

Nu we weten hoe we \mathbb{Q} kunnen construeren uit \mathbb{Z} , kunnen we kijken naar de constructie van \mathbb{R} . Dit proces gaat via Cauchy rijen en deze definiëren we als volgt.

Definitie 4.3 ([C00]). *Zij M een metrische ruimte met metriek d . Een rij (x_n) is Cauchy in (M, d) als voor elke $\epsilon > 0$ er een geheel getal $N \geq 1$ bestaat zodat $d(x_m, x_n) < \epsilon$ voor $m, n \geq N$.*

Vanuit het eerste jaar Analyse uit de bachelor weten we dat \mathbb{R} en deelverzamelingen als \mathbb{Q} en \mathbb{Z} metrische ruimten zijn. In het volgende lemma bewijzen we een belangrijke eigenschap van Cauchy rijen.

Lemma 4.1 ([C94]). *Zij (x_n) een Cauchy rij. Dan is (x_n) begrensd.*

Bewijs. Zij $\epsilon = 1$ en $N = N_\epsilon$ en definieer $B = \max\{x_n : n \leq N\} + 1$. Dan geldt $d(x_n, 0) \leq B$ voor alle $n \leq N$ en voor alle $n > N$ geldt

$$\begin{aligned} d(x_n, 0) &\leq d(x_n, x_N) + d(0, x_N) \quad (\text{driehoeksongelijkheid}) \\ &\leq 1 + B - 1 = B. \end{aligned}$$

Hiermee hebben we het bewijs voltooid. □

Net als in de constructie van rationale getallen, zullen we weer een equivalentierelatie definiëren.

Definitie 4.4 ([K14]). *Zij C de verzameling van alle Cauchy rijen in \mathbb{Q} . De equivalentierelatie \sim op C is gedefinieerd als*

$$(a_n) \sim (b_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0. \quad (13)$$

Stelling 4.2. *De relatie gedefinieerd in (14) is een equivalentierelatie.*

Bewijs. De reflexiviteit van \sim is triviaal: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. Stel $(a_n) \sim (b_n)$, dan $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$. Maar dan ook $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, dus $(b_n) \sim (a_n)$. Nu stel $(a_n) \sim (b_n)$ en $(b_n) \sim (c_n)$. Dan $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - c_n) = 0$. Nu geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n + b_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - c_n) = 0 + 0 = 0$, dus $(a_n) \sim (c_n)$. □

Door deze equivalentierelatie zullen we zien dat twee rijen alleen naar hetzelfde limiet convergeren als het verschil van de twee rijen gelijk aan nul is. We definiëren I als de deelverzameling van C met alle rijen die naar nul gaan:

$$I := \{(a_n) \in C : \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0\}. \quad (14)$$

Het is eenvoudig in te zien dat I een ideaal is. Vanuit de ringentheorie ([B18]) weten we dat C/I een ring vormt: de quotiëntring. Bovendien kunnen we in [K14] het bewijs vinden dat I een maximaal ideaal is en dus C/I een lichaam is. Nu kunnen we \mathbb{R} definiëren aan de hand van C en het ideaal I .

Definitie 4.5. *Zij C de verzameling van Cauchy rijen in \mathbb{Q} en I het ideaal gedefinieerd in (14). Dan*

$$\mathbb{R} := C/I \quad (15)$$

In andere woorden, het lichaam \mathbb{R} is gedefinieerd als de quotiëntring C/I .

We laten nu zien dat \mathbb{R} Cauchy volledig is. Dit begrip is als volgt gedefinieerd.

Definitie 4.6. *Een lichaam F is Cauchy volledig als elke Cauchy rij in F convergeert naar een uniek limiet in F .*

En met het volgende bewijs sluiten we de opbouw van de reële getallen af.

Stelling 4.3. *\mathbb{R} is Cauchy volledig.*

Bewijs. Zij $(a_n)_n$ een Cauchy rij in \mathbb{R} . Volgens Definitie 4.4 behoort $(a_n)_n$ tot een equivalentieklasse, stel deze $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$. Volgens de definitie van \mathbb{R} als in (15), is $(a_n)_n$ een Cauchy rij in \mathbb{Q} , dus $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ zodanig dat $\forall n, m \geq N$

$$d(a_m, a_n) < \epsilon.$$

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat de rij (N) strikt stijgend is (kies elke N steeds groter). Stel nu

$$(b_n)_n := (a_N)_n.$$

en $(b_n)_n$ is een element in de equivalentieklasse $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}$. Dan is $(b_n)_n$ ook een Cauchy rij (voor het bewijs, zie [K14], p. 22). We weten, omdat $(a_n)_n$ een Cauchy rij is, dat $\forall \epsilon > 0$ en $\forall n \geq N$ geldt dat $d(a_n, a_N) < \epsilon$. Omdat $(a_n)_n$ en $(a_N)_n$ representanten zijn voor de klassen \mathbf{a} en \mathbf{b} , geldt ook $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \epsilon$. Bekijk nu het limiet, dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0,$$

ofwel, \mathbf{b} is de limiet van \mathbf{a} als $n \rightarrow \infty$. En omdat $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, geldt ook $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$. Ofwel, elke Cauchy rij in \mathbb{R} heeft een limiet in \mathbb{R} en hiermee is het bewijs voltooid. \square

We zien dat in het bewijs de metriek op \mathbb{R} is gedefinieerd als

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n).$$

Volgens [C94] is \mathbb{R} dan te zien als de vervollediging van \mathbb{Q} .

4.3 De structuur van eindige lichamen

De opbouw van de getallen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ die we nu uitgebreid hebben behandeld, is te vergelijken met de opbouw van functielichamen. Maar is het wel zo logisch dat we een vergelijking maken tussen deze twee werelden? De analogie tussen getallen en functielichamen is voor het eerst beschreven in een bekend artikel van Weber en Dedekind in 1882 [WD82]. Het is echter nooit bewezen dat resultaten uit het ene lichaam automatisch gelden in het andere lichaam. Er zijn ook zelfs verschillen tussen getallichamen en functielichamen gevonden. Dit heeft te maken met zogeheten *isotriviale variëteiten*, wat terug te lezen is in [G16]. Toch zijn de overeenkomsten overtuigend genoeg om naar de structuur van veeltermringen te kijken. De resultaten in dit stelsel zijn vaak van grote waarde in de zoektocht naar het bewijs van een wiskundig vermoeden. Sommige bekende vermoedens als het ABC-vermoeden en de Riemann Hypothese zijn zelfs bewezen in deze structuur [GMS05].

In het artikel van Weber en Dedekind [WD82] worden de gehele getallen \mathbb{Z} vergeleken met polynomen, waarvan de coëfficiënten zich in \mathbb{F}_q bevinden. Dit wordt genoteerd als $\mathbb{F}_q[t]$. We kunnen \mathbb{F}_q definiëren als een eindig lichaam van orde q met karakteristiek p , waarbij $q = p^k$ voor een zekere $k \in \mathbb{N}$ en p priem. Nu als $k = 1$, dan geldt $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}/(p)$, ofwel de quotiëntring van de gehele getallen modulo een hoofdideaal (p) die wordt voortgebracht door een priemgetal p [LN96]. Vanuit de ringentheorie [B18] weten we dat \mathbb{Z} een hoofdideaal domein is, een ring zonder nuldelers, waarbij elk priemgetal een ideaal voortbrengt. Bovendien is $\mathbb{Z}/(p)$ een lichaam [LN96].

Definitie 4.7. De polynoomring met coëfficiënten in \mathbb{F}_q wordt gegeven door

$$\mathbb{F}_q[t] := \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_kt^k : a_0, a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{F}_q, k \in \mathbb{Z}^+\}. \quad (16)$$

Vanuit de aanname dat er een analogie is tussen \mathbb{Z} en $\mathbb{F}_q[t]$, kunnen we op dezelfde manier als we \mathbb{Q} uit \mathbb{Z} hebben gedefinieerd, een lichaam vinden in de structuur van veeltermringen dat een analogie vormt met \mathbb{Q} .

In het eerste deel van dit hoofdstuk hebben we aangetoond dat $\mathbb{Q} = Q(\mathbb{Z})$. Op deze manier zullen we ook het lichaam vinden dat in de functielichamen een analogie vormt met \mathbb{Q} . We kunnen alleen een quotiënt nemen als $\mathbb{F}_q[t]$ geen nuldelers heeft. Maar \mathbb{F}_q is een eindig lichaam en dus is $\mathbb{F}_q[t]$ een hoofd ideaal domein. We kunnen ons nu dus afvragen hoe we het lichaam $Q(\mathbb{F}_q[t])$ kunnen definiëren. Hiervoor bekijken we de volgende functie, vergelijkbaar met (12).

$$\mathbb{F}_q[t] \rightarrow Q(\mathbb{F}_q[t]), \quad p \mapsto \frac{p}{1}. \quad (17)$$

We zien dat in deze functie aan elk polynoom $p \in \mathbb{F}_q[t]$ een rationaal getal wordt toegekend; het wordt gedeeld door het 1-polynoom. Maar dit is precies de definitie van het quotiëntlichaam

$$\mathbb{F}_q(t) := \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} : f, g \in \mathbb{F}_q[t], g \neq 0 \right\}. \quad (18)$$

Het kleinste lichaam dat het domein $\mathbb{F}_q[t]$ bevat is dus gelijk aan $\mathbb{F}_q(t)$, ofwel $Q(\mathbb{F}_q[t]) = \mathbb{F}_q(t)$ en op deze manier hebben we de analogie met \mathbb{Q} gevonden.

Nu ligt het voor de hand om te kijken naar de vervollediging van $\mathbb{F}_q(t)$ om zo de analogie met \mathbb{R} te vinden. Echter, voordat we hier naar kunnen kijken is meer voorkennis over veeltermringen met coëfficiënten in \mathbb{F}_q nodig. We zullen hiervoor een aantal begrippen introduceren.

Definitie 4.8 ([S93]). Zij K een lichaam en ∞ een symbool zo dat voor $a < \infty$ geldt $a + \infty = \infty$ en $\infty + \infty = \infty$. Een valuatie over K is een functie

$$v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (19)$$

met de volgende eigenschappen:

1. $v(x) = \infty \iff x = 0$
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

We noemen v discreet als $v(K^*) = s\mathbb{Z}$ voor $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Bovendien is v genormaliseerd als $s = 1$. Een valuatie heet Archimedisches als voor $\alpha, \beta \in K^*$ een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $v(n\alpha) > v(\beta)$. Een valuatie die niet Archimedisches is heet non-Archimedisches [K00]. Met een valuatie kunnen we aangeven wat de afstand is tussen twee elementen in een lichaam. Het wordt vaak gezien als het logaritme van de norm $|\cdot|$, omdat we de norm nu kunnen schrijven als

$$|x| = c^{v(x)},$$

met $x \in K$, en c een constante waarde. We introduceren nog een aantal begrippen die van pas zijn op het begrijpen van de vervollediging van $\mathbb{F}_q(t)$.

Definitie 4.9. Zij K een lichaam, v een valuatie op K en $|\cdot|$ de non-Archimedische absolute waarde die bij de valuatie hoort. Dan wordt de valuatie ring gedefinieerd door

$$O := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\} = \{x \in K : |x| \leq 1\}.$$

De verzameling

$$O^* := \{x \in K \mid v(x) = 0\} = \{x \in K : |x| = 1\}$$

is de groep eenheden van O .

Over deze definitie kunnen we het volgende bewijzen.

Stelling 4.4. We nemen de notaties en definities over van Definitie 4.9. De valuatie ring O is een domein en een maximale deelring van K . Bovendien geldt dat voor alle $0 \neq x \in K$ geldt $x \in O$ of $x^{-1} \in O$. De verzameling

$$\mathfrak{p} := O \setminus O^* = \{x \in K \mid v(x) > 0\} = \{x \in K : |x| < 1\} = \{x \in O \mid x^{-1} \notin O\}$$

is het unieke maximale ideaal van O .

Het bewijs hiervan is te vinden in [N99].

Definitie 4.10. Zij v een genormaliseerde valuatie op een lichaam K . Dan geldt voor alle $0 \neq x \in K$ dat we x kunnen schrijven als $x = ut^n$ met $t \in \mathfrak{p}$, $v(t) = 1$, $u \in O^*$ en $n \in \mathbb{Z}$. Een element $x \in \mathfrak{p}$ zodat $v(x) = 1$ heet een priem element.

Als laatste gebruiken we het begrip restlichaam.

Definitie 4.11. Het lichaam $\mathcal{K} := O/\mathfrak{p}$ noemen we het restlichaam van O .

Definitie 4.12 ([N99]). Zij $f(t) = \frac{g(t)}{h(t)} \in \mathbb{F}_q(t)$, met $g(t) \in \mathbb{F}_q[t]$ en $h(t) \in \mathbb{F}_q[t] \setminus \{0\}$. Beschouw de functie

$$v_\infty : \mathbb{F}_q(t) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

$$v_\infty(f(t)) = v_\infty\left(\frac{g(t)}{h(t)}\right) := \deg h(t) - \deg g(t)$$

voor alle $0 \neq f(t) \in \mathbb{F}_q(t)$ en $v_\infty(0) = \infty$. Hierbij is \deg de graad van de functies $g(t)$ en $h(t)$.

Merk op dat v_∞ een genormaliseerde valuatie is. We zien ook dat t^{-1} een priem element is, want $v_\infty(t^{-1}) = v_\infty(1/t) = \deg t - \deg 1 = 1$. We kunnen nu Definitie 4.3 omschrijven in termen van valuaties.

Definitie 4.13. Zij K een lichaam met een non-Archimedische valuatie v . Een rij $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ elementen in K heet een Cauchy rij als voor elke $\epsilon > 0$ een geheel getal $N \geq 1$ bestaat zodat

$$v(\alpha_n - \alpha_m) < \epsilon$$

voor alle $n, m \geq N$.

Nu zijn we er bijna! We gebruiken nog twee stellingen die te vinden zijn in [N99]. We zullen deze stellingen hier niet bewijzen, maar men mag aannemen (of lezen in [N99]) dat Stelling 4.6 met behulp van Cauchy rijen wordt bewezen. In Stelling 4.5 wordt er gebruik gemaakt van de valuatiering en zijn maximale ideaal van v_∞ . Met behulp van Definitie 4.9 kunnen we dit definiëren als

$$O_\infty := \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \mid f(t) \in \mathbb{F}_q(t), g(t) \in \mathbb{F}_q(t) \setminus \{0\}, \deg f(t) \leq \deg g(t) \right\},$$

met eenheden in O_∞ als $\deg f(t) = \deg g(t)$. Het unieke maximale ideaal is dan

$$\mathfrak{p}_\infty = \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \mid f(t) \in \mathbb{F}_q(t), g(t) \in \mathbb{F}_q(t) \setminus \{0\}, \deg f(t) < \deg g(t) \right\}.$$

Stelling 4.5. *Zij $f(t) \in O_\infty$, $f(t) = \frac{g(t)}{h(t)}$ met $g(t), h(t)$ gedefinieerd als in Definitie 4.12. We kunnen schrijven*

$$g(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \text{ en } h(t) = b_m t^m + \dots + b_1 t + b_0.$$

Er geldt dus $n := \deg g(t) \leq h(t) =: m$. Zij nu $n < m$, dan geldt $f(t) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\infty}$. Als $n = m$, dan geldt $f(t) \equiv \frac{a_n}{b_n} \pmod{\mathfrak{p}_\infty}$. Dit betekent dat $\mathcal{K}_\infty \cong \mathbb{F}_q$.

Stelling 4.6. *Zij K een lichaam, \hat{K} de vervollediging via een genormaliseerde valuatie v op K . Noteer met \hat{v} de valuatie op \hat{K} . Neem dezelfde notatie over voor de valuatiering O , het maximale ideaal \mathfrak{p} en het restlichaam \mathcal{K} . Zij $R \subset O$ een verzameling vertegenwoordigers van \mathcal{K} zodat $0 \in R$ en zij $t \in \mathfrak{p}$ een priem element. Dan kunnen we alle $x \in \hat{K}^*$ schrijven als een convergerende rij*

$$x = t^m (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)$$

met $a_i \in R, i \in \mathbb{N}, a_0 \neq 0$ en $m \in \mathbb{Z}$.

Nu kunnen we weer terug naar onze situatie. We willen $\mathbb{F}_q(t)$ vervolledigen via de valuatie v_∞ . Bovendien weten we dat t^{-1} een priem element is voor v_∞ en dat het restlichaam \mathcal{K}_∞ isomorf is met \mathbb{F}_q . Volgens stelling 4.6 kunnen we alle elementen van f ongelijk aan nul van de vervollediging nu schrijven als

$$f = (t^{-1})^m (a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 (t^{-1})^2 + \dots) = (t^{-1})^m \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t^{-1})^i \quad (20)$$

met $a_i \in \mathbb{F}_q, i \in \mathbb{N}, a_0 \neq 0$ en $m \in \mathbb{Z}$. Ofwel, we kunnen schrijven

$$f = f(t) = \sum_{i=-\infty}^{-m} a_i t^i$$

met $a_{-m} \neq 0$. Deze vervollediging van $\mathbb{F}_q(t)$ wordt genoteerd als $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$.

Hieruit kunnen we concluderen dat $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ de analogie met \mathbb{R} is. Samenvattend is de analogie tussen de getallen en veeltermringen in de volgende tabel te vinden:

\mathbb{Z}	$\mathbb{F}_q[t]$
\mathbb{Q}	$\mathbb{F}_q(t)$
\mathbb{R}	$\mathbb{F}_q((t^{-1}))$

In de literatuur wordt $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ ook wel genoteerd als \mathbb{K}_∞ . In plaats van t mag men ook een andere lineaire vorm in t kiezen, bijvoorbeeld $t-1$. Voor geen enkel functielichaam in bovenstaand schema zal dat verandering opleveren. Immers, elke functie in $\mathbb{F}_q[t-1]$ is te vergelijken met een functie in $\mathbb{F}_q[t]$. Daarnaast is een lineaire vorm van t ook een priemelement in \mathbb{F}_q . Immers, met c een constante, geldt $v_\infty((t+c)^{-1}) = \deg(t+c) - \deg 1 = 1$.

Net als het afstandsbegrip $\|x\|$ dat we hebben ingevoerd in Hoofdstuk 2, is een soortgelijk begrip nodig in de structuur van de polynoomringen. Hiervoor definiëren we (zie [CR17]):

$$\alpha = \sum_{i=-\infty}^n a_i t^i \in \mathbb{F}_q((t^{-1})). \quad (21)$$

We noteren met $\text{ord}(\alpha)$ de graad van α en schrijven $\langle \alpha \rangle = q^{\text{ord}(\alpha)}$. Over het algemeen wordt in dit begrip aangenomen dat $\text{ord}(0) = -\infty$ en dat $\langle 0 \rangle = 0$, wij zullen dat hier dus ook doen. We zien dat $\langle \alpha \rangle$ altijd 0 of een macht van q is, dus $\langle \alpha \rangle$ is altijd een reëel getal. Een cirkel van lengte 1 geeft dan de volgende ondergroep van \mathbb{K}_∞ :

$$\mathbb{T} = \{\alpha \in \mathbb{K}_\infty : \langle \alpha \rangle < 1\}.$$

We zien dat \mathbb{T} dus eigenlijk het quotiënt van \mathbb{K}_∞ is, waardoor we een analogie met \mathbb{R}/\mathbb{Z} hebben gevonden:

$$\mathbb{T} = \mathbb{F}_q((t^{-1}))/\mathbb{F}_q[t].$$

En net als in Hoofdstuk 2 kunnen we nu elk element α schrijven als

$$\alpha = [\alpha] + \|\alpha\|,$$

waarbij $[\alpha] \in \mathbb{F}_q[t]$ en $\|\alpha\| \in \mathbb{T}$. Voor het gemak schrijven we $|\alpha| := \langle \|\alpha\| \rangle$. Hoe kunnen we dit vergelijken met het reële geval? In \mathbb{R} kennen we de absolute waarde $|\cdot|$. Voor het vermoeden hebben we de afstand tot het dichtstbijzijnde gehele getal, of ook wel de afstand tot de oorsprong van de cirkel, gedefinieerd als $\|\cdot\|$. Omdat deze afstand altijd positief is, kunnen we dit zien alsof we de absolute waarde in \mathbb{R} van de afstand tot de oorsprong hebben genomen. Dit kunnen we ook in $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ doen. In dit geval is de absolute waarde genoteerd met $\langle \cdot \rangle$ en dus is de afstand tot de 'oorsprong' in \mathbb{T} te berekenen met $\langle \|\alpha\| \rangle = |\alpha|$. Merk op dat $\langle \|\alpha\| \rangle$ een reëel getal is.

Opmerking 4.2. De absolute waarde $\langle \cdot \rangle$ is te vergelijken met de absolute waarde van de valuatie v_∞ die we hebben gedefinieerd in Definitie 4.12. Neem als voorbeeld

$$\alpha = \frac{2t^7 + 1}{t^5},$$

met $\alpha \in \mathbb{F}_q((t^{-1}))$. Dan geldt $v_\infty(\alpha) = 5 - 7 = -2$ en

$$|\alpha| = c^{v(\alpha)} = c^{-2}.$$

Neem nu $c = q^{-1}$. We zien

$$|\alpha| = (q^{-1})^{-2} = q^2.$$

Verder weten we $\text{ord}(\alpha) = 2$ en dus

$$\langle \alpha \rangle = q^{\text{ord}(\alpha)} = q^2 = |\alpha|.$$

We hebben nu dus de opbouw van de structuur van veeltermringen gevonden. Daarnaast hebben we een afstandsbegrip geïntroduceerd waardoor we kunnen definiëren hoe dicht twee punten bij elkaar liggen. Zo hebben we genoeg notatie ingevoerd om terug naar het vermoeden te gaan.

5 De eenzame loper in een veeltermring

In de vorige hoofdstukken hebben we al een hoop voorkennis opgedaan. We kennen het probleem in de reële getallen, hebben aangetoond waarom we snelheden in \mathbb{Z} mogen nemen in plaats van in \mathbb{R} . Ook zien we hoe de structuur van de veeltermringen is opgebouwd. Genoeg kennis om echt aan de slag te gaan: het vermoeden in een veeltermring! Net als in Hoofdstuk 2 is hiervoor eerst de mate van eenzaamheid nodig [CR17]. We nemen hierbij de notatie van Hoofdstuk 4 over.

Definitie 5.1 (Eenzaamheid in $\mathbb{F}_q[t]$). *De mate van eenzaamheid van een verzameling $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}_q[t] \setminus \{0\}$ wordt gegeven door*

$$\delta(\mathcal{F}) := \sup_{\alpha \in \mathbb{T}} \min_{f \in \mathcal{F}} |\alpha f|. \quad (22)$$

Op deze manier kunnen we het vermoeden definiëren in $\mathbb{F}_q[t]$.

Vermoeden 5.1 (Het vermoeden van de eenzame loper in een veeltermring). *Zij $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}_q[t] \setminus \{0\}$ zodanig dat*

$$1 \leq |\mathcal{F}| < \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}. \quad (23)$$

Dan geldt

$$\delta(\mathcal{F}) \geq q^{-k}. \quad (24)$$

We zullen hier aannemen dat alle polynomen in \mathcal{F} monisch zijn. Dit kunnen we stellen, omdat voor $c \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ en $f \in \mathbb{F}_q[t]$ geldt $|\alpha f| = |\alpha(cf)|$.

Om dit vermoeden goed te begrijpen, moeten we eerst weten waarom Vermoeden 5.1 te vergelijken is met het originele vermoeden van de eenzame loper.

Bekijk hiervoor het aantal lopers in $f \in \mathbb{F}_q[t] \setminus \{0\}$ met $|\mathcal{F}| < \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$ als in het vermoeden. In totaal bekijken we dus alle lopers in \mathcal{F} en een loper die bij de oorsprong stilstaat. Dit zijn er $\leq \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$. We weten dat we dit kunnen schrijven als

$$\frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} = q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1.$$

We mogen dit benaderen als q^k . Maar we zien hier dat het vermoeden in \mathbb{F}_q eigenlijk veel sterker is dan het vermoeden in \mathbb{R} , omdat er meer lopers op de cirkel mogelijk zijn om dezelfde eenzame afstand te creëren! Sterker nog, in het artikel van Chow en Rimanić wordt een zwakkere vorm van het vermoeden bewezen, die even sterk is als het vermoeden van de eenzame loper in \mathbb{R} . De stelling die ze bewijzen luidt als volgt.

Stelling 5.1 ([CR17]). *Zij $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}_q[t] \setminus \{0\}$ met maximale grootte q^k . Dan geldt $\delta(\mathcal{F}) \geq q^{-k}$.*

Ook hier zien we dus dat een vermoeden te bewijzen is in de structuur van $\mathbb{F}_q[t]$. Het bewijs zelf is te vinden in het artikel van Chow en Rimanić.

Net als in Vermoeden 2.2, is de ondergrens van Vermoeden 5.1 ook goed te verklaren. In \mathbb{R} zouden we alle lopers op de cirkel zo verdelen dat twee opeenvolgende lopers dezelfde afstand hebben. Zo zijn de lopers gelijk verdeeld over de cirkel en komen we met $k + 1$ lopers (k rennend, één op de oorsprong) op een afstand $\geq 1/(k + 1)$. Maar hoe zouden we dit in \mathbb{T} doen? Omdat we in een functielichaam werken, kunnen we elk punt waar een loper op staat schrijven als

$$a_{-k}t^{-k} + a_{-k+1}t^{-k+1} + \dots + a_{-1}t^{-1}$$

met alle $a_i \in \mathbb{F}_q$. Merk op dat de constante term hier wegvalt, omdat de afstand van de loper tot de oorsprong wordt gegeven modulo $\mathbb{F}_q[t]$. De afstand van een dergelijk punt tot de oorsprong is gelijk aan $q^{\text{ord}(\alpha)}$, waarmee we zien dat elk punt een afstand heeft van minstens q^{-k} . Omdat we q^k verschillende punten hebben, is de afstand tussen twee punten ook minstens q^{-k} . Immers, we kunnen de afstand tussen twee punten vergelijken met de afstand van een punt tot de oorsprong. Hiermee zien we dat de ondergrens van q^{-k} te vergelijken is met de ondergrens in \mathbb{R} , namelijk $1/(k + 1)$.

Opmerking 5.1. De bovengrens $|\mathcal{F}| < \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$ is essentieel. Stel namelijk

$$\mathcal{F}_k := \bigcup_{j=0}^k \{t^j + i_{j-1}t^{j-1} + \dots + i_1t + i_0 : i_0, \dots, i_{j-1} \in \mathbb{F}_q\},$$

dan geldt $|\mathcal{F}_k| = \sum_{j=0}^k q^j = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$. We willen aantonen dat voor $\alpha \in \mathbb{T}$ en $f \in \mathcal{F}_k$ geldt $|\alpha f| \leq q^{-k-1}$. We weten,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{-i} \text{ en } f = \sum_{j=0}^k c_j t^j, \quad c_j \in \mathbb{F}_q.$$

Dit geeft

$$\alpha f = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^k a_i c_j t^{-i+j}.$$

Modulo $\mathbb{F}_q[t]$ krijgen we dan

$$\|\alpha f\| = \sum_{\substack{i=1 \\ i+j < 0}}^{\infty} \sum_{j=0}^k a_i c_j t^{-i+j}.$$

Bekijk nu het stelsel vergelijkingen

$$\|\alpha f\| [t^{-1}] = 0, \quad \dots \quad \|\alpha f\| [t^{-k}] = 0, \quad (25)$$

waarbij $\|\alpha f\| [t^{-1}]$ bijvoorbeeld te zien is als

$$\|\alpha f\| [t^{-1}] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j=-1}}^k a_i c_j = 0.$$

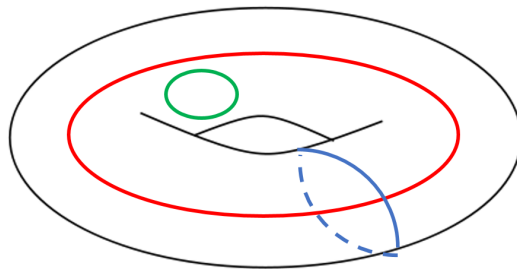
We zien; (25) is een stelsel van k lineaire vergelijkingen in $k + 1$ variabelen en daarvoor heeft het altijd een oplossing in \mathbb{F}_q^{k+1} . Daarom kunnen we voor elke $\alpha \in \mathbb{T}$ een $f \in \mathcal{F}_k$ vinden zodat $|\alpha f| \leq q^{-k-1}$.

In het artikel van Chow en Rimanić [\[CR17\]](#) worden er een aantal bekende stellingen over het vermoeden - een recente van Tao en een van Czerwiński en Grytśuk - via deze functielichamen bewezen. Daarnaast, zoals eerder benoemd, bewijzen ze een zwakkere vorm van het vermoeden dat een betere vergelijking is met het vermoeden in \mathbb{R} . Mocht de lezer zich interesseren in deze stellingen en bewijzen, dan raad ik zeker aan dit artikel te bekijken.

6 Lopers in een dimensie hoger

In de vorige hoofdstukken hebben we het vermoeden van de eenzame loper uitgebreid bestudeerd. Maar wat gebeurt er als we kijken naar het probleem in een hogere dimensie, bijvoorbeeld naar lopers op een torus? Op de cirkel hadden de lopers maar 1 keuze wat betreft richting: namelijk op de cirkel blijven lopen. Ze konden voor- of achteruit. Dit was afhankelijk van een positieve of negatieve snelheid. De snelheid was de enige vrijheidsgraad. Echter, op een torus hebben we niet alleen te maken met snelheid, maar ook met de richting. Een loper kan op veel verschillende manieren op de torus rennen.

In Figuur 3 staan een paar situaties om wat gevoel te krijgen voor het tweedimensionale probleem. Natuurlijk zijn er veel meer manieren mogelijk. We bekijken de situatie weer vanuit een stationaire loper. We zien al meteen dat de stationaire loper eenzaam is als alle andere lopers routes lopen die niet eens in de buurt komen van de stationaire loper. Op deze manier is het probleem natuurlijk minder interessant. We nemen daarom aan dat de k overige lopers zich in hun route minstens één keer binnen de straal van $1/k$ vanaf de stationaire loper moeten bevinden. Om de stationaire loper trekken we dus een denkbeeldige open cirkel van straal $1/k$ als die in de Euclidische metriek wordt gebruikt. Op een eenvoudige manier laten we de lopers binnen deze cirkel komen: ze moeten allemaal op hetzelfde startpunt beginnen, net als in Vermoeden 2.2.



Figuur 3: Verschillende manieren om op een torus te lopen

Nu is het zo dat de torus af te beelden is in drie dimensies, maar omdat wiskundig gezien de torus een tweedimensionaal figuur is, omdat lopers zich in twee dimensies kunnen bewegen, zullen we hier spreken van twee dimensies.

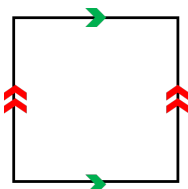
Er zijn verschillende vragen die opkomen bij het kijken naar lopers op een torus. Wanneer komt een loper terug op zijn beginpunt? Wat voor eisen kunnen we stellen om het vermoeden te kunnen formuleren? Kunnen we het gestelde vermoeden op de torus dan ook voor een klein aantal lopers bewijzen?

Omdat we het probleem nu in twee dimensies gaan bekijken, moeten we het vermoeden natuurlijk aanpassen aan deze situatie. De cirkel beschreven we in hoofdstuk 2 met \mathbb{R}/\mathbb{Z} , ook wel genoteerd als S^1 . De torus is het Cartesisch product van twee cirkels. Dit kunnen we noteren als $S^1 \times S^1$ wat we kunnen lezen als $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Wanneer we spreken over $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ zien we de to-

rus als een vierkant met plakranden. Dit wordt uitgelegd in de volgende sectie. We noteren de torus vaak als \mathbb{T}^2 en dit wordt ook wel twee-torus genoemd. In hoofdstuk 2 hebben we $\|x\|$ gedefinieerd als de afstand naar het dichtstbijzijnde gehele getal. In dit hoofdstuk zullen we $\|x\|$ definiëren als de afstand van vector x naar het dichtstbijzijnde punt op de torus met gehele coördinaten [B12]. Als we straks zien in Figuur 4, zijn dit de hoekpunten van $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Omdat dit een en hetzelfde punt is op de torus, kunnen we dit punt goed vergelijken met de situatie op de cirkel. De stationaire looper staat dan ook op dit punt op de torus. Echter, om de bewijzen in de komende secties duidelijk weer te geven, hebben we het “coördinatenstelsel” zo verschoven, dat de stationaire looper in het midden van het vierkant $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ staat. De afstand van een vector x naar het dichtstbijzijnde punt met gehele coördinaten is dan precies naar het midden toe. Als laatste nemen we voor t weer de tijd.

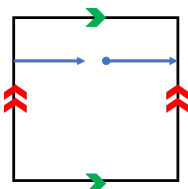
6.1 Telkens hetzelfde rondje

In het vakgebied van de topologie wordt een torus vaak getekend als een vierkant waarin randen aan elkaar worden geplakt. Dit is te zien in Figuur 4. De randen met rode pijlen worden in het vervolg ‘rode randen’ genoemd, evenals de randen met groene pijlen de ‘groene randen’ worden genoemd. De rode randen worden in de aangegeven richting aan elkaar geplakt. Zo ontstaat een cilinder en door het aan elkaar plakken van de groene randen krijgen we de torus. We nemen aan dat de afmetingen van het vierkant 1 bij 1 zijn, net als in het vermoeden in de eendimensionale situatie. Dit komt ook weer overeen met het feit dat we de torus zien als $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.



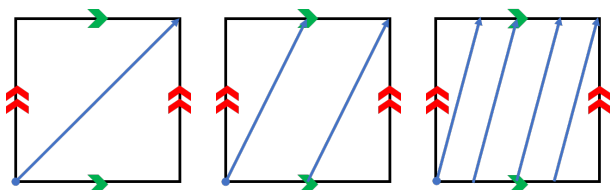
Figuur 4: De torus in topologische zin

Aan de hand van deze voorstelling van de torus kunnen we goed bekijken wanneer een looper weer op zijn beginpositie staat. Stel de looper begint op een willekeurige positie in het vierkant. Mocht de looper tegen de rechter rode rand ‘aanlopen’, zal hij verder lopen vanaf de linker rode rand op precies de zelfde hoogte. Dit is weergegeven in Figuur 5. We zien nu meteen dat lopers die een



Figuur 5: Mogelijke route van een looper

horizontale of verticale route afleggen op de torus, na één rondje weer op de beginpositie staan. Dit is niet de enige manier waarop een looper na één rondje weer terug is. hij kan ook schuin op het vierkant lopen. In Figuur 6 is een aantal voorbeelden te zien van een looper die schuin op het vierkant loopt.



Figuur 6: Drie manieren waarop een looper terug naar zijn beginpositie komt

We zien hier dat de groene rand in gelijke stukken wordt opgedeeld. De afstand tussen de snijpunten op de groene rand is $1/n$ met n het aantal ‘rondjes’ wat de looper er over doet om terug op de beginpositie te komen. Met een rondje wordt bedoeld dat de looper wel terug is op de beginpositie maar dan op een andere hoogte. Dus volgens één dimensie is de looper weer terug, volgens de tweede dimensie (de hoogte) nog niet en moet de looper verder lopen om op de beginpositie te komen.

Dit is een interessante ondervinding. Blijkbaar moet elk stukje op de groene rand een rationale lengte hebben om de looper terug te krijgen op zijn beginpositie. Is dit altijd zo? We bewijzen dat in de volgende stelling.

Stelling 6.1. *Een lijn met rationale richtingscoëfficiënt is een gesloten kromme op $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.*

Bewijs. We bekijken de torus op de topologische manier in een vierkant. We gaan een kromme tekenen en laten zien dat we altijd op ons startpunt terugkomen. Zij (x_0, y_0) het startpunt van de kromme. Neem als richtingscoëfficiënt $r = a/b$ met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $b \neq 0$. Onze positie na één staplengte is dan $(x_0 + 1, y_0 + a/b)$. Merk op dat

$$(x_0 + 1, y_0 + a/b) \equiv (x_0, y_0 + a/b) \pmod{\mathbb{Z}^2}.$$

Bekijk de situatie na b staplengtes. Dan geldt

$$(x_0 + b, y_0 + b \cdot a/b) = (x_0 + b, y_0 + a) \equiv (x_0, y_0 + a) \pmod{\mathbb{Z}^2}.$$

Maar omdat $a \in \mathbb{Z}$ geldt ook $(x_0, y_0 + a) \equiv (x_0, y_0) \pmod{\mathbb{Z}^2}$ en hiermee zijn we terug op onze beginpositie. Ofwel: een rationaal richtingscoëfficiënt levert een gesloten kromme op. \square

Dit resultaat is een belangrijk resultaat op het gebied van geometrische structuren van oppervlakten. Er is zelfs een term voor bedacht: foliatie.

Hoe zit dat nu met een irrationaal richtingscoëfficiënt? Dan kunnen we oneindig doorgaan met het tekenen van de lijn, maar we zullen nog niet terugkomen op ons startpunt. Sterker nog, een lijn met irrationale richtingscoëfficiënt is dicht

in de torus. Een bewijs hiervan is te vinden in [GS07].

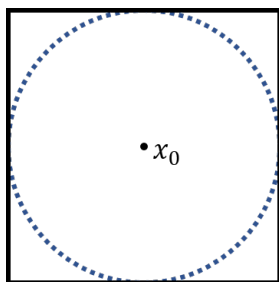
Uit deze twee resultaten kunnen we interessante conclusies uit trekken. Name-lijk, om het vermoeden op de torus zo vergelijkbaar mogelijk te maken met het vermoeden als in Hoofdstuk 2, zullen we aannemen dat de looper een richting moet hebben met rationale richtingscoëfficiënt. Dit stellen we zodat hij telkens dezelfde route loopt, net als op de cirkel.

6.2 Het vermoeden voor twee lopers in twee dimensies

In deze sectie zullen we een formulering maken voor het vermoeden van de eenzame looper op een torus met twee lopers. Deze zullen we daarna ook bewijzen. We moeten hierbij aannemen dat de looper alleen cirkels loopt door de ronding van de torus en niet zelf de bocht maakt van een cirkel. De situatie van de groene route in Figuur 3 is dus niet mogelijk. In $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ geldt dan, dat de looper alleen rechte lijnen mag lopen. Merk op dat we hierdoor dus aannemen dat de looper geen versnelling mag hebben; de snelheid en richting moeten gelijk blijven.

Stelling 6.2 (Het vermoeden van de eenzame looper in twee dimensies, $k=1$). *Zij $k=1$. We nemen aan dat looper k niet van richting verandert en dat alle lopers hetzelfde startpunt hebben. Daarnaast nemen we aan dat de richtingscoëfficiënt van de looper, gezien uit de vierkants-weergave van de torus, rationaal is. Dan is elke looper op een moment eenzaam, wat inhoudt dat de afstand van looper a tot looper b minstens $1/(k+1) = 1/2$ is. Loper b mag zich dus niet binnen een straal van $1/2$ van looper a bevinden op het moment dat looper a eenzaam is (zie Figuur 7).*

Bewijs. We kunnen deze stelling bewijzen met behulp van Figuur 7. Hierin zijn de pijlen in het vierkant weggelaten om de situatie duidelijker te maken, maar met dit vierkant van 1 bij 1 wordt nog steeds een torus bedoeld. Zij x_0 de stationaire looper. Loper x_0 is dan eenzaam als de afstand tot de andere looper minstens $1/2$ is. Met de blauwe stippellijn is dan ook een open cirkel van straal $1/2$ getekend.



Figuur 7: Weergave van het vermoeden met twee lopers

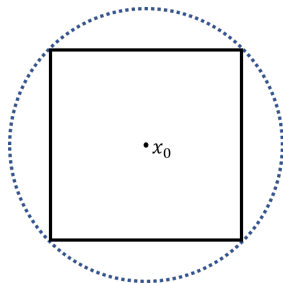
De andere looper mag zich dus niet binnen deze cirkel bevinden. Echter, deze looper mag ook alleen maar rechtdoor lopen. Er zal dus altijd een moment zijn waarop de looper de rand van het vierkant passeert. Op deze rand bevindt de looper zich niet in de open cirkel en is er altijd een moment waarop looper x_0 eenzaam is. Hiermee is het bewijs voltooid. \square

Opmerking 6.1. We zien nu goed waarom de eis dat de looper alsmaar recht door moet lopen essentieel is. Mocht de looper zelf bochten kunnen maken, kan het zo zijn dat hij zich altijd binnen de blauwe cirkel bevindt. Op deze manier is looper x_0 natuurlijk nooit eenzaam.

Opmerking 6.2. Op dezelfde manier is Stelling 6.2 te bewijzen voor irrationale richtingscoëfficiënt. Merk op dat we deze eis in de stelling namelijk niet gebruikt hebben in het bewijs. Echter, om het vermoeden in twee dimensies met twee lopers zo veel mogelijk te laten lijken op het vermoeden in een dimensie hebben we ervoor gekozen dat de looper telkens dezelfde route aflegt, dus dat hij terug komt op zijn beginpositie.

Als we Stelling 6.2 vergelijken met het vermoeden van de eenzame looper in een dimensie met twee lopers, valt er iets interessants op. In de eendimensionale cirkel wordt namelijk de hele cirkel gebruikt. Dat wil zeggen, op het punt dat looper x_0 eenzaam is, en de andere looper zich dus op afstand $1/2$ bevindt, kun je deze afstand meten aan beide kanten van de cirkel (die is namelijk beide $1/2$). De bewegende looper kan zich maar op precies één punt bevinden zodat looper x_0 eenzaam is.

In de tweedimensionale situatie (Figuur 7) mag de bewegende looper niet alleen op de rand staan, maar zijn er vier hoeken van het vierkant waar de looper beweegruijnte heeft. Dit is een interessant verschil tussen één en twee dimensies. Merk op dat we het vermoeden niet kunnen schrijven zodat het hele vlak waarin de lopers zich bevinden wel bedekt is. Mochten we dat namelijk doen, zouden we een cirkel met straal $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ moeten tekenen. Zie hiervoor Figuur 8.



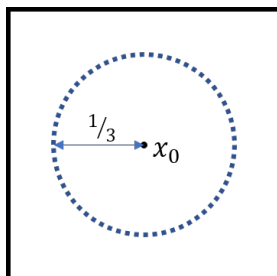
Figuur 8: Minimale afstand tot x_0 is $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Echter, als de bewegende looper nu een route aflegt met richtingscoëfficiënt 0, dus een horizontale route gezien op het vierkant, zal er nooit een moment zijn waarop hij zich buiten de cirkel bevindt. Met de definitie dat de stationaire looper x_0 eenzaam is wanneer de bewegende looper zich binnen een straal van $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ van de stationaire looper bevindt, zal looper x_0 dus nooit eenzaam zijn. Voor deze situatie is Stelling 6.2 met aangepaste voorwaarden voor eenzaamheid dus niet waar. De enige mogelijke situatie waarvoor deze aangepaste stelling waar zou zijn is wanneer de bewegende looper op een hoekpunt van het vierkant staat.

6.3 Het vermoeden voor drie lopers in twee dimensies

Nu we een formulering van het vermoeden van de eenzame looper op een torus hebben voor $k = 1$, kunnen we dit proberen door te trekken naar $k = 2$. De

eenzame loper is weergegeven in Figuur 9. Hierbij zijn de rode en groene randen weer weggelaten om de afbeelding overzichtelijk te laten.



Figuur 9: Weergave van een eenzame loper op een torus met $k = 2$

Met drie lopers is het bewijs niet in één keer gegeven. Er zijn namelijk verschillende situaties die zich kunnen voordoen. We nemen weer 1 loper stationair en de beginpositie van elke loper gelijk. We bekijken situaties voor de twee bewegende lopers:

1. De lopers lopen dezelfde route met een verschillende snelheid;
2. De lopers lopen in een andere richting maar hebben dezelfde snelheid;
3. De lopers lopen in een andere richting en hebben ook een verschillende snelheid;

We zullen beginnen met een bewijs voor situatie 1.

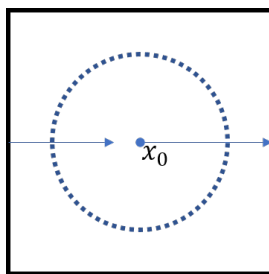
Stelling 6.3. *Zij $k=2$. Stel de route van de lopers gelijk aan elkaar. Daarnaast nemen we aan dat de lopers niet van richting veranderen en dat ze terugkomen op hun beginpositie. De snelheid van de lopers is ongelijk aan elkaar. Dan is elke loper op een moment eenzaam, wat inhoudt dat de afstand van de eenzame loper tot de andere lopers minstens $1/3$ is. We bekijken deze afstand weer vanuit de vierkants-weergave van de torus, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, waardoor geen loper zich in een straal van $1/3$ van de eenzame loper mag bevinden.*

Deze stelling is te vergelijken met de eendimensionale situatie voor $k = 2$, omdat lopers exact dezelfde route afleggen. Ze lopen immers op dezelfde cirkel. Omdat het bewijs voor drie lopers op een cirkel nog niet is gegeven in deze scriptie, zal dat hieronder volgen.

Bewijs. Noem de lopers A, B en C . Daarnaast nemen we aan dat de lopers richtingscoëfficiënt 0 hebben, omdat in deze situatie de lopers zich zo kort mogelijk op een afstand $> 1/3$ bevinden. Als we dit hebben bewezen hebben we de stelling voor alle mogelijke rationale richtingscoëfficiënten bewezen. Bovendien stellen we loper A stationair en C sneller dan B . Zo kunnen we twee situaties onderscheiden:

1. Loper C is hoogstens twee keer zo snel als loper B
2. Loper C is méér dan twee keer zo snel als loper B .

De situatie is weergegeven in Figuur 10. Merk op dat bij rondes van lengte 1, we de stelling het best kunnen bewijzen door dit onderscheid in snelheden te maken. Mochten de lopers een andere route lopen, zullen we de ‘drempelsnelheid’ zelf moeten berekenen. Een voorbeeld hiervan is te vinden in Stelling 6.4.



Figuur 10: De route van de twee bewegende lopers

Situatie 1: Bekijk het moment waarop loper B precies op de rand van de blauwe open cirkel staat, zodat hij niet meer dicht bij loper A staat. Op dit moment is loper C al verder. Echter, omdat loper C hoogstens twee keer zo snel loopt, zal hij niet meer dan $2/3$ van zijn route afgelegd hebben. Loper C bevindt zich dus ergens op het gebied buiten de blauwe open cirkel. Conclusie: Loper A , die stil staat op x_0 is op dit moment eenzaam.

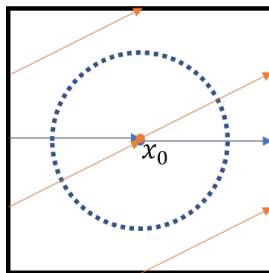
Situatie 2: Bekijk het moment waarop loper B op de rand staat van de blauwe open cirkel en hij op het punt de cirkel te verlaten. Loper C is op dit moment binnen de blauwe open cirkel, omdat hij meer dan twee keer zo snel is en dus al meer dan $2/3$ van de route heeft afgelegd. Echter, op het moment dat loper B $1/3$ stuk doorloopt en de cirkel wilt binnentreden - hij staat dus op de rand - moet loper C méér dan $2/3$ afgelegd hebben en zal loper C weer buiten de blauwe cirkel staan. Precies op dit moment is loper A eenzaam, want loper B staat $1/3$ van hem af en loper C meer dan $1/3$. Hiermee is het bewijs voltooid. \square

Voor lopers die dezelfde richting hebben, is het vermoeden voor drie lopers in twee dimensies dus waar. Voor lopers die een verschillende richting uitgaan, maar dezelfde snelheid hebben, is het bewijs vrijwel triviaal. Namelijk, vanaf hun startpunt x_0 zullen ze tegelijk de rand van de blauwe open cirkel betreden. Op dit moment is de stationaire loper al eenzaam, ongeacht welke richting de andere twee lopers opgaan.

Er blijft nu nog één situatie over om te bekijken: Lopers hebben een andere richting én andere snelheid. Het probleem is in dit geval lastiger, omdat we te maken hebben met verschillende afstanden die de bewegende lopers afleggen. De één kan een cirkel van lengte 1 afleggen, waarbij de andere loper misschien met een richtingscoëfficiënt van $\frac{1}{2}$ loopt en de afstand van zijn route langer dan 1 is. Om een idee te geven hoe we kunnen bewijzen dat elke loper op een moment eenzaam is wanneer de lopers een andere richting en andere snelheid hebben, zal ik eerst een bewijs leveren voor de zojuist beschreven situatie. Het bewijs voor elke mogelijke situatie is hierop gebaseerd.

Stelling 6.4. *Zij $k = 2$. Stel de routes van de bewegende lopers met richtingscoëfficiënt 0 resp. $1/2$. Verder stellen we dezelfde voorwaarden als in Stelling 6.2. Dan is elke loper op een moment eenzaam, waarbij we het begrip eenzaam gebruiken als gedefinieerd in Stelling 6.2.*

Bewijs. De routes van de twee bewegende lopers zijn weergegeven in Figuur 11. Hierbij geven de blauwe pijlen de route aan van de loper met richtingscoëfficiënt



Figuur 11: De route van de twee bewegende lopers in verschillende richting

0, waardoor deze route een lengte van 1 heeft en de oranje pijlen geven de route aan van de loper met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$. Vanaf nu zullen we de loper van de blauwe route loper B noemen en van de oranje route loper O. Daarnaast staat de stilstaande loper op het punt x_0 . We zien meteen dat loper O langer buiten de blauwe cirkel is dan binnen. De lengte van route O is gelijk aan

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{5} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Hiervan is de loper dus $\sqrt{5} - \frac{2}{3}$ buiten de blauwe cirkel. Stel loper O is sneller dan loper B. We kunnen weer twee situaties onderscheiden:

1. Loper O is hoogstens $3\sqrt{5} - 1$ keer zo snel als loper B.
2. Loper O is meer dan $3\sqrt{5} - 1$ keer zo snel als loper B.

Deze getallen lijken vanuit niets te ontstaan, maar hier zit een logica achter. Bekijk situatie 1 wederom op het punt wanneer loper B op de rand van de blauwe cirkel staat. Loper O is sneller en zal de cirkel al verlaten hebben. Echter, loper O is hoogstens $3\sqrt{5} - 1$ keer zo snel, wat betekent dat de loper hoogstens een afstand van $\frac{1}{3}(3\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} - \frac{1}{3}$ heeft afgelegd. Loper O heeft de cirkel dus nog niet opnieuw betreden in deze tijd, maar staat hoogstens weer op de rand. Bekijk nu situatie 2, waarin loper O meer dan $3\sqrt{5} - 1$ keer zo snel is als loper B. Hierdoor zal, wanneer loper B op de rand staat van de blauwe cirkel, loper O de cirkel wel betreden hebben. Echter, in deze situatie is loper O zo 'snel' dat op het moment dat loper B de cirkel weer wilt betreden en dus op de rand staat, loper O meer dan $2(\sqrt{5} - \frac{1}{3}) = 2\sqrt{5} - \frac{2}{3}$ heeft gelopen en dus meer dan twee rondjes heeft afgelegd. Loper O zal zich dus wederom buiten de cirkel begeven.

De stilstaande loper op punt x_0 is dus in elke mogelijke situatie op een moment eenzaam.

Wat nu als loper B sneller is dan loper O? Dan stellen we een nieuwe ‘drempel-snelheid’ van $\frac{1-1/3}{1/3} = 2$. Dus de twee situaties die we dan onderscheiden zijn: Loper B is hoogstens 2 keer zo snel als loper B, of meer dan 2 keer zo snel. Dit kunnen we op dezelfde manier als hierboven bewijzen en hiermee is het bewijs voltooid. \square

Nu kunnen we het bewijs voor elk mogelijke route van de twee bewegende lopers leveren.

Stelling 6.5. *Zij $k = 2$. Stel de routes van de bewegende lopers ongelijk aan elkaar. Verder stellen we dezelfde voorwaarden als in Stelling 6.2. Dan is elke loper op een moment eenzaam, waarbij we het begrip eenzaam gebruiken als gedefinieerd in Stelling 6.2.*

Bewijs. Stel loper A stationair en de snelheid van loper C, notatie v_C groter dan die van loper B met snelheid v_B . Stel verder de lengte van de route van loper B en C als l_B respectievelijk l_C . We onderscheiden de volgende twee situaties:

1. v_C is hoogstens $\frac{l_C-1/3}{1/3} = 3l_C - 1$ keer zo groot als v_B .
2. v_C is meer dan $3l_C - 1$ keer zo groot als v_B .

De voltooiing van dit bewijs is wederom gebaseerd op het bewijs op de cirkel. Dezelfde stappen als in Stelling 6.4 kunnen worden gevolgd om de stelling te bewijzen. Als loper B sneller is dan loper C, is de grens voor de onderscheiding van twee situaties gelijk aan $3l_B - 1$. \square

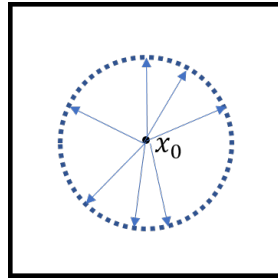
6.4 Het vermoeden in twee dimensies voor willekeurige k

Tijdens de zoektocht naar een formulering voor het vermoeden van de eenzame lopers in twee dimensies met drie lopers, hebben we kunnen zien dat er een situatie is waarin we zeker weten dat de stilstaande loper eenzaam is en die we eenvoudig kunnen doortrekken naar willekeurige k .

Stelling 6.6 (Het vermoeden in twee dimensies met gelijke snelheid). *Zij k het aantal lopers dat op een torus van 1 bij 1 met dezelfde snelheid loopt en x_0 een stilstaande loper. Ze beginnen op hetzelfde startpunt met lopen. Een loper is eenzaam als we een cirkel van straal $1/(k+1)$ om de loper heen kunnen tekenen waarin geen andere loper zich bevindt. Dan is elke loper op een moment eenzaam.*

Bewijs. Een weergave voor willekeurige k met willekeurige richtingen is gegeven in Figuur 12. Zoals te zien is in Figuur 12, zullen alle k lopers tegelijk op de cirkelrand staan, om de cirkel van straal $1/(k+1)$ te verlaten. Op dit moment is de stilstaande loper x_0 eenzaam, ongeacht de snelheid die de lopers hebben (wel allemaal gelijk) en het aantal lopers. \square

Voor een bepaalde situatie hebben we het vermoeden van de eenzame loper dus bewezen in twee dimensies! Sterker nog, met k lopers in k richtingen met allen



Figuur 12: Weergave voor een mogelijke situatie voor k runners met gelijke snelheid

gelijke snelheid, is de stationaire looper ook eenzaam als we een ondergrens nemen van straal $1/2$, als te vinden is in Figuur 7. Elke looper passeert namelijk op exact hetzelfde moment de rand van de open cirkel, waardoor op dat moment looper x_0 eenzaam is in die zin, dat niemand zich in de open cirkel van straal $1/2$ bevindt.

Echter, omdat het vermoeden van de eenzame looper in één dimensie nog niet is bewezen, zijn er situaties in twee dimensies waarvoor we ook nog niet kunnen bewijzen dat lopers altijd een moment eenzaam zijn. Situatie 1 die is beschreven in de vorige sectie, waarin lopers dezelfde route afleggen met een verschillende snelheid is in sommige situaties te vergelijken met de eendimensionale situatie. Bijvoorbeeld als de lopers richtingscoëfficiënt 0 hebben, waardoor ze cirkels van lengte 1 lopen. Echter, de situatie kan natuurlijk anders lopen als de lopers een rationaal richtingscoëfficiënt ongelijk aan nul hebben, omdat de afstand van hun ronde dan langer dan 1 kan worden. Wellicht zouden we in zo'n situatie kunnen bewijzen dat de lopers altijd op een moment eenzaam zijn. Zoals al eerder benoemd is zijn er veel artikelen geschreven waarin een goede ondergrens werd gevonden waarvoor het vermoeden van de eenzame looper wél is bewezen. Dit zou een interessant vervolgonderzoek zijn.

7 Afsluiting

Het vermoeden van de eenzame looper is dus na 50 jaar nog steeds onopgelost. Chow en Rimanić [CR17] hebben in hun onderzoek een vertaalslag gedaan naar functielichamen, waarin ze een sterker vermoeden voor de eenzame looper hebben geformuleerd in deze andere structuur. Daarnaast hebben ze het zwakkere vermoeden, die vergelijkbaar is met het vermoeden in \mathbb{R} hiermee bewezen. In deze scriptie hebben we onderzocht hoe ze deze vertaalslag hebben gemaakt en welke achtergrondinformatie en voorkennis ze hiervoor hebben gebruikt.

Daarnaast heb ik zelf het probleem bekeken in de tweede dimensie. Ik heb het vermoeden geformuleerd voor twee en drie lopers en deze bewezen. Hierin heb ik vastgesteld dat de looper geen versnelling mag hebben, dus dat de looper niet van snelheid of richting mag veranderen. Ook zijn er eisen gesteld aan de richting van de looper, zodat de looper altijd terugkomt op zijn beginpositie. Daarnaast hebben we gezien dat, wanneer k lopers gelijke snelheid hebben, de stationaire looper x_0 altijd op een moment eenzaam is. Hiermee hebben we een bepaalde situatie van het tweedimensionale vermoeden van de eenzame looper bewezen.

Een interessant vervolgonderzoek zou zijn om de recente onderzoeken op het eendimensionale probleem, waar ondergrenzen gevonden zijn waarmee een zwakker vermoeden te bewijzen is, door te trekken in het tweedimensionale probleem. Kunnen we met behulp van zulke ondergrenzen ook zwakkere vormen van het vermoeden in twee dimensies bewijzen?

Referenties

- [BS08] Barajas, J. & Serra, O. (2008). The lonely runner with seven runners. *The electronic journal of combinatorics*, 15(1), 1-15.
- [B12] Barnes, C. (2012). The lonely runner conjecture. Geraadpleegd van <https://arxiv.org/pdf/1211.2482.pdf>
- [BW72] Betke, U. & Wills, J. (1972). Untere Schranken für zwei diophantische Approximations-Funktionen. *Monatshefte für Mathematik*, 76, 214-217.
- [B18] Beukers, F. (2018). *Rings and Galois Theory* (1e editie). Utrecht, Nederland: Universiteit Utrecht.
- [BGST96] Bienia, W, Goddyn, L., Gvozdzjak, P., Sebö, A. & Tarsi, M. (1996). Flows, View Obstructions and the Lonely Runner. *Journal of combinatorial theory, Series B* 72, 1-9.
- [BHK01] Bohman, T., Holzman R. & Kleitman, D. (2001). Six lonely runners. *The electronic journal of combinatorics*, 8(2), 1-3.
- [C00] Carothers, N. (2000). *Real Analysis* (1e editie). Cambridge, Verenigd Koninkrijk: Cambridge University Press.
- [Ca17] Carrell, J. (2017) *Groups, Matrices, and Vector spaces: A Group Theoretic approach to Linear Algebra* (1e editie). New York, Verenigde Staten: Springer Science+Business media.
- [CR17] Chow, S. & Rimanić, L. (2017). Lonely runners in function fields. *Mathematics Subject Classification*, 1-17.
- [C94] Conway, J. (1994). *A Course in Functional Analysis* (4e editie). New York, Verenigde Staten: Springer Verlag.
- [C17] Crainic, M. (2017). *Inleiding Topologie 2017/2018* (1e editie). Utrecht, Nederland: Universiteit Utrecht.
- [C73] Cusick, T. (1973). View-obstruction problems. *Aequationes Mathematicae*, 9, 165-170.
- [C74] Cusick, T. (1974). View-obstruction problems in n-dimensional geometry. *The electronic journal of combinatorics*, A(16), 1-11.
- [C82] Cusick, T. (1982). View-obstruction problems II. *Proceedings of the American mathematical society*, 84(1), 25-28.
- [CP84] Cusick, T. & Pomerance, C. (1984). View-obstruction problems III. *Journal of number theory*, 19, 131-139.
- [CG08] Czerwiński, S. & Grytysuk, J. (2008). Invisible runners in finite fields. *Information Processing Letters*, 108, 64-67.
- [D42] Dirichlet, J. (1842). Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademi der Wissenschaften*, 93-95.

- [GS07] Galarza, A. & Seade, J. (2007). *Introduction to Classical Geometries* (1e editie). Berlijn, Duitsland: Birkhäuser Verlag.
- [G16] Gasbarri, C. (2016). On some differences between number fields and function fields. *Mathematics Subject Classification*.
- [GMS05] Geer, G., Moonen, B. & Schoof, R. (2005). *Number fields and function fields - two parallel worlds* (1e editie). Boston, Verenigde Staten: Birkhäuser Boston.
- [HW38] Hardy, G. & Wright, E. (1938). *An introduction to the theory of numbers* (4e editie). Oxford, Groot Britannië: University Press, Oxford.
- [K00] Koch, H. (2000). *Number Theory: Algebraic Numbers and Functions* (1e editie). Rhode Island, Verenigde Staten: American Mathematical Society.
- [K14] Krapp, L. (2014) *Construction of the real numbers; A set theoretical approach* (thesis). Geraadpleegd van http://www.math.uni-konstanz.de/~krapp/Constructions_of_the_real_numbers.pdf.
- [LN96] Lidl, R. & Niederreiter, H. (1996) *Finite fields* (2e editie). Cambridge, Verenigd Koninkrijk: Cambridge University Press.
- [M01] Malajovich, G. (2001). An Effective Version of Kronecker's Theorem on Simultaneous Diophantine Approximation. Artikel in voorbereiding.
- [N99] Neukirch, J. (1999). *Algebraic Number Theory* (1e editie). Berlijn, Duitsland: Springer-Verlag.
- [R04] Renault, J. (2004). View-obstruction: a shorter proof for 6 lonely runners. *Discrete Mathematics*, 287, 93-101.
- [S80] Schmidt, W. (1980). *Diophantine Approximation* (1e editie). Berlijn, Duitsland: Springer-Verlag.
- [S93] Stichtenoth, H. (1993). *Algebraic function fields and codes* (2e editie). Berlijn, Duitsland: Springer-Verlag.
- [T17] Tao, T. (2017) Some remarks on the lonely runner conjecture. *Contributions to discrete mathematics*.
- [WD82] Weber, H. & Dedekind, R. (1882). Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 181-290.
- [W67] Wills, J. (1967). Zwei Sätze über inhomogene diophantische Approximation von Irrationalzahlen. *Monatshefte für Mathematik*, 71, 263-269.