LOGARITMEN: HOE EN WAAROM

■ door Steven Wepster

Rond het jaar 1600 moesten astronomen, zoals Tycho Brahe en Johannes Kepler, op routinebasis ingewikkelde berekeningen uitvoeren. Zo moesten ze bijvoorbeeld de hoek α berekenen waarbij geldt dat

$$\cos\alpha = \frac{\cos 38^\circ - \cos 51^\circ \cos 67^\circ}{\sin 51^\circ \sin 67^\circ}.$$

Rekenmachines bestonden nog niet en als het woord 'computer' werd gebruikt, dan bedoelde men een echte persoon van vlees en bloed die in een kamer met behulp van tabellenboeken en een ganzenveer berekeningen zat te maken. Zo waren er tabellenboeken met de (co)sinus en tangens van verschillende hoeken in acht of meer decimalen.

Optellen en aftrekken van getallen met zoveel cijfers was wel te doen, maar vermenigvuldigen was erg veel werk met navenant veel kans op fouten. Delen was nog erger. Dus zo'n berekening als hierboven was geen pretje. Om het rekenwerk sneller, eenvoudiger en met minder fouten uit te voeren, ging men op zoek naar manieren om het vermenigvuldigen en delen te vermijden. Zou het mogelijk zijn om ze te vervangen door optellen en aftrekken? Dat was immers veel makkelijker.

Eerst heeft men toen een methode gebruikt die wordt aangeduid als *prostaphaerese* (de naam is een samentrekking van de Griekse woorden voor optellen en aftrekken). Hierbij wordt gebruik gemaakt van de som- en verschilformules van de goniometrie. Met die regels kun je afleiden dat

$$\cos a \cdot \cos b = \tfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)),$$

en daarmee kun je dan het vermenigvuldigen van twee cosinussen vervangen door de som van twee cosinussen. Dat hielp, maar het kon nog beter.

Nicolas Chuquet in Frankrijk en Michael Stifel in Duitsland hadden aan het begin van de zestiende eeuw al ingezien dat er iets merkwaardigs aan de hand is met de volgende twee rijtjes:

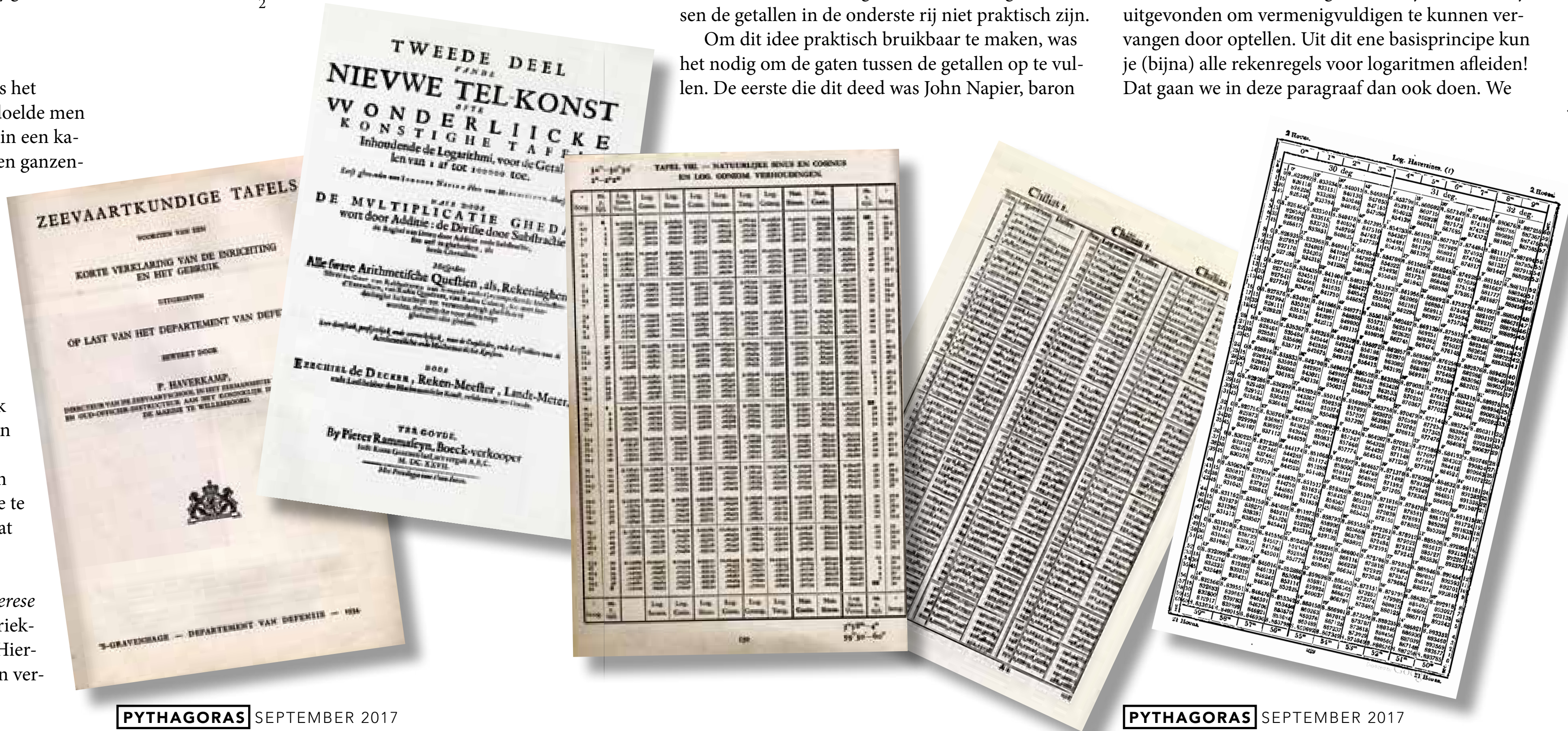
$$\begin{array}{cccccccccccccc} \dots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \dots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & \dots \end{array}$$

Het bijzondere is: optellen van twee getallen in het bovenste rijtje komt overeen met vermenigvuldigen van twee getallen in het onderste rijtje. Bijvoorbeeld: $2 + 3 = 5$, en dit komt overeen met $4 \cdot 8 = 32$. Hier zie je dus dat het inderdaad mogelijk is om vermenigvuldigen/delen om te zetten in optellen/aftrekken, maar erg bruikbaar is het niet omdat de (naar rechts toe steeds groter wordende) gaten tussen de getallen in de onderste rij niet praktisch zijn.

Om dit idee praktisch bruikbaar te maken, was het nodig om de gaten tussen de getallen op te vullen. De eerste die dit deed was John Napier, baron van Murchiston (Schotland). In 1614 publiceerde hij het boek *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Beschrijving van de wonderlijke regel van logaritmen*). Het boek bevatte de eerste logaritmetabellen waar Napier twintig jaar aan had gewerkt. De logaritmen van Napier werkten wat minder handig dan de logaritmen van tegenwoordig, maar het idee is hetzelfde.

Napiers tabellen kregen direct veel aandacht. Henry Briggs, hoogleraar in Oxford, reisde naar Napier en samen bedachten ze het systeem van logaritmen met grondtal 10 dat nu nog gebruikt en onderwezen wordt. Binnen enkele jaren verschenen er her en der verschillende publicaties met logaritmetabellen; zelden is een wiskundig idee zo snel verspreid en ingeburgerd. Daaraan kun je zien dat er een grote behoefte aan was.

DE REKENREGELS Logaritmen zijn dus letterlijk uitgevonden om vermenigvuldigen te kunnen vervangen door optellen. Uit dit ene basisprincipe kun je (bijna) alle rekenregels voor logaritmen afleiden! Dat gaan we in deze paragraaf dan ook doen. We



PYTHAGORAS SEPTEMBER 2017

moeten wel één belangrijk voorbehoud maken: we nemen alleen de logaritme van *positieve* getallen. Er is wel een manier om ook van negatieve getallen de logaritme te definiëren, maar dan zit je al snel middenin de complexe getallen. Dit is pas ruim een eeuw na Napier gebeurd en we zullen het hier niet behandelen.

(Basis)regel 0: Voor positieve getallen a en b geldt: $\log(ab) = \log a + \log b$.
Dit is niets anders dan de vertaling van bovenstaand basisprincipe in een basisregel en fungeert als ons startpunt voor de overige regels.

Regel 1: $\log 1 = 0$.
Immers: neem $a = b = 1$ in de basisregel, dan krijg je $\log 1 = \log 1 + \log 1 = 2 \log 1$. Nu kun je aan beide kanten $\log 1$ aftrekken en dan blijft $\log 1 = 0$ over.

Regel 2: $\log a^2 = 2 \log a$.
Dit gaat op dezelfde manier: vul in de basisregel voor b maar a in en dan staat het er eigenlijk al.

Regel 3: $\log(1/a) = -\log a$.
Als we $b = 1/a$ nemen, dan geeft de basisregel ons $\log 1 = \log a + \log(1/a)$. Omdat we al weten dat $\log 1 = 0$, volgt hieruit direct dat $\log(1/a) = -\log a$.

Regel 4: $\log a^n = n \log a$ voor elk geheel getal n.
Voor positieve n is dit een uitbreiding van regel 2, of anders het resultaat van regel 0 op de volgende manier: $\log a^n = \log(a \cdot a^{n-1}) = \log a + \log a^{n-1} = \ldots = n \log a$, waarbij we op de plaats van de puntjes nog $n - 1$ keer dezelfde regel 0 toepassen. Voor *negatieve* n werkt het hetzelfde, alleen hebben we er ook regel 3 bij nodig. Tot slot is de regel ook waar voor $n = 0$, want $\log a^0 = \log 1 = 0 = 0 \cdot \log a$.

Regel 5: regel 4 is ook nog geldig als de exponent n een breuk is in plaats van een geheel getal.
Hiervoor bedenken we allereerst dat $\log a = \log(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}) = 2 \log \sqrt{a}$. Aangezien $\sqrt{a} = a^{1/2}$, krijgen we dat $\log a^{1/2} = \frac{1}{2}\log a$. Dit kunnen we weer uitbreiden tot andere wortels: $\log a^{1/q} = \frac{1}{q}\log a$. Maar dan is ook $\log a^{p/q} = \log (a^p)^{1/q} = \frac{1}{q}\log a^p = \frac{p}{q}\log a$, waarbij we regel 4 gebruikt hebben. Hierbij mag p een negatief geheel getal zijn.

Regel 6: er geldt ook dat $\log a^c = c \log a$ als c een positief *irrationaal* getal is (zoals $\sqrt{2}$).
Hoewel dit goed 'aanvoelt' op grond van de resultaten die we al hebben afgeleid, kunnen we het hier niet helemaal rechtvaardigen, omdat we daarvoor eerst beter zouden moeten begrijpen wat we eigenlijk bedoelen met een uitdrukking zoals $3^{\sqrt{2}}$. Dat voert te ver van het hoofddoel van dit artikel af.

HET GRONDTAL Waarschijnlijk ben je bij logaritmen ook het woord *grondtal* tegengekomen. Het grondtal g is het getal waarvoor geldt dat $\log g = 1$. Bij Chuquet en Stifel zou het grondtal 2 zijn geweest: onder de 1 in het bovenste rijtje staat een 2. Als ze daar een ander getal hadden gezet, bijvoorbeeld 3 of 10 of 1,0000001, dan was daarmee automatisch de rest van het onderste rijtje ook veranderd. Zodra je het grondtal van je logaritme weet, of als je zelf een grondtal kiest, dan kun je in principe een logaritmetabel opstellen voor zoveel waarden als je maar wilt.

Kies je bijvoorbeeld grondtal 10, dan vind je

$$\log 10 = 1$$
$$\log \sqrt{10} = \log 3{,}162277\ldots = 0{,}5$$
$$\log \sqrt[3]{10} = \log 2{,}154434\ldots = 0{,}33333\ldots$$
$$\log 10^{1/100} = \log 1{,}023292\ldots = 0{,}01$$
$$\log 10^{27/100} = \log 1{,}862087\ldots = 0{,}27$$

en zo verder, allemaal met behulp van de rekenregels uit de vorige paragraaf. De gehele logaritmefunctie ligt vast als het grondtal gekozen is. In de notatie brengt men dit tot uitdrukking door het grondtal linksboven (of in Engels- of Duitstalige boeken rechtsonder) te schrijven, zoals ${}^{10}\log x$ (respectievelijk $\log_{10} x$).

Tussen logaritmen met verschillende grondtallen bestaat een mooi verband. Stel dat je twee logaritmen hebt: ${}^{p}\log x$ (met grondtal p) en ${}^{q}\log x$ (met grondtal q). Bekijk de functie

$$f(x) = \frac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log q}.$$

Merk op dat de noemer in de breuk een constante is! Met gebruik van de rekenregels kun je zelf nagaan dat geldt $f(xy) = f(x) + f(y)$ en bovendien dat $f(q) = 1$. Oftewel, de functie f is een logaritme met grondtal q, zodat we dus kunnen schrijven:

$${}^{q}\log x = \frac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log q}.$$

Met deze formule kun je overstappen van grondtal p op grondtal q, en je kunt er bovendien aan aflezen dat *alle logaritmefuncties met verschillende grondtallen steeds een constante factor van elkaar verschillen*. In dit voorbeeld is de constante factor ${}^{p}\log q$.

Een bijzonder grondtal is e = 2,7182818284… De logaritme met dit grondtal duikt op een 'natuurlijke' manier op in de wiskunde en heet daarom ook *natuurlijke logaritme*, notatie $\ln x = {}^{e}\log x$.

Briggs had destijds een goede reden om te kiezen voor het grondtal 10. We werken namelijk dagelijks met een tientallig talstelsel. Met grondtal 10 kun je schrijven

$$\log 57.721 =$$
$$\log(100.000 \cdot 0{,}57721) =$$
$$5 + \log 0{,}57721$$

en dat betekent dat je met één logaritmetabel voor bijvoorbeeld alle gehele getallen tussen 1 en 1.000.000, gelijk ook de logaritme van een heleboel kommagetallen kunt opzoeken.

HOE WERKT DAT DAN MET GONIO?
Natuurlijk waren de astronomen dolblij met de nieuwe techniek van logaritme. Of toch niet? Zoals we in het begin al zagen, hadden ze sinus en cosinus in hun tabellen staan. Het zou wat omslachtig zijn om eerst in een tabel $\sin 51° = 0{,}777146$ op te zoeken en daarna in een andere tabel $\log 0{,}777146 = -0{,}109497$. Daarnaast zou het ook nog wel vaak kunnen gebeuren dat ze bijvoorbeeld $\cos 123°$ nodig hadden: dat is een negatief getal en daarvan kun je de logaritme niet nemen.

Het eerste probleem was eenvoudig op te lossen. Er circuleerden al snel tabellen waarin je rechtstreeks $\log(\sin 51°)$ kon opzoeken. Een aparte tabel voor 'log cos' was niet nodig, want zoals je waarschijnlijk wel weet, geldt $\cos x = \sin(90° - x)$. Daarom stonden aan de linkerkant van de tabel oplopende hoeken van 0° tot 90° en aan de rechterkant aflopende hoeken van 90° tot 0°, zodat je niet steeds zelf $90 - x$ hoefde uit te rekenen.

Er waren nog meer slimmigheidjes. We zagen zojuist dat $\log(\sin 51°) = -0{,}109497$. In de tabel stond dan echter niet dat mingetal maar 9,890503: dat is precies 10 meer. Daardoor hoefde je niet op de mintekens te letten en kon je gewoon altijd blijven optellen. Aan het eind van je berekening deed je dan weer 'min 10' om goed uit te komen.

En dan het andere probleem, van cos 123° wat een negatief getal oplevert waarvan je de logaritme niet kunt nemen. Dat was iets lastiger te hanteren, en heeft ertoe geleid dat men op een gegeven moment nieuwe goniofuncties, zoals de *haversinus*, heeft ingevoerd. Die heeft niks met je ontbijt te maken, het is een samentrekking van de woorden *halve verkeerde sinus*, notatie $\text{hav}\, x = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$. Deze functie is nooit negatief, en alleen 0 in bijzondere gevallen zoals $x = 0$, dus hiervan kun je goed logaritmetabellen maken. Het was dan wel nodig om de astronomische formules te herschrijven zodat ze van deze functies gebruikmaakten.

ACHTERHAALD De logaritmetabellen van Briggs met grondtal 10 voorzagen in een enorme behoefte en werden snel populair. Tot in de tweede helft van de twintigste eeuw werden zulke tabellen dagelijks gebruikt door ingenieurs, totdat de komst van goedkope rekenmachines ze overbodig maakte. Tegenwoordig kun je met zo'n machine sneller de astronomische berekening uit het begin van dit artikel uitvoeren, dan dat je ook maar één getal kunt opzoeken in een tabellenboek. De logaritmetabellen zijn al bijna een halve eeuw achterhaald. Sterker nog: het grondtal 10 kan eigenlijk geen aanspraak meer maken op zijn bevoorrechte positie, die nu veel meer toekomt aan het getal e. ■