

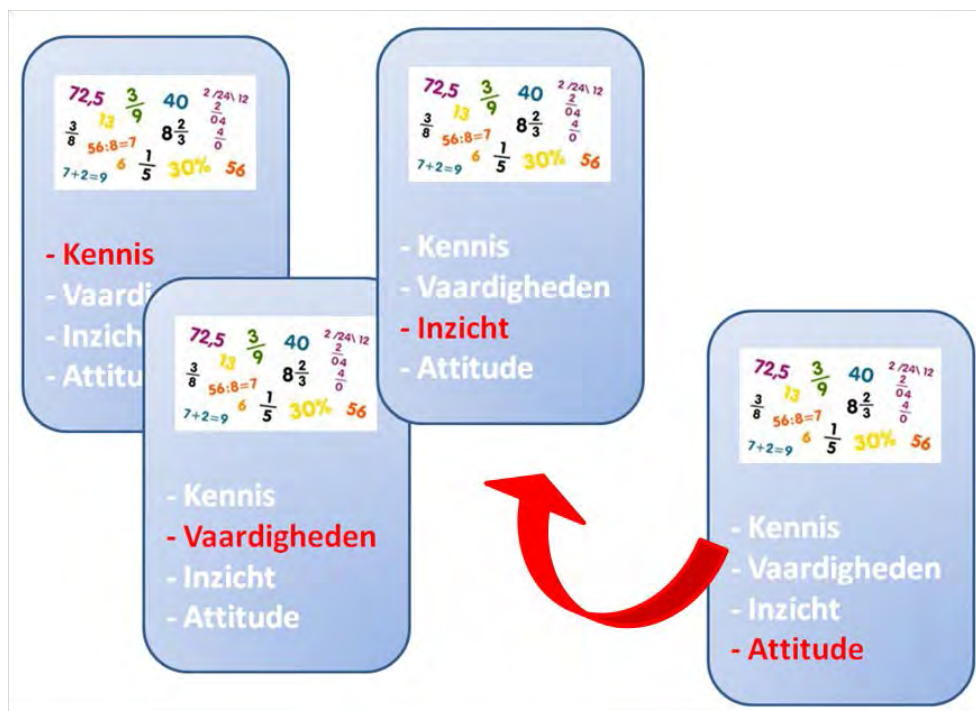
Het stimuleren van een wiskundige attitude

Erica de Goeij, Marnix Academie, & Wil Oonk,

Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut

Inleiding

Op de basisschool doen kinderen wiskundige kennis op, ontwikkelen ze wiskundige vaardigheden en groeit hun wiskundig inzicht. Maar het kwartet is dan nog niet compleet. Om het leren van rekenen-wiskunde op een hoger plan te brengen, is naast aandacht voor kennis, vaardigheden en inzichten ook het ontwikkelen van een wiskundige houding of attitude van belang (Afb. 1). De kenmerken van een wiskundige attitude (zie de bijlage bij dit hoofdstuk) komen sterk overeen met wat tegenwoordig 21e eeuwse vaardigheden worden genoemd. We laten aan de hand van enkele praktijkvoorbeelden rond probleem oplossen met magische vierkanten zien, hoe de leerkracht de wiskundige attitude van kinderen kan stimuleren.



Afb. 1. Een kwartet van kennis, vaardigheden, inzicht en attitude in wiskundige leeractiviteiten.

Het HSA-vierkant in de bovenbouw

Aan leerlingen van groep 7 en 8 leggen we het onderstaande HSA-vierkant (Afb. 2) voor met de vraag wat hen opvalt als ze dit vierkant bestuderen. Sommige kinderen hebben een brede belangstelling voor rekenen-wiskunde en laten meteen een onderzoekende houding zien; ze zijn nieuwsgierig naar de getallen in het vierkant en willen graag begrijpen wat het idee is achter de plaatsing van de getallen in het vierkant. Ze ontdekken dat steeds een getal uit de bovenste rij en uit de onderste rij bij elkaar opgeteld 145 is ($1 + 144$, $142 + 3$, $11 + 134$, enzovoort) en dat hetzelfde geldt voor de

som van de getallen op de tweede en op één na laatste rij ($120 + 25$, $27 + 118$, $110 + 35$, enzovoort). De kinderen tekenen lijnen en cirkels op het blad om hun ontdekkingen te noteren. In de kantlijn verschijnen opgaven en getallenrijen. We zien ook kinderen die controleren of in de 144 vakjes de getallen 1 tot en met 144 allemaal één keer voorkomen. Andere kinderen weten niet zo goed wat ze aan moeten met de open vraag die is gesteld. Eigenlijk valt hen niet zoveel op aan dit vierkant en hebben ze geen idee waar en hoe te beginnen. Zij krijgen een hint van de leerkracht, die hen uitnodigt om de twaalf getallen van een rij eens bij elkaar op te tellen en dit ook voor andere rijen te doen.

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Afb. 2. Het HSA-vierkant.

In de groep zien we verschillen tussen leerlingen als we kijken naar de attitude die zij tonen bij het bestuderen van dit getallenvierkant. De leerlingen die plezier hebben in het oplossen van wiskundige problemen, doelgericht te werk gaan, notities maken, die reflecteren op hun vondsten en hierover in gesprek gaan met medeleerlingen komen zelfstandig verder in het beantwoorden van de vraag wat opvalt aan dit getallenvierkant. Anders is dat bij hun klasgenoten die eigenlijk weinig of geen interesse hebben in het vak, zichzelf nauwelijks vragen stellen en niet zijn ingesteld op het vinden van structuren en patronen. Regelmatig ontbreekt het deze leerlingen ook aan wiskundetaal om het gesprek erover met een medeleerling aan te gaan.

Wat is een HSA-vierkant?

Het HSA-vierkant is een magisch vierkant en staat voor een *Heel-Speciale-Attractie* en dankt zijn naam ook aan de makers ervan: Jesse Hoekstra (17 jaar), Willem Schilte (17 jaar) en Petra Alkema (15 jaar). In het voorjaar van 2007 kwam het vierkant in het nieuws nadat deze jonge mensen, na het volgen van een masterclass over Franklin-vierkanten, erin waren geslaagd een magisch vierkant van twaalf bij twaalf te ontwer-

pen waarin de magische som van de getallen in een rij of in een kolom steeds gelijk is. Eén van de voorwaarden die Benjamin Franklin (1706-1790) ooit bedacht voor magische vierkanten. Tellen we alle twaalf getallen in een rij bij elkaar op, dan levert dit de magische som van 870 op. Dit geldt voor alle rijen, maar ook voor alle kolommen. De twaalf getallen in een kolom zijn bij elkaar opgeteld eveneens 870. Sterker nog, ook de diagonalen hebben een som van 870. Vijf leerlingen ontdekten dit zelf nadat ze van de leerkracht de tip hadden gekregen om de som van de rijen te berekenen. Zij hebben zich verwonderd over de steeds weer terugkerende som van 870 en waren daarmee gemotiveerd om verder te gaan zoeken naar nog meer van deze bijzonderheden.

Nadat de leerlingen van groep 7 en 8 ruim de tijd hebben gekregen zelf ontdekkingen te doen in het HSA-vierkant, is het tijd voor een nabespreking. Verschillende kinderen brengen individueel of in een tweetal naar voren wat zij in het vierkant hebben ontdekt. Met behulp van een PowerPoint toont de leerkracht ook enkele mooie, verrassende kenmerken van het HSA-vierkant. De verwondering is groot als door één van de leerlingen wordt ingebracht dat de som van de beide diagonalen 870 is. Maar het kan helemaal niet meer stuk als de leerkracht hier nog aan toevoegt dat een afgebogen diagonaal ook deze magische som kent. En niet alleen de afgebogen diagonaal die in een hoekpunt start, maar ook de afgebogen diagonalen die verderop in de rij starten (Afb. 3).

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141	1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28	120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21	121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100	48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69	73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88	60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57	85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76	72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45	97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124	24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117	25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4	144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Afb. 3. De getallen in de afgebogen diagonalen leveren ook de magische som van 870 op.

In de groep wordt ook ontdekt dat vier getallen die met elkaar een vierkant vormen altijd een som van 290 hebben. Bijvoorbeeld $1 + 142 + 120 + 27$, maar ook $82 + 71 + 39 + 98$. In de nabespreking weet de leerkracht de verwondering opnieuw te wekken door ook de bijzonderheden uit afbeelding 4 in te brengen. Twaalf getallen die de letter H vormen leveren steeds de magische som van 870 op. Waar de letter ook wordt gemaakt in het vierkant, altijd is de som 870. Dit geldt ook voor de letter O. Daarbij zijn nog meer bijzonderheden vast te stellen. Niet alleen de twaalf getallen in

de gekleurde vakjes zijn bij elkaar opgeteld 870, dit geldt ook voor de twaalf getallen die binnen de O liggen ($83 + 64 + 87 + 50 + 93 + 53 + 58 + 95 + 52 + 92 + 62 + 81$). En tevens gaat dit op voor de twaalf getallen die net buiten de O liggen ($48 + 99 + 73 + 41 + 103 + 66 + 72 + 97 + 46 + 79 + 104 + 42$). Waar de O ook op deze manier in het vierkant wordt weergegeven, de magische som van 870 komt steeds weer terug.

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Afb. 4. De magische som komt ook op deze manieren terug in het HSA-vierkant.

Tijdens de nabespreking is bij de leerlingen niet alleen de verwondering over de bijzonderheden in dit HSA-vierkant gegroeid, maar ook hun bewondering voor de ontdekkers ervan is groot. Ze vinden het razend interessant dat Jesse, Willem en Petra erin zijn geslaagd 144 getallen zo in een vierkant te plaatsen dat de besproken kenmerken er allemaal in naar voren komen.¹

Wiskundige attitudevorming

Het HSA-vierkant is een mooi voorbeeld van een open probleem dat kinderen uitnodigt om te gaan onderzoeken. In de bijlage bij dit hoofdstuk zijn kenmerken van wiskundige attitudes opgenomen, gegroepeerd in vijf categorieën: een algemene houding ten aanzien van wiskunde; een reflectieve houding; een onderzoekende houding; een communicatieve houding; en een doelgerichte houding (Oonk & De Goeij, 2006). In deze categorieën zijn 21e eeuwse vaardigheden als kritisch denken, probleemoplossen, samenwerken, communiceren en de creativiteit herkenbaar. Van de vijfendertig sub kenmerken komen er bij de leerlingen in de hiervoor beschreven lesactiviteit opvallend veel naar voren, zoals verwondering, betrokkenheid, nieuws-

¹ Helaas is het Jesse, Willem en Petra niet gelukt om ook aan Franklins voorwaarde te voldoen dat de som van een halve rij, maar ook van een halve kolom, de helft van de magische som, dus 435, moet opleveren. Een wiskundige heeft inmiddels het bewijs geleverd dat het onmogelijk is om dit voor het magisch vierkant van twaalf bij twaalf voor elkaar te krijgen. Zie voor het boeiende verhaal: <http://www.kennislink.nl/publicaties/tieners-vinden-multi-magisch-vierkant>.

gierigheid, een drang naar willen begrijpen, het zoeken naar alternatieve oplossingsaanpakken en het reageren op elkaars oplossingen.

Een wiskundige attitude ontwikkelen kinderen niet zomaar tijdens het maken van rekenkundige en wiskundige vraagstukken. Het is de leerkracht die de ontwikkeling van deze attitude bewust kan stimuleren. Zo zagen we bij het HSA-vierkant dat juist ook een nabespreking kansen biedt om verwondering op te roepen en kinderen meer nieuwsgierig te maken naar de getallenwereld en de mogelijkheden daarbinnen. In een nabespreking kunnen kinderen wiskundetaal gebruiken en benutten om te komen tot dieper inzicht en alternatieve aanpakken. Er liggen ook kansen om met de leerlingen gesprek te hebben over bijvoorbeeld het belang van efficiëntie en nauwkeurigheid. Kortom, voor het ontwikkelen van een wiskundige attitude is een interactieve nabespreking waarin de leerkracht de passende houding voorleeft, noodzakelijk.

Overigens leren de kinderen door de HSA-activiteit verder nog, dat binnen de wiskunde steeds nieuwe ontdekkingen worden gedaan en dat bijvoorbeeld nog altijd wordt gezocht naar (nieuwe) bewijzen. Dit is een kant van de wiskunde die in rekenwiskundemethoden eigenlijk geen plek heeft. Door juist ook eens aandacht te besteden aan onopgeloste problemen (De Goeij, 2012) krijgen kinderen een breder beeld van de wiskunde. Ook van de wiskunde, zoals die eigenlijk 'in het echt' is.

We gaan nog even verder met de magische vierkanten, maar nu in de middenbouw. We laten zien hoe de leerkracht in een lessenserie over tovervierkanten een wiskundige attitude kan voorleven en bijsturen.

Tovervierkanten in de middenbouw

In de middenbouw maken leerlingen kennis met tovervierkanten (De Goeij & Treffers, 2004). We zoomen in op drie wiskundige attitudes, te weten:

- zelfvertrouwen tonen tijdens het oplossen van (wiskundige) problemen (algemene houding)
- het eigen denken en handelen in beschouwing nemen (reflecterende houding)
- efficiëntie nastreven (doelgerichte houding).

De leerlingen gaan op zoek naar een magisch vierkant van drie bij drie en leggen in eerste instantie de getallen 1 tot en met 9 (op kaartjes) zodanig in het vierkant dat de som van de getallen in elke rij 15 is. Ze ontdekken dat wanneer je twee rijen kloppend hebt, de derde rij ook altijd een som van 15 heeft. De leraar stimuleert een onderzoekende houding door zichzelf hardop af te vragen hoe dat nu toch kan. Die vraag is moeilijk te beantwoorden voor de kinderen. Ze hebben wel ideeën over de wijze waarop je de getallen 1 tot en met 9 bij elkaar kunt optellen. Enkele kinderen die gericht zijn op efficiëntie, stellen voor om eerst de grootste getallen uit de rij bij elkaar op te tellen. Dit brengt je sneller bij de orde van grootte van het antwoord. De leerkracht wil graag een alternatieve aanpak meegeven en nodigt de kinderen uit om de getallenrij eens te bekijken en op zoek te gaan naar een patroon. Die ontdekken

de kinderen ook; de verliefde harten² zijn namelijk verstopt in de rij: 1 en 9, 2 en 8, 3 en 7, 4 en 6. Daarmee kun je snel rekenen.

We zien een leerkracht die kinderen verantwoordelijkheid en zelfstandigheid geeft in het ontdekken van een handige manier om getallen bij elkaar op te tellen. De kinderen worden niet in het diepe gegooid, maar krijgen ook tips of een denkrichting aangereikt. Daarmee groeit hun vertrouwen in het kunnen oplossen van wiskundige problemen. Door de kinderen te vragen hoe zij hebben gedacht en hoe het sneller kan of op een manier die minder foutgevoelig is, wordt een reflecterende en doelgerichte houding gestimuleerd. De weg naar een antwoord op de vraag hoe het nu toch kan dat de laatste drie getallen altijd 15 opleveren, is nu grotendeels bewandeld. Als er twee rijen zijn gevuld, ligt er al 30 op tafel. In totaal leveren de getallen een som van 45 op, dus 15 over.

In afbeelding 5 zien we het werk van Hannah. Zij heeft een vierkant gevonden waarin elke rij een som van 15 heeft. De volgende opdracht is het vierkant zo te maken dat niet alleen de rijen, maar ook de kolommen de magische som van 15 hebben. De helft van de klas schuift alle kaartjes van het vierkant en probeert via *trial-and-error* tot een gewenst resultaat te komen. Hannah behoort tot de groep kinderen die efficiënt te werk gaan en de getallen van de rijen bij elkaar houdt. Door binnen de onderste rij getallen te verwisselen komt zij op eenvoudige wijze tot een oplossing.

8	4	3	15
1	9	5	15
7	6	2	15

8	4	3	15
1	9	5	15
6	2	7	15
15	15	15	

Afb. 5. Hannah gebruikt een efficiënte manier om tot een vierkant te komen waarin de rijen en de kolommen dezelfde magische som hebben.

Een nabespreking waarin het gesprek gaat over een handige strategie nodigt kinderen uit te reflecteren op hun eigen oplossingswijze en die te vergelijken met die van bijvoorbeeld Hannah. Het is de leerkracht die door het stellen van vragen deze reflectieve en doelgerichte houding kan stimuleren:

- Hoe ben jij gekomen tot een vierkant waarin de rijen en de kolommen een som van 15 hebben?
- Wie heeft het anders gedaan?
- Wie heeft een snelle manier gevonden?
- Wat is het voordeel van deze manier?
- Wat maakt deze manier moeilijk?

² Zie het hoofdstuk van Julie Menne.

- Wie heeft een manier gevonden om de getallen handig bij elkaar op te tellen?

Als afsluiting van de lessenserie over tovervierkanten gaan de kinderen op zoek naar het magische vierkant van drie bij drie waarin niet alleen de rijen en de kolommen een magische som van 15 kennen, maar ook de beide diagonalen. Met het verhaal van Koning Vierkant worden de kinderen meegenomen in het vinden van het getal dat in het midden van het vierkant moet liggen om aan de gestelde te eisen te voldoen. Ze ontdekken dat een aanpak van *trial-and-error* veel tijd kan kosten en dat het loont om na te denken over het effect van een extreem getal in het midden van het vierkant, bijvoorbeeld de negen. Zou die in het midden kunnen liggen? Waar laat je dan de acht? Is er een plek in het vierkant waarbij de negen en de acht niet samen op een rij, kolom of diagonaal liggen? Deze denkwijze, waarin het verhaal sturend is, neemt kinderen spelenderwijs mee in een wiskundige oplossing met efficiëntie als aandachtspunt.

Tot besluit

Als we terugkijken op de lessen rond het HSA-vierkant en de tovervierkanten kunnen we concluderen dat de leerkracht een belangrijke rol speelt in het stimuleren van een wiskundige attitude. Het belangrijkste is dat de leerkracht deze attitude zelf voorleeft. Dus bijvoorbeeld zelf nieuwsgierig is naar wiskundige inhoud, zelf doorvraagt om inzicht en begrip te vergroten, zelf op zoek gaat naar alternatieve oplossingsmanieren, zelf efficiëntie en nauwkeurigheid nastreeft, zelf wiskundetaal gebruikt en notaties/schema's/tabellen inzet om grip te krijgen op de wiskundige materie. Sommige kinderen hebben die nieuwsgierigheid al, maar anderen hebben daarin een voorbeeld nodig.

We hebben ook gezien wat de kracht is van een open probleem waarin kinderen denkrimte krijgen, ruimte voor onderzoeken en ontdekken. Daar waar kinderen vastlopen in dit proces is het de leerkracht die met een reflectie-oproepende vraag of een hint de leerling weer verder kan helpen. Maar ook medeleerlingen kunnen daarin een rol van betekenis hebben als er ruimte is voor samenwerken en samen praten over wiskunde.

In een nabespreking liggen volop kansen voor het stimuleren van een wiskundige attitude. Verwondering en nieuwsgierigheid kunnen worden geprikkeld en leerlingen leren welke vragen je kunt stellen om tot dieper inzicht te komen. Een nabespreking leent zich ook uitstekend om een doelgerichte houding aan te leren en tot niveauverhoging te komen. En dat is – in het kort – waar we naar streven in het reken-wiskundeonderwijs. Een vakgebied met volop kansen voor het ontwikkelen van 21e eeuwse vaardigheden.

Verder lezen?

De Goeij, E. (2012). In het spoor van Collatz. *Volgens Bartjens*, 32(1), 8-11.

De Goeij, E. & Treffers, A. (2004). Tovervierkanten. *Willem Bartjens*, 23(3), 28-32.

Oonk, W. & De Goeij, E. (2006). Wiskundige attitudevorming. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 25(4), 37-39.

Bijlage bij *Het stimuleren van een wiskundige attitude*

Overzicht wiskundige attitudes	
Categorieën	Sub kenmerken
Algemene houding ten aanzien van wiskunde	<ul style="list-style-type: none"> • zelfvertrouwen tonen tijdens het oplossen van (wiskundige) problemen • bijvoorbeeld durf en doorzettingsvermogen laten zien • plezier in het maken van wiskundige opgaven • zelfstandigheid en verantwoordelijkheidsgevoel • brede belangstelling • verwondering • betrokkenheid • ...
Reflecterende houding	<ul style="list-style-type: none"> • het eigen denken en handelen in beschouwing nemen • terugkijken en anticiperen op eigen en andermans (denk) activiteiten • heuristisch denken, jezelf vragen stellen • aandacht voor relativering • kritisch zijn op het gebruik van wiskunde • ...
Onderzoekende houding	<ul style="list-style-type: none"> • de wil om diepgaander te begrijpen • nieuwsgierigheid • aandacht voor objectiviteit • gericht zijn op alternatieve aanpakken • alert zijn op doodlopende paden en die durven te verlaten • aanpassingsvermogen • gericht op raadplegen van informatiebronnen • drang naar inzicht • meerdere oplossingsvarianten bedenken en toepassen • oplossingen c.q. redeneringen van anderen - medestudenten, leerlingen, experts - volgen of voortzetten • wiskunde in situaties herkennen en toepassen • wiskundetaal en wiskundige activiteiten³ gebruiken • creativiteit tonen bij het oplossen van wiskundige problemen • ...
Communicatieve houding	<ul style="list-style-type: none"> • wiskundetaal gebruiken in samenwerking met anderen • actief luisteren • gericht op informatie delen • aanpassingsvermogen • oplossingen c.q. redeneringen van anderen - medestudenten, leerlingen, experts - volgen of voortzetten • ...
Doelgerichte houding	<ul style="list-style-type: none"> • efficiëntie nastreven • gericht op nauwkeurigheid, volledigheid, structurering, eenvoud • beslistheid en consequentie • 'mooie' getallen, handige strategieën of passende referentiematen gebruiken • materialen, schema's of modellen inzetten bij het oplossen en uitleggen van de oplossingen • wiskundetaal adequaat gebruiken • ...

³ Onder wiskundige activiteiten verstaan we bijvoorbeeld structureren, generaliseren, vergelijken, ordenen, concretiseren, visualiseren en systematisch werken.