BREUKEN OP DE HELLING (1)

Martin Kindt

In het basisonderwijs worden concrete modellen gebruikt om breuken grijpbaar te maken. Voor het automatiseren van rekenregels is minder aandacht. In de wiskunde van met name het havo/vwo speelt het opereren met breuken of breukvormen een rol. Misschien is het een idee om het opfrissen en uitbouwen van breukrekenen te combineren met het begrip helling.

Vergeetboek

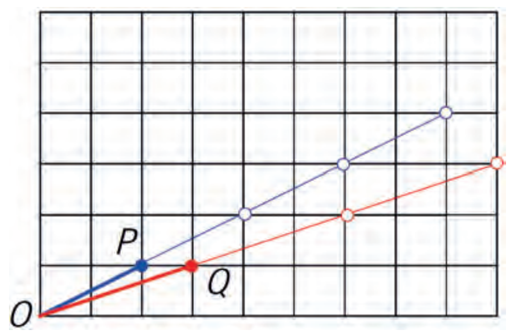
'Hoeveel is één derde plus vier zesden plus een half?' Philip Freriks stelde de vraag afgelopen zomer tijdens de televisiequiz *De slimste mens*. Geen van de drie kandidaten wist het goede antwoord. Natuurlijk, het was hoofdrekenen tegen de klok. Maar kandidaat nummer drie had toch voldoende tijd om bijvoorbeeld te beseffen dat $\frac{4}{6}$ ingeruild kan worden voor $\frac{2}{3}$?
Pierre Van Hiele schreef zo'n 40 jaar geleden:[1]

'Iedereen weet dat het met het rekenen in de basisschool niet erg goed gaat. Het optellen van ongelijknamige breuken kost veel moeite. Het vermenigvuldigen en delen van breuken wordt als een kunstje aangeleerd en het is verbijsterend hoe snel de kunstjes weer vergeten worden.'

Dat was in de tijd toen er nog uitvoerig geëxerceerd werd met breuken. Of een meer begripsmatige aanpak zoals die nu in veel basisscholenmethoden gehanteerd wordt, het vergeten tegengaat, weet ik niet. Wel weet ik dat als je de vraag van Philip stelt aan leerlingen uit groep 8 met een IQ vergelijkbaar aan dat van de drie slimste-mens-kandidaten, je wel een goed antwoord kunt verwachten. Doe je dat een jaar later, dan is de kans op een goede reactie flink kleiner. Dat was vroeger zo – ik herinner me hoe menig gymnasiast in het brugjaar vergeten was hoe je $\frac{1}{2}$ met $\frac{1}{3}$ moest vermenigvuldigen – en dat zal nog zo zijn.
In het havo/vwo-onderwijs spelen breuken een belangrijke rol: bij algebra, bij kansrekening en soms bij meetkunde. Wijlen Leen Streefland promoveerde in 1988 op het proefschrift *Realistisch Breukenonderwijs* en een van zijn stellingen luidde: 'het rekenen met breuken volgens formele regels hoort niet thuis op de basisschool, maar in de wiskunde van het vo'. Daar ben ik het hartgrondig mee eens. De consequentie is dan wel dat er in het havo/vwo veel moet gebeuren aan rekenen met breuken en breukvormen. Maar hoe pak je dat aan?

Hellingen in een rooster

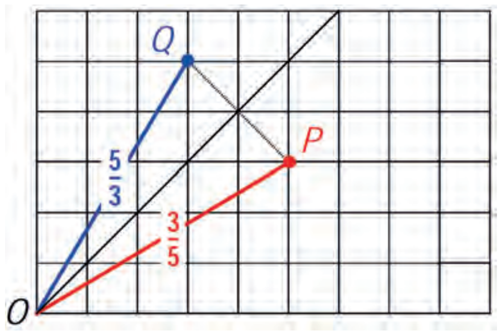
Kort geleden werd ik herinnerd aan een jaren-zeventigpakketje van het toenmalige IOWO (de vroege voorloper van het Freudenthal Instituut) bestemd voor het brugjaar van wat toen nog het lager beroepsonderwijs heette. De titel was *Procenten* en het had een remedial karakter. De auteur, Ger Jansen, was op het idee gekomen om hellingspercentages als instap te kiezen en dat bleek een prima vondst. Daaraan denkend kreeg de inval dat je het ophalen van breuken in het vo ook mooi aan hellingen zou kunnen koppelen.
Het terrein is een rooster van vierkantjes, op papier, computerscherm of op een ouderwets spijkerbord. Het rooster denk ik mij naar links en onder begrensd met als grenspunt de oorsprong *O*. Vanuit *O* kunnen de andere roosterpunten worden bereikt via schuin oplopende rechte lijnen. De roosterpunten kun je voorzien van geheeltallige coördinaten, maar dat hoeft niet meteen.
In het plaatje is duidelijk te zien dat lijn *OP* wat steiler



figuur 1

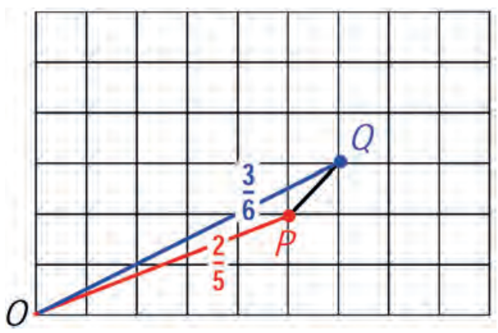
is dan lijn *OQ*. Die steilheid laat zich uitdrukken met een breuk: verticale stijging gedeeld door horizontale voortgang, of op zijn Amerikaans: *rise over run*. In de schoolboeken heette dit vroeger deftig *richtingscoëfficiënt* (soms minder deftig *rico*) maar tegenwoordig is het *hellingsgetal*. In navolging van het engelse *slope* zal ik hier de korte term *helling* gebruiken.
De hellingen van *OP* en *OQ* in het plaatje zijn dan respectievelijk $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$. Als die lijnen worden verlengd, kom je steeds nieuwe roosterpunten tegen. Maar de helling verandert natuurlijk niet. Dit illustreert:
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$ en $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \ldots$
In de tijd van de *New Math* werd gezegd: een breuk is een 'equivalentieklasse van paren gehele getallen'. Via de voorstelling met rechte lijnen uit *O* hoeven we daar niet moeilijk over te doen, je ziet het voor je!

Wat je ook ziet is dat het omkeren van een breuk overeenkomt met het spiegelen van een lijn ten opzichte van de roosterdiagonaal uit O. De diagonaal (helling 1) is zo de scheidslijn tussen de hellingen > 1 en < 1.



figuur 2

Hellingen (van lijnen uit O en in het eerste kwadrant) hebben wel een ondergrens (0), maar geen eindige bovengrens; dit kan aanleiding zijn voor een spannend klassengesprek.
Dat vermenigvuldiging van teller en noemer van een breuk met eenzelfde natuurlijk getal de helling niet doet veranderen, is al opgemerkt. Maar wat is het effect als je bij teller en noemer eenzelfde getal optelt?

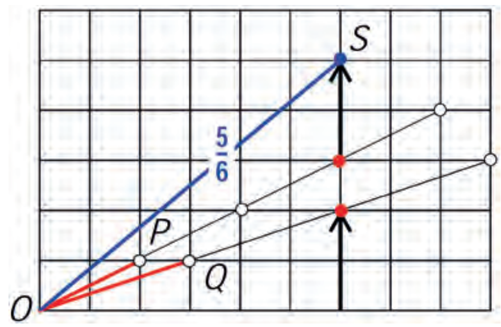


figuur 3

In de figuur is te zien wat er gebeurt als je bij teller en noemer 1 optelt. Is de breuk waar je van uitging kleiner dan 1, dan wordt de helling groter. Is de uitgangsbreuk groter dan 1, dan wordt de helling minder steil. Je kan dit eindeloos herhalen, startend met bijvoorbeeld $\frac{2}{5}$ en er ontstaat een opklimmende rij van breuken onder 1:
$\frac{2}{5} < \frac{3}{6} < \frac{4}{7} < \frac{5}{8} < \ldots$
Start je met een breuk > 1, dan komt er vanzelf een afdalende rij. Daarbij kun je ook denken aan 'omdraaien is spiegelen in de roosterdiagonaal'. Als een leerling (bij algebra bijvoorbeeld) in de fout gaat door bij (van) teller en noemer hetzelfde getal op te tellen (af te trekken), dan zetten we daar als leraar een dikke rode streep door. Maar is het dan vanuit didactisch/pedagogisch perspectief niet veel beter om na te gaan wat zo'n foutieve operatie wél doet? Het hellingmodel is hierbij blijkbaar heel illustratief.

Optellen en vermenigvuldigen van breuken

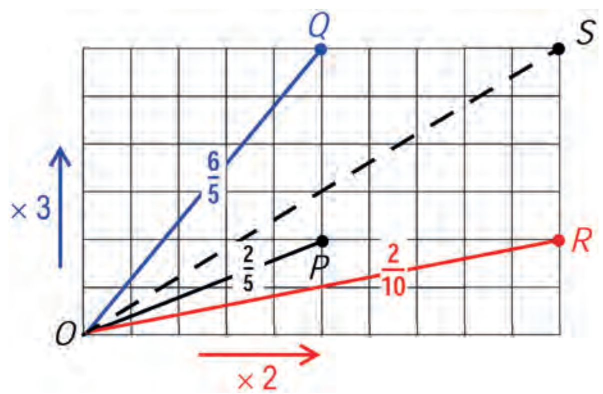
Door op lijnen met verschillende helling roosterpunten te zoeken die op eenzelfde verticaal liggen, kun je de *som van twee hellingen* bepalen, zie de volgende figuur. Helling OS = helling OP + helling OQ, ofwel $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. Dit optellen van hellingen anticipeert op het 'superponeren' van grafieken, en als ik nog veel verder vooruitkijk, op de somregel voor het differentiëren, waarbij in feite *locale hellingen* van krommen worden opgeteld.



figuur 4

Je kunt ook afspreken wat je bedoelt met bijvoorbeeld drie keer zo steil (drie keer zoveel *rise* bij gelijke *run*) of zeg een half keer zo steil (gelijke *rise* bij 2 keer zoveel *run*). Dat geeft dan bijvoorbeeld (zie figuur): $3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$ en $\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{10}(=\frac{1}{5})$.

Meetkundig komt dit respectievelijk neer op een oprekking in verticale en horizontale richting. Ook hier is er weer sprake van een vooruitlopen op operaties met grafieken zoals die later veelvuldig voorkomen.



figuur 5

Vermenigvuldigen van een helling met $\frac{3}{2}$ kan worden gezien als combinatie van een verticaal oprekken met factor 3 en een horizontaal oprekken met factor 2. In ons voorbeeld: $\frac{3}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times 2}{2\times 5}=\frac{6}{10}(=\frac{3}{5})$. De uitkomst is de helling van OS.

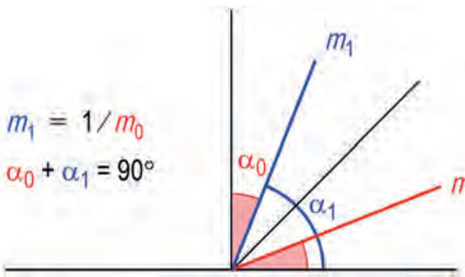
Intermezzo: een oude formule

Nota bene: optellen of verveelvoudigen van hellingen rijmt niet met dezelfde operaties op de bijpassende hellingshoeken! Zo is de som van de hellingshoeken bij de hellingen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ juist gelijk aan 45°, maar $\frac{1}{3}+\frac{1}{2} < 1$. Dit volgt uit een mooie formule-uit-de-oude-doos.

Als m de helling is die hoort bij de som van de hellingshoeken

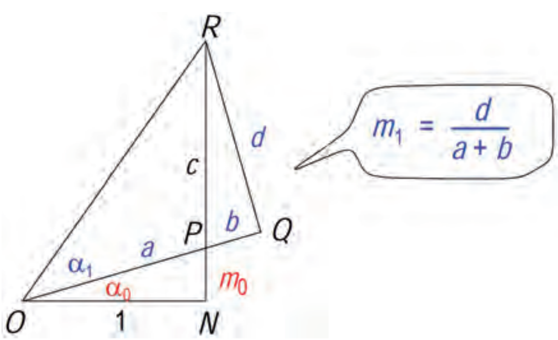
van lijnen met helling m_0 en m_1, dan: $m = \dfrac{m_0 + m_1}{1-m_0 m_1}$.

Toegepast op $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ komt er: $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$. Een goede oefening in breukrekenen, zeker. Maar wie kent die formule nog? Zou ik die formule (bijvoorbeeld in 3 of 4 vwo) van stal durven halen? Daar is toch pittige gonio voor nodig, somformules voor sin, cos en tan en dat gaat toch veel te ver...? Of kan het ook anders? Van Pólya heb ik de attitude meegekregen dat je bij een nieuwe formule eerst kunt kijken naar uiterlijke kenmerken en randgevallen. Zo'n uiterlijk kenmerk is hier de symmetrie in m_0 en m_1 en dat stemt uiteraard tevreden. De randgevallen vind je bij het nul worden van teller of noemer. Als m_0 en m_1 tegengesteld zijn (in een derde klas zijn de leerlingen allang vertrouwd met negatieve hellingen) zijn de bijbehorende hellingshoeken samen 180° (of als met gerichte hoeken wordt gewerkt 0°) en dat betekent hoe dan ook $m = 0$. Dit stemt overeen met de formule. Het tweede randgeval krijg ik als $m_0 m_1 = 1$, dus als de hellingen elkaars omgekeerde zijn en de lijnen elkaars spiegelbeeld in de roosterdiagonaal zijn.



figuur 6

De som van de hellingshoeken α_0 en α_1 is in dit geval 90°. En ja, dat correspondeert met het nul worden van de noemer in de formule! Nu een afleiding van de formule zonder gonio.



figuur 7

De gelijkvormigheid van de *rechthoekige* driehoeken *ONP* en *RQP* leidt naar evenredigheidstabel:

c	b	$d = m_1(a+b)$
a	m_0	1

figuur 8

Kruislings vermenigvuldigen geeft:

(1) $ab = m_0 c$

(2) $c = ad = am_1(a + b)$

Ik wil nu c uitdrukken in alleen m_0 en m_1 om dan de helling ($= c + m_0$) bij $\alpha_0 + \alpha_1$ te vinden. Er geldt: $c = am_1(a + b) = a^2 m_1 + abm_1$. Rekening houdend (Pythagoras) met $a^2 = 1 + m_0^{\,2}$ en ook met $ab = m_0 c$ komt er

$c = (1 + m_0^{\,2})\, m_1 + m_0 c m_1$. Hieruit volgt: $c = \dfrac{m_1(1+m_0^2)}{1-m_0 m_1}$.

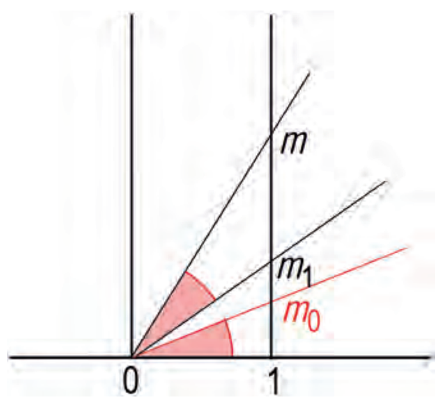
De bij α_0 en α_1 passende helling h is dus gelijk aan

$$m_0 + \frac{m_1(1+m_0^2)}{1-m_0 m_1} = \frac{m_0 + m_1}{1-m_0 m_1}.$$

Een bewijs steunend op elementaire middelen, maar niet wat je noemt 'een eitje'. Je zou de leerling er via een serie subvraagjes doorheen kunnen loodsen – een niet ongewone aanpak in onze schoolboeken – maar daar zou ik niet voor kiezen. Een klassengesprek met een hardop denkende, vragende en uitdagende leraar lijkt me een stuk beter. Misschien zou ik liever eerst naar het verschil van twee hoeken kijken, de figuur is hetzelfde, maar het idee wat natuurlijker en dan via de substitutie $m_1 \to -m_1$ bij de somformule uitkomen.

Achtergrond

Mijn sympathie voor de formule heeft vooral te maken met mijn fascinatie voor projectieve meetkunde. De structuur van de formule – gebroken lineair in elk van de twee variabelen m_0 en m_1 – is namelijk op voorhand duidelijk als je aan centrale projectie en het behoud van dubbelverhoudingen denkt. Voor de liefhebber zal ik dat hier nader toelichten. Beschouw m_0 en α_0 als vast en m_1 en α_1 als variabel. Het vergroten van de hellingshoek van een lijn door O met α_0 komt neer op het draaien van de waaier van lijnen door O over hoek α_0.



figuur 9

De lijnenwaaier O snijdt de lijn $x = 1$ in een puntenreeks. De rotatie van de waaier correspondeert met een transformatie van die puntenreeks, ofwel met een reële functie $m_1 \rightarrow f(m_1)$. Omdat de rotatie dubbelverhoudingen van 'vierstralen' invariant laat, doet f dit met (geordende) puntenviertallen en dat betekent: $f(m_1) = \dfrac{Am_1 + B}{Cm_1 + D}$ voor zekere reële A, B, C en D.

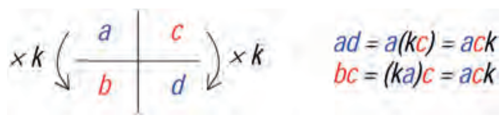
Nu weet ik bij voorbaat dat de teller van de gebroken vorm nul is voor $m_1 = -m_0$ en dat de noemer nul is voor $m_1 = 1/m_0$. Daaruit volgt direct $B = Am_0$ en $C = -Dm_0$.

Kortom: $f(m_1) = \dfrac{Am_1 + Am_0}{-Dm_0m_1 + D} = \dfrac{A}{D} \cdot \dfrac{m_0 + m_1}{1 - m_0m_1}$.

Uit $f(0) = m_0$ volgt dan $A = D$ en de formule is een feit.

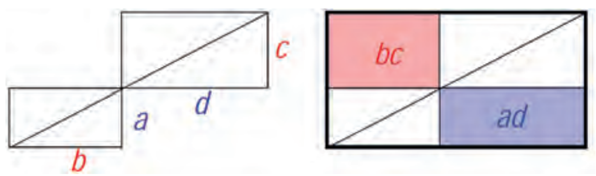
Kruislings vermenigvuldigen

In de afgelopen herfstvakantie kregen mijn vrouw en ik een viertal kleinkinderen te logeren. Magali, inmiddels in 3 gymnasium, had voor de aardigheid haar wiskundeboek[2] meegenomen. 'Volgende week repetitie, opa, ik heb er nog niks aan gedaan, zullen we samen even kijken?' Het hoofdstuk heet *Gelijkvormigheid*. Alle ingrediënten voor mijn eerste bewijs van de helling-bij-hoekensomformule zijn hier terug te vinden. Evenredigheidstabel, kruisproducten, gelijkvormige driehoeken, Pythagoras, hellinggetal en -hoek. Maar voor het verband tussen de laatste twee wordt een black box gebruikt, de toetsen tan en $\tan^{-1}$ op het rekenmachientje. 'Dan moet je die hoek vermenigvuldigen met tan…', aldus Magali. Het lijkt wel een kookboek met recepten; zó moet je dat doen, nadenken hoeft niet. Is dit wiskunde? Nee toch!
Maar goed (dus eigenlijk niet goed), het hoofdstuk start met kruislings vermenigvuldigen. Via een paar twee-bij-twee-evenredigheidstabelletjes wordt geconstateerd dat de kruisproducten gelijk zijn en pats, dan direct algemeen, een tabel met *a, b, c* en *d*. Zonder een spoor van afleiding of bewijs. Die evenredigheidstabel is niet zo gek, maar waarom niet een met veel vakjes waarin dan een heleboel kruisproducten kunnen worden vergeleken? Dat leidt tot een vermoeden en vervolgens kan de evenredigheidsconstante ingezet worden om te snappen waarom dat klopt. Een generalisatie is dan al aardig dichtbij, en er kan worden geformaliseerd:



figuur 10

Zo moeilijk kan dat niet zijn. Maar voor Magali had ik een ander bewijs in petto:

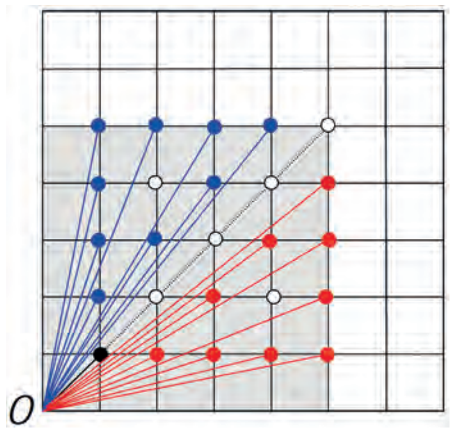


figuur 11

Gelijke breuken, gelijke hellingen. De diagonalen van de rechthoekjes in het linkerplaatje liggen in elkaars verlengde. Even inlijsten en zien dat de diagonaal drie rechthoeken in gelijke delen verdeelt, zodat voor de rode en de blauwe rechthoek dezelfde oppervlakte overblijft. Aanschouwelijker kan het niet: *quotiënten* als hellingen, *producten* als oppervlakten. Heeft u nu ook een visioen over differentiëren en integreren?

Zichtbaar is onvereenvoudigbaar

Terug naar de brugklas. Op alle roosterpunten kunnen identieke paaltjes (als spijkers op een spijkerbord) worden gedacht. Welke paaltjes zijn te zien met één oog vanuit de oorsprong? Als ik langs de lijn met helling $\frac{1}{2}$ kijk is alleen het punt (2,1) te zien. De andere punten (4,2), (6,3), ... worden aan het zicht onttrokken. Al gauw is het helder dat de vanuit *O* zichtbare punten corresponderen met paren onderling ondeelbare coördinaten ofwel met *onvereenvoudigbare breuken*. In de figuur zijn de zichtbare punten getekend binnen een vierkant met zijde 5 (en niet op de assen).



figuur 12

Een opdracht kan nu zijn om de bijpassende breuken die kleiner zijn dan 1 op te schrijven in opklimmende grootte. Het resultaat is: $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$.

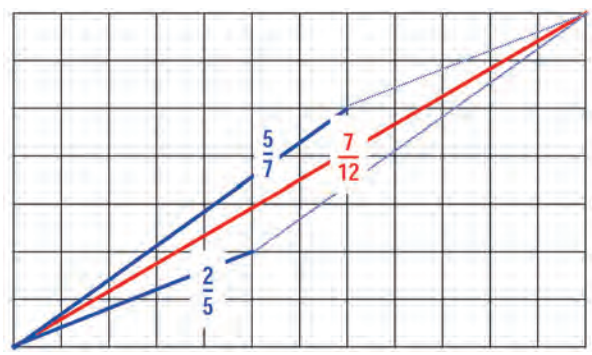
Dit is een rijtje dat in de getaltheorie bekend staat als een Farey-reeks. Die reeks heeft twee bijzonderheden.

De eerste is dat het verschil tussen elke twee buren een stambreuk (breuk met teller 1) is).

Bijvoorbeeld: $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$ en $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$.

De tweede is dat als je de tellers en de noemers van twee breuken met een gemeenschappelijke buur optelt, je een breuk krijgt die gelijkwaardig is met de tussenbuur.

Bijvoorbeeld: $\frac{1+2}{4+5}=\frac{1}{3}$ en $\frac{3+3}{5+4}=\frac{2}{3}$. Dit kan gemakkelijk voor alle voorkomende gevallen worden gecheckt, oefenen met een direct doel! Het geldt trouwens algemeen: als je van twee (positieve) breuken zowel de tellers als de noemers bij elkaar optelt, dan krijg je een zogenaamde 'tussenbreuk'. Kijk naar de hellingen:



figuur 13

Het simultaan optellen van tellers en noemers komt overeen met de bekende vectoroptelling. En dat dit een tussenbreuk oplevert, bevreemdt dan niet. Startend met $0=\frac{0}{1}$ en $1=\frac{1}{1}$ kunnen via deze operatie stap voor stap alle breuken tussen 0 en 1 worden voortgebracht. Maar dat bewaar ik voor het vervolg op dit artikel.

Noten

[1] Van Hiele, P. M. (1973). *Begrip en Inzicht*. Muuses.

[2] *Getal en Ruimte*, deel 3 vwo, laatste editie.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar; ook na zijn pensioen is hij nog medewerker van het Freudenthal Instituut.

E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*