HET METEN VAN DUBBELZINNIGHEID

Rede uitgesproken door

GUNTHER CORNELISSEN

bij aanvaarding van het amt van profileringshoogleraar 'Mathematische fysica',

werkzaam op het grensgebied van mathematische fysica en aritmetische meetkunde,

aan de Universiteit Utrecht

op 16 januari 2009

Gunther Cornelissen
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80.010
3508 TA Utrecht
Nederland
gunther.cornelissen@gmail.com

COLOFON
Door de auteur met XeLaTeX gezet in Sabon en Myriad Pro op Mac OSX
Partituren gezet door Derk Pik.
Illustratie voorblad door Bill Casselman voor de cover van de *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 52 (2005), horende bij een artikel van Fumiharu Kato met de auteur.

"Ik heb de afgelopen tijd vooral nagedacht over de toepassing van transcendente analyse op de theorie der dubbelzinnigheid."

- Évariste Galois, 1832[1]

Mijnheer de Rector Magnificus,
Zeer gewaardeerde toehoorders,

Dit gedicht heet:

Huishoudelijke vergissing

Vanmorgen kwam hij weer,
mijn ontrouwe vriend,
het lege blad.

Ik zit tegen hem aangeleund,
en wij bewachten samen de stilte.

Ondertussen staat in de keuken het leven
aan te branden.

Dames en Heren,

Deze zinnen kunnen slaan op verschillende activiteiten, zoals wiskunde, filosofie, dichten of componeren: het lege blad kan worden gevuld met formules, wijsheid, dichtregels of notenbalken. Al deze creatieve bezigheden hebben iets gemeen: het lijkt, althans volgens een wijd verbreide mening, alsof je je tijd aan het verdoen bent. Volgens wiskundige grootheid ALAIN CONNES (1947-) wordt de beste wiskunde gedaan liggend op een bank in het halfduister.[2] Dit romantische beeld past niet bij de dagelijkse realiteit van email, studentenbegeleiding, onderwijs, schrijven, besturen en vergaderen, maar het wijst wel naar de kern van het vak: nadenken.

Wie holt achter wie aan?

Vandaag wil ik het met U hebben over één van dit soort tijdsverspillingen. Natuurlijk vind ik het geen tijdsverspilling, maar U misschien wel, en natuurlijk *is* het ook geen tijdsverspilling. Laat me nogmaals het gebruikelijke bewijs geven: in het hart van de computer, Google, medische scans, veilig mobiel telefoneren, GPS en het spoorboekje bevindt zich moderne wiskunde.[3]

Maar in de achterliggende, onzichtbare wiskunde geven wij dit oude, *verborgen* namen, zoals recursietheorie, lineaire algebra, Radontransformatie, elliptische kromme en grafentheorie. Die theorieën zijn ècht niet bedacht om te worden toegepast; en ik verwacht niet dat U ze kent. Stiekem vind ik het zelfs onbevredigend dat zuivere wiskunde zich in dit tijdsgewricht moet rechthouden met het argument van de onverwachte toepassing. Om mijn wiskundig idool[4] YURI MANIN (1937-) te citeren: 'Er schuilt een inherente zwakheid in de poging je interesses te verantwoorden door te zeggen dat ze toepasbaar zijn. Toepasbaar is een woord voor ingenieurs.'[5]

De afstand van zuivere wiskunde tot haar toepassing is groot. Daarmee bedoel ik niet zozeer in tijd. Ik bedoel dat de afstand groot is in zichtbaarheid. Zuivere wiskunde werkt echter omdat het *niet* met de toepassing samenvalt en er vaak op grote afstand uit voortkomt.

De maatschappij loopt werkelijk achter op de zuivere wetenschap, behalve dan natuurlijk op het soort wetenschap dat achter de maatschappij aanholt.

Ik weet niet of U persoonlijk het soort wiskunde waar ik het over wil hebben belangrijk vindt. Waarschijnlijk staat U hier algeheel neutraal tegenover, want het staat ver van uw bed - althans dat denkt U; alhoewel ik U hopelijk heb laten zien dat het eigenlijk onzichtbaar naast uw bed staat, bijvoorbeeld in de mobiele telefoon op uw nachtkastje.

Als de wiskundige op de bank ligt, zijn zijn of haar gedachten vrij en wild. Ik wil graag deze passie met U delen. Maar de afstand hindert mij daaraan. Wiskunde heeft een taalverdichting ondergaan die effectieve communicatie pas toestaat na jarenlange studie. Zonder deze taal van verdichte wiskundige symbolen kan wiskunde niet werken, maar precies daardoor creëert zij afstand.

Voor wiskunde is relevantie gekoppeld aan distantie: het afstand nemen en abstraheren. Met wiskunde en andere activiteiten die hoofdzakelijk uit Oblomoviaans op de bank liggen bestaan, wil ik hier *afstand nemen* propageren.

Laat ons nu dan wiskunde doen. Laat de buitenwereld even in de keuken aanbranden.

Dubbelzinnigheid in de wiskunde

We komen aldus aan bij de titel van deze lezing - 'het meten van dubbelzinnigheid'.

Het leven zit vol ambiguïteit. Omdat dit een wiskunde-oratie is, kunt U zich wel voorstellen dat mij hierbij iets heel anders voor ogen staat dan uzelf in gedachten heeft. Om meteen alle twijfel weg te nemen en mezelf als vakidioot te ontmaskeren: ik zal U vier voorbeelden geven van dubbelzinnigheid in de wiskunde.

Het **eerste voorbeeld** komt uit de algebra. De vierkantswortel uit vijftien is een getal waarvan het kwadraat 15 is. Maar daar zijn er twee van. Als ik 'vierkantswortel vijftien' ($\sqrt{15}$) de ene noem, dan is de andere 'min vierkantswortel vijftien' ($-\sqrt{15}$). Immers, -1 maal -1 is 1. Hoe kan ik deze twee vierkantswortels onderscheiden? Gelukkig zijn het kommagetallen, en dus kan ik zeggen dat de ene positief, en de andere negatief is. En daarom mag ik dan van 'de' vierkantswortel praten, als naam voor de positieve wortel, zoals ik trouwens zonet al stiekem deed.

Maar nu proberen we hetzelfde in een weinig verschillend geval. De vierkantswortel uit -15 is een getal waarvan het kwadraat -15 is. Gaat U alstublieft niet het bestaan van dit getal in twijfel trekken, het bestaat al eeuwenlang. Ik noem het even w, van "wortel". Maar dan is er een tweede vierkantwortel uit -15, namelijk $-$w. Hoe kan ik die wortels onderscheiden? Het antwoord is dat ik dat niet kan. Pas als ik de ene heb gemeten, dat wil zeggen een naam heb gegeven, dan ken ik de andere ook precies.

Vergelijk: in de huidige interpretatie van de theorie van waarneming in de kwantummechanica pint een meting zèlf de waarde van het gemetene vast.

Dingen vallen pas op hun plaats als ze een naam hebben gekregen. 'Als dit 'w' is, dan is dat '-w''.

Met deze onvermijdelijke dubbelzinnigheid leven heet 'Galoistheorie'. Of, om het onderwerp wat meer recht te doen: een theorie die precies *meet hoe dubbelzinning de situatie is*. Dankzij Galoistheorie kan ik beweren dat de oplossingen van $X^4 = 15$ in preciese zin drie keer minder dubbelzinnig zijn dan die van $X^4 - X = 15$. [6]

De oplossingen van $X^4 - X = 15$ zijn

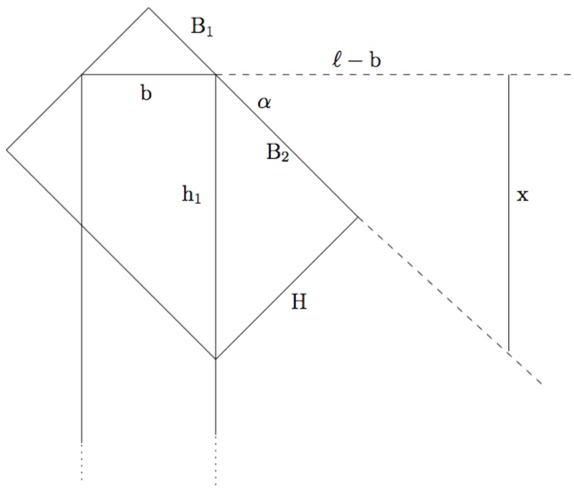
$$-\frac{1}{2}\sqrt{-20\sqrt[3]{\frac{2}{\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{20\sqrt[3]{\frac{2}{\alpha}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha} \pm \frac{2}{\sqrt{-20\sqrt[3]{\frac{2}{\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha}}}},$$

met $\alpha = 1 + \sqrt{32001}$ en alle vier de combinaties van keuzes van tekens voor de symbolen $\pm$.

Het lijkt in eerste instantie misschien vreemd dat er een kwantitatief verschil is tussen deze twee vergelijkingen, omdat ze allebei vier oplossingen hebben. Het cruciale nieuwe idee van Galoistheorie is dat het aantal oplossingen minder belangrijk is dan het verschil in vrijheid bij het geven van namen aan die oplossingen.

ÉVARISTE GALOIS (1811-1832), de wiskundige waarnaar deze theorie is vernoemd, overleed in een duel. In de beroemde 'laatste brief', geschreven de avond voor zijn dood, stelde hij al: 'Ik heb de afgelopen tijd vooral nagedacht over de toepassing van transcendente analyse op de theorie der dubbelzinnigheid.' Dit is het motto van de lezing van vandaag.

Er moet mij in verband met polynoomvergelijkingen oplossen nog een anecdote van het hart, die ik vaak op het algebra-college vertel. Mijn schoonvader wilde zelf een draaihek maken. Dat bestond uit een lange metalen horizontale slagboom, vastgelast aan een verticale holle buis. Die holle buis op zijn beurt moest over een ronde pilaar worden geschoven die in de grond was geplaatst, om aldus het draaien van de slagboom mogelijk te maken. Het probleem is dat er speling in de constructie zat: de buis was te ruim voor de pilaar, en ging daar dus scheef op hangen. Daardoor zou de verticale boom van het draaihek aan het verder gelegen uiteinde lager komen te hangen. De vraag is: hoeveel lager? Met alle cijfers in de hand kwamen wij snel op een vierdegraadsvergelijking, die vervolgens per internet en computer exact werd opgelost. Het antwoord: 5,9 centimeter. Bij het avondeten wordt trots de oplossing gemeld. Waarop mijn zwager opmerkt dat 'dit ongeveer dat en zus en zo, dus het antwoord is ongeveer 6 centimeter'.



Gegeven zijn b (breedte van de pilaar), B en H (breedte en lengte van de holle buis) en ℓ (lengte van de slagboom). Gevraagd is x (daling aan de andere kant van de slagboom). Met de notaties van de figuur geldt:

$$x = (\ell - b)\tan\alpha; \sin\alpha = \frac{B_2}{h_1}; \cos\alpha = \frac{B_1}{b} = \frac{H}{h_1}; B_1 + B_2 = B$$

We vinden dat $X = \cos\alpha$ voldoet aan

$$b^2X^4 - 2bBX^3 + (B^2 + H^2)X^2 - H^2 = 0,$$

en dan is een oplossing $x = (\ell - b)\sqrt{1 - X^2}/X$. De benadering van mijn zwager is $b = 0$ en dan is $x = B\ell/H$.

Schematische weergave van het probleem van de zakkende slagboom

Ik gebruik dit voorbeeld graag om te illustreren wat voor wiskunde ik doe. Bij het soort wiskunde waar ik het vandaag over heb, gaat het om de theorie; de algebra van de eerste oplossing. De tweede, het schattend rekenen, deugt niet voor het zien van een algemene theorie over het oplossen van vergelijkingen. De theorie heeft distantie en universaliteit die *later* een toepassing vindt.

Deze dure woorden gebruik ik natuurlijk enkel om het schaamrood op onze kaken te verbergen toen mijn zwager in tien seconden een juiste benadering had gevonden. Hij deed trouwens alsof de binnenste pilaar geen dikte had, en dan zijn congruente driehoeken voldoende voor een oplossing.

Het **tweede voorbeeld** van dubbelzinnigheid is meetkundig. Stelt U zich een cirkel voor. Kijk bijvoorbeeld naar de sterren op de Europese vlag die hier boven achter mij hangt. Als ik deze vlag met de verkeerde kant aan de vlaggenstok bevestig, dan ziet U geen verschil. Hoe ik de vlag moet ophangen is dubbelzinnig. (Behalve dan dat er aan de ene kant van de vlag wel haakjes zijn om hem aan de vlaggenstok te bevestigen en aan de andere kant niet, maar het gaat me weer om de theorie.)

De doorgestreepte Europese vlag

Stel ik teken in het middel van de vlag een vertikale lijn, dan liggen de sterretjes gespiegeld ten opzichte van deze lijn. Ik kan wel één kant als 'links' zien en de andere als 'rechts', maar als ik de vlag omdraai, creëer ik weer dubbelzinnigheid, nu tussen links en rechts.

De sterretjes vervang ik door een cirkel. T.o.v. de vertikale lijn komen de punten van de cirkel nu in paren. Als we deze situatie algebraïsch beschrijven en coördinaten kiezen waarin de verticale lijn de y-as is, de x-as hier loodrecht op staat door het middelpunt van de cirkel, en de cirkel straal 4 heeft, dan liggen boven het punt op de y-as met y-coördinaat 1 precies de twee punten met x-coördinaat $\sqrt{15}$ en $-\sqrt{15}$. Dus dit tweede voorbeeld is eigenlijk het eerste voorbeeld, maar in meetkundige vermomming.

Het **derde voorbeeld** komt uit de mathematische fysica. In veel berekeningen in de theorie van elementaire deeltjes is het nodig te *renormaliseren*. Dit is een natuurkundig rekenrecept dat op verschillende manieren kan worden uitgevoerd, maar de uiteindelijke berekende 'constanten der natuur' moeten natuurlijk onafhankelijk zijn van de gekozen methode. Daar zit een Galoisgroep achter, door Pierre Cartier (1932-) de 'Kosmische Galoisgroep' genoemd.[7] Weerom kan ik kwantitatieve uitspraken doen: een vierdimensionale veldentheorie met een derdegraadspotentiaal (ook bekend als een ϕ_4^3) is wel ambigu, maar oneindig veel minder ambigu dan een driedimensionale theorie met zesdegraadspotentiaal (ϕ_3^6).[8] De Galoisgroepen zijn hier soms oneindig groot, maar daardoor laat de wiskundige zich niet afschrikken.

Voor het **vierde voorbeeld** zet ik hier op het podium twee schermen neer, en plaats daarachter twee trommelaars, onzichtbaar voor het publiek. Ieder van hen speelt op een trommel, die evenwel niet de gebruikelijke ronde vorm hoeft te hebben: het zou ook een driehoek, ster, of wolkje kunnen zijn. Kunt U dan horen of deze twee trommels dezelfde vorm hebben of niet?

In 1910 gaf de Nederlandse natuurkundige Hendrik Lorentz (1853-1928) een lezing in Göttingen, toen het Mekka van de wiskunde.[9]

Een kort terzijde. De lezing werd mogelijk gemaakt door het legaat van Paul Friedrich Wolfskehl (1856-1906), die 100.000 Duitse Mark ter beschikking stelde aan het wiskundig instituut te Göttingen, om te worden uitgereikt voor de oplossing van de Laatste Stelling van Fermat; maar zolang deze oplossing er niet was, mocht een deel van de rente worden gebruikt om een jaarlijkse lezingenreeks mee te bekostigen. Met moet nu bedenken dat de Wolfskehl-lezing van Lorentz aan de wieg stond van de ontwikkeling van de theorie van integraalkernen, en hiermee de inhoud van bijna het hele eerste volume van het klassieke werk van Richard Courant (1888-1972) en David Hilbert (1862-1943) getiteld *Methoden der*

Mathematischen Physik. Het ontstaan van deze tak van mathematische fysica is dus te danken aan het *niet* oplossen van het getaltheoretische probleem van Fermat. Misschien is dit wel de betekenis van de naamgeving van mijn leerstoel, die het verband tussen fysica en getaltheorie behelst.

Lorentz stelde de vraag of het mogelijk is door luisteren naar een trommel zijn oppervlakte te berekenen. Het antwoord blijkt 'ja' te zijn. De paus van de Göttingse wiskunde, David Hilbert, die bij de lezing aanwezig was, zei dat hij het antwoord op deze vraag niet meer tijdens zijn leven zou vernemen. Het vermoeden van Hilbert was fout: hij leefde tot in de jaren 1940 en zijn briljante student HERMANN WEYL (1885-1955), die ook in het publiek zat, loste het probleem een jaar later op, in 1911.[10]

Bij al deze turbulente ontwikkelingen wordt vaak vergeten dat een promovenda van Lorentz, JOHANNA REUDLER (1879-??), in haar prachtige proefschrift 'Over de zwarte straling in ruimten van verschillenden vorm' het vermoeden verifieerde voor cirkels, rechthoeken, bollen, parallelepipeda en cilinders.[11] De enige verwijzing naar 'Fräulein Reudler' staat in een voetnoot van het artikel van Weyl, en de al vermelde lezing van Lorentz laat haar anoniem.[12]

In de jaren 1990 construeerden CAROLYN GORDON, DAVID WEBB EN SCOTT WOLPERT de eerste voorbeelden van trommels die er niet hetzelfde uitzien, maar toch hetzelfde klinken.[13] Hier betekent 'hetzelfde klinken', 'hetzelfde Laplace-spectrum hebben' (PIERRE-SIMON, MARQUIS DE LAPLACE (1749-1827)).[14] Een recente studie van KOEN THAS (1977-) en zijn medewerkers laat zien dat alle bekende dubbelzinnigheden tussen de vormen van dergelijke trommels verklaard worden vanuit de symmetriegroepen van bepaalde soorten meetkundes, genaamd *Galoismeetkundes*.[15]

Zo zijn we weer, via het tweede voorbeeld, aangekomen bij het eerste voorbeeld.

Samenvattend. We hebben nu vier voorbeelden van dubbelzinnigheid: polynoomvergelijkingen oplossen en worteltrekken, symmetrie in figuren, invariantie in renormalisatie en het trommelvormen-probleem. Steeds is een soort Galoistheorie verantwoordelijk voor ons begrip van de situatie, of liever gezegd: het meten van ons onbegrip van de situatie.

Deze voorbeelden lopen ook dwars door de zogenaamde grenzen tussen algebra, getaltheorie, meetkunde, analyse en mathematische fysica. FRANS OORT gaf ooit een lezing als titel 'Algebra of meetkunde?' (met vraagteken), en gaf hierop het antwoord 'Algebra en meetkunde!' (met uitroepteken). Ik zou nog verder gaan en JEAN DIEUDONNÉ (1906-1992) willen citeren: 'Het zou absurd zijn en tegen de geest zelf van onze wetenschap ingaan om haar te willen opdelen in rigide delen, op de wijze van de traditionele verdeling in algebra, analyse, meetkunde, etc. die heden ten dage compleet stukloopt.'[16]

Het dubbelzinnige verleden

Voor ik verder inga op muziek maken met wiskunde, grijp ik de eerste twee voorbeelden aan om U wat te vertellen over mijn eigen onderzoek van de afgelopen tien jaar. Wie mij kent weet dat ik in de wiskunde graag van de hak op de tak spring, wat ik zelf (zie het citaat van Dieudonné) als pluspunt ervaar. Dus zal ik proberen in deze potpourri een lijn te vinden.

Expliciete Galoistheorie in hyperbolische meetkunde. In het eerste voorbeeld ging het om de dubbelzinnigheid die bestaat tussen de oplossingen van polynoomvergelijkingen. We weten van verrassend weinig polynomen wat de dubbelzinnigheid tussen de oplossingen precies is. In zekere zin hebben we weliswaar een wiskundige theorie over het meten van deze dubbelzinnigheid, maar het concreet bepalen daarvan, in technische termen, het berekenen van de Galoisgroep, is veel moeilijker. Wiskundigen zijn notoir lui als het om rekenen gaat.[17] Zo is trouwens ook de (eindige) Galoistheorie van de superrenormalizeerbare veldentheorie ϕ_4^3 nooit berekend, alhoewel in principe bekend is hoe dat zou moeten. Hier hebben de natuurkundigen klaarblijkelijk, uitzonderlijk, de rekenluiheid van de wiskundigen overgenomen.

Ik ben mijn carrière begonnen met het overwinnen van deze luiheid, namelijk: met het berekenen van Galoisgroepen in de theorie van modulaire vormen. De achtergrond vormt het werk van Issai Schur (1875-1941) aan de Galoisgroepen van klassieke orthogonale polynomen:[18] ze zijn, in mooie traditionele terminologie, *zonder emotie* ('ohne Affekt').

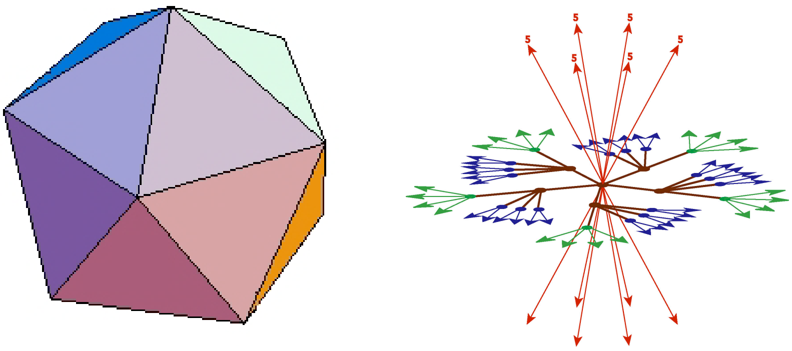
Ik heb laten zien[19] dat precies dezelfde dubbelzinnigheid optreedt in de hyperbolische meetkunde, namelijk voor de verzameling nulpunten van Eisenstein-reeksen op de modulaire kromme.[20] De moraal is dat Eisensteinreeksen misschien wel een soort orthogonale polynomen zijn in het hyperbolische vlak. Dit is ongeveer tegelijkertijd op een andere wijze in werk van Masanobu Kaneko en Don Zagier (1951-) naar boven gehaald uit ongepubliceerd werk van (Arthur) Oliver (Lonsdale) Atkin (1925-2008), een grote naam in de wereld van modulaire vormen, die helaas zopas op drieëntachtigjarige leeftijd is overleden.[21]

Vervorming van symmetrie. In het tweede voorbeeld ging het om dubbelzinnigheid in de meetkunde, die te wijten is aan symmetrieën, zoals in de Europese vlag. In het geval van mijn eigen onderzoek gaat het om het bestuderen van de vervormingen ('deformaties') van objecten die eventuele symmetrieën van het object behouden. Zo is de vlag symmetrisch onder het verwisselen van linker- en rechterkant.

In een jarenlang project met Fumiharu Kato (1968-), Ariane Mézard (1974-) en Jakub Byszewski (1984-) heb ik onderzocht wat de structuur is van de 'deformatieruimte' van krommen met symmetrieën.[22]

Niet-archimedische platonische lichamen. De meeste symmetrie ter wereld ligt verborgen in de zogenaamde platonische lichamen: de regelmatige convexe 4-, 6-, 8-, 12- en 20-vlakken tetraëder, kubus, octaëder, icosaëder, dodecaëder.[23] Het zijn de wonderen van onze gewone alledaagse meetkunde. Men kan nu de vraag stellen of er zoiets als platonische lichamen bestaat in andere meetkundes. Deze vraag heb ik beantwoord in werk met Kato en Aristides Kontogeorgis (1972-) voor *niet-archimedische meetkunde*. Die is anders dan waar U in de huis-, tuin- en keukenomgeving aan gewend bent, maar het is een natuurlijke manier om het klassieke 'meten' met reële getallen door te trekken naar andere gebieden: een getal is in dit soort meetkunde klein als het door een hoge macht van een gegeven priemgetal deelbaar is.

De verrassende fysische relevantie kwam o.a. met de berekening van de partitiefunctie van de Polyakovsnaar door Manin,[24] en nu ook in het werk van Maxim Kontsevich (1964-) en Yan Soibelman aan spiegelsymmetrie.[25] Manin illustreert het verband tussen priemgetallen-meetkunde en fysica met volgende gelijkheid: het product van de uitdrukking '1 min het inverse kwadraat' over alle priemgetallen is gelijk aan $6/\pi^2$. De linkerkant van deze gelijkheid is getaltheorie, en de rechterkant is 'fysisch', of 'analytisch'.



Een 'normale' en een '2-adische' icosaëder (gemaakt door F. Kato)

Ons werk konden we gebruiken als 'chemische' bouwstenen voor het beantwoorden van de vraag wat voor symmetrieën er überhaupt mogelijk zijn in de niet-archimedische meetkunde.[26]

Aantoonbare onmogelijkheid Tenslotte wil ik nog kort ingaan op mijn onderzoek naar 'aantoonbare onmogelijkheid'. Het is een sterk punt van de wiskunde dat zij haar eigen grenzen kent: ze weet soms heel precies, op meetbare wijze, duidelijk te maken wat ze zelf niet kan.

De dubbelzinnigheid waarover ik het hier heb is de onvolledigheidsstelling van Kurt Gödel (1906-1978).

Yuri Matijasevich (1947-) gaf volgende versie van deze stelling: er bestaat een *spel*, zoiets als schaken, of kaartspelen, tussen uzelf en een andere speler, zodat U bij iedere zet van de andere speler een winnende strategie heeft, maar zodat die strategie niet door een computer kan worden berekend. Kortom: winnen is aantoonbaar altijd mogelijk, maar evenzeer is het aantoonbaar onmogelijk de oplossing te berekenen.[27] Als U in deze formulering 'spel' door 'wiskunde' vervangt, en 'berekenen' door 'bewijzen', komt U in de buurt van de Stelling van Gödel.

Men kan wiskundig meten hoe onmogelijk iets is. De vraag hoe onmogelijk het is diophantische vergelijkingen op te lossen heb ik met Karim Zahidi (1972-), Thanases Pheidas en Sasha Shlapentokh onderzocht via de onzichtbare elliptische krommen uit uw mobiele telefoon.[28] Het is een kwantificatie van de onbeslisbaarheid bij Gödel; dit is waarschijnlijk de formulering die hij zelf later voor zijn onvolledigheiddstellingen zou hebben gekozen, zie een ongepubliceerd manuscript van zijn hand uit de jaren 1930.[29]

Conclusie. Samenvattend, en terugkijkend naar de afgelopen jaren, zie ik het volgende patroon te voorschijn komen.

In de wiskunde hebben wij in de twintigste eeuw geleerd uit de nood een deugd te maken, door dubbelzinnigheid, en onze onwetendheid of onkunde om iets te kunnen meten, zèlf te kwantificeren, en op die manier de grenzen van onze kennis om te zetten in een object dat we op zijn beurt dan weer met wiskunde kunnen bestuderen en meten.

Die Vermessung des Unvermögens zu Messen.[30] Ook dit is Galoistheorie.

We mogen niet te snel opgeven: een methode die niet werkt heeft vaak als oorzaak een interessant onderliggend fenomeen, dat we dan op zijn beurt weer kunnen bestuderen.

Ik denk hierbij aan de Bernoullilezing van mijn collega Hendrik Lenstra, waarin 'onbegrip' als belangrijke drijfveer voor het maken van nieuwe wiskunde wordt aangedragen.[31] Aan het scala onderzoekstechnieken dat door Lenstra wordt opgesomd wil ik vandaag toevoegen: meet je onbegrip, en maak van deze meting een nieuw studie-object.

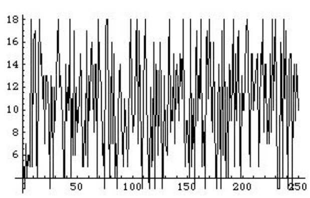
Hieruit kunnen wij misschien in de echte wereld, die ondertussen in de keuken flink is aangebrand, ook wat lering trekken. Onvermogen kan een kwaliteit zijn, mits begrepen. Als je weet dat je iets niet kan, probeer dan te meten in hoeverre je het niet kan.

Intermezzo: componeren met wiskunde

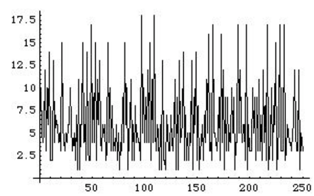
De dubbelzinnigheid in het trommelvormen-probleem wil ik gebruiken om U iets te vertellen over mijn huidige onderzoek.

Straks zullen we bekijken hoe een muziektoon is opgebouwd. Muziek bestaat echter niet alleen uit individuele tonen, maar uit een opeenvolging van tonen.

Die opeenvolging van tonen blijkt statistisch interessant gedrag te vertonen, zoals in de jaren 1970 werd ontdekt door Voss en Clarke.[32] Als we een dobbelsteen opgooien voor iedere toon, dan krijgen we 'witte ruis' - het klinkt niet als muziek, want er is geen *correlatie* tussen tonen. Als we daarentegen een dobbelsteen opgooien en daarmee de afwijking t.o.v. de vorige toon bepalen, is er wel een verband tussen opeenvolgende tonen. We krijgen dan 'bruine ruis', en het klinkt als erg saaie muziek, omdat er *te veel* correlatie tussen de tonen is. Bij analyse van bestaande muziek blijkt deze te voldoen aan een correlatieproces dat *roze ruis*, of 1/f-ruis heet. Roze ruis kan ook met een dobbelstenen-proces worden benaderd.[33]



Witte ruis



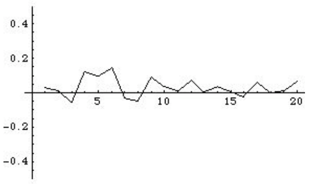
Dieprode ruis

Voor een lerarensymposium in België hebben Karim Zahidi en ikzelf jaren geleden op die manier een aantal melodieën bij mekaar gedobbeld, van ritme en harmonie voorzien, en dit is de muziek die U organist Gert Oost (1942-) bij aanvang van deze lezing hoorde spelen, en hij zal nu een stukje herhalen.

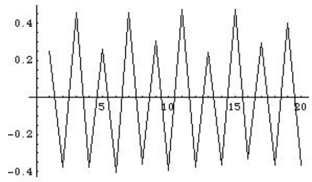
(*Gert Oost speelt voorbeeldcompositie 4*)[34]

Voorbeeldcompositie 4 (met Karim Zahidi):
muziek bij de reeks 15,3,6,4,13,4,5,5,13,5,7,2,12,4,9,4

Helaas (of gelukkig?) hadden wij het dobbelrecept voor roze ruis echter verkeerd begrepen.[35] Hierdoor ging heel wat correlatie verloren. Wij gooiden bij nader inzien gewoon willekeurig afwisselend met 3, 1, 2 en 1 dobbelsteen. Hierdoor vallen de waarden opeenvolgend in de intervallen 3 tot 18, 1 tot 6, 2 tot 12 en 1 tot 6. Er ontstaat hierdoor echter een soort standaard 'akkoordenstructuur' waarbij vier opeenvolgende noten vanzelf een harmonie suggereren. Ik weet niet wat U ervan vond, maar ons hebben deze melodieën aangenaam verrast, en stiekem vind ik ze zelfs beter klinken dan 'roze ruis'. Voor wie Karim kent is er maar één mogelijke naam voor dit proces: *dieprode* ruis.[36] De autocorrelatiegrafiek laat zien dat dieprode ruis een zogenaamde 'sinusoïdale' correlatie vertoont; dit betekent grofweg dat de verbandenstructuur in deze melodie zèlf de vorm van een pure boventoon heeft - een mooi soort zelfverwijzing.[37]



Autocorrelatiefunctie
voor witte ruis



Autocorrelatiefunctie
voor dieprode ruis

De autocorrelatiefunctie $R : \{1, \dots, N-1\} \to [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ van een dataset $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ is

$$R(k) = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (x_t - x)(x_{t+k} - x)}{\sum_{t=1}^{N} (x_t - x)^2}$$

De muziek van de relativiteitstheorie?

Hiermee komen we nu aan bij de wiskundige structuur van een individuele toon, het coloriet van een instrument. Wat we horen als we een vioolsnaar aanslaan, op een trommel slaan, of lucht door een orgelpijp jagen, bestaat uit een grondtoon en boventonen. De trillingen worden beschreven via de golfvergelijking, en de pure tonen corresponderen met zogenaamde eigenfuncties van de bijbehorende Laplace-operator. Die kunt U zich als volgt voorstellen. Als we een foto maken van een trillende snaar op een vast moment in de tijd, dan zien we een plaatje dat is opgebouwd uit het over mekaar leggen van dergelijke eigenfuncties: het zijn de sinussen en cosinussen van de middelbare school.

Het coloriet van een specifiek instrument is bepaald door de wijze waarop de boventonen gecombineerd worden, van een snerpende zaag tot een liefelijke blokfluit. De hoorbare informatie heet in de wiskunde 'spectrale data'. Er zijn twee soorten vragen: inverse problemen, d.w.z. 'Welke informatie is spectraal, dus hoorbaar?', en directe problemen, d.w.z. 'Wat weten we over het spectrum als we het instrument kennen?'.

Ter herinnering: volgens Weyl is oppervlakte spectraal, en volgens Gordon, Webb en Wolpert vorm niet.

De inverse spectrale vraag komt voor het eerst voor in een rapport van de natuurkundige Arthur Schuster voor de Brittish Association in 1882. Schuster, trouwens de bedenker van de term 'spectroscopie', [38] schrijft: 'Een oplossing van het inverse probleem zou zelfs de meest bekwame wiskundige verbazen: de vorm van een klok afleiden uit de geluiden die ze kan voortbrengen. […]Ondertussen moeten we zelfs de kleinste stap in deze richting vreugdevol verwelkomen.'

De chemische samenstelling van de zon kennen we *niet* doordat we een retourtje zon hebben gemaakt en een schepje helium meegebracht. We weten dat door te kijken en spectroscopie te bedrijven.

Een verrassende toepassing van het inverse spectrale probleem uit de **gravitatietheorie** dat erg dicht bij mijn huidige interesse staat is het werk van de Japanse fysicus MASAFUMI SERIU[39]: het spectrum wordt gebruikt als afstandsmaat tussen verschillende oplossingen voor de vergelijkingen van Einstein voor het universum. Zoals U vast wel ooit heeft gehoord, is de ruimte waarin wij leven gekromd en zijn 'ruimte' en 'tijd' ondeelbaar met mekaar verbonden op kosmische schaal. De vergelijkingen van Einstein geven mogelijke modellen voor het universum, maar daar zijn er meerdere van.

In het bijzonder is er de vraag deze modellen met mekaar en met de realiteit te vergelijken. Een centrale vraag in de algemene relativiteit is 'of cosmologie mogelijk is', dat wil zeggen, of er een realistisch model is voor de complete evolutie van het heelal. Door Seriu wordt het spectrum gebruikt als afstand tussen verschillende universa. Maar het probleem van de 'isospectraliteit', dus dat de vorm van het universum niet noodzakelijk uit zijn klank is af te leiden, blijft bestaan. Hoe gaan we daarmee om? We zoeken het even op bij Riemann.

Riemann en Riemann

Als promovendus nam ik bij het oppassen bij tentamens altijd een deel van het verzameld werk van een Groot Wiskundige mee, om door te bladeren en hier en daar in te lezen. Ik weet nog goed dat ik stukjes van LEOPOLD KRONECKER (1823-1891) zó kon lezen, maar dat ik van het werk van BERNHARD RIEMANN (1826-1866) werkelijk niets begreep. Nu, vijftien jaar later, heb ik een jaar lang in zijn verzameld werk zitten lezen. Het is een boek van iets meer dan 500 bladzijden, waarvan er ongeveer 200 tijdens zijn leven gepubliceerd werden. Ik begrijp er nog steeds niks van. Ik neem nu de uitdaging aan te proberen aan dit werk een 'epsilon' toe te voegen. 'Epsilon' is wiskundejargon voor 'een verwaarloosbaar kleine kwantiteit'.

Riemann leverde ons fundamentele concepten als de Riemann zeta-functie en Riemannse meetkunde, en die heb ik allebei nodig.

Eerst iets over de **Riemann zeta-functie** en de Riemann-hypothese, het beroemdste open probleem bij de huidige stand van de wiskunde. Het spectrum (de boventonen) worden in de wiskunde samengepakt in een *zeta-functie*. De Riemann zeta functie hoort bij de boventonen van een cirkelvormige snaar. Een cirkelvormige snaar is trouwens uniek bepaald door zijn spectrum.[40]

De getaltheoreten in de zaal huiveren van mijn definitie van de Riemann zeta functie. Immers, voor hen (en voor mij) meet de zeta-functie hoe priemgetallen verdeeld zijn. Als je begint te kijken waar in de natuurlijke getallen de priemgetallen zitten, dus getallen met als enige delers zichzelf en 1, dan lijkt dat in eerste instantie willekeurig. Maar op basis van lange berekeningen zag CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) dat de priemgetallen wel degelijk gemiddeld op een bijzondere manier in de verzameling van alle getallen liggen. En de fout die wordt gemaakt tussen de verdeling van de priemgetallen en die van Gauss is het 'minst opvallend' precies als de Riemannhypothese klopt. Trouwens, met OLIVER LORSCHEID (1978-) heb ik in de afgelopen jaren een oud idee van Don Zagier opgepikt om dit te proberen bewijzen - uiteraard met epsilon succes.[41]

Toch is deze getaltheoretische zeta-functie hetzelfde als die van de cirkelvormige snaar, en dat is het begin van het grote mysterie. Als we de titel van het populaire boek van MARCUS DU SAUTOY, 'De muziek van de priemgetallen' [42] bekijken, dan krijgen we de indruk ook naar de priemgetallen te kunnen luisteren. Met het spectrum dat bij de priemgetallen hoort kun je inderdaad echt een toon voortbrengen, dat heeft SIR MICHAEL BERRY een keer gedaan, maar over het resultaat lopen de meningen uiteen. 'In ieder geval beter dan Wagner', heb ik een keer gehoord.

Een ander fundamenteel concept van Riemann is de zogenaamde **Riemannse meetkunde**, een flexibele modelmeetkunde, met enige aanpassingen bruikbaar in de relativiteitstheorie. Er is namelijk niet één meetkunde, maar er zijn er vele. Het leven op een bol is anders dan in een plat vlak; op grote schaal althans. Op een bol kom je bijvoorbeeld na lange tijd weer terug waar je bent begonnen, en op de vlakke eindige aarde val je ergens in een kuil vol monsters.

FLORIS TAKENS (1940-) vroeg mij vorig jaar: hoe is het mogelijk verschillende Riemannse meetkundes te vergelijken, want ze zijn uit lokale informatie opgebouwd. De aanleiding voor deze vraag was een misverstand: ik wilde graag een goede notie van 'hetzelfde zijn' in de niet-commutatieve meetkunde bedenken, laat staan alles met mekaar vergelijken.[43] Maar het heeft me toch aan het denken gezet.

Riemannse meetkundes brengen geluid voort. De spectrale meetkunde, d.w.z. Riemannse meetkunde vanuit het standpunt van de Laplace-operator, de zeta-functie, dus het 'geluid' dat de meetkunde voorbrengt, heeft in de afgelopen twintig jaar een vlucht genomen in het bouwwerk van Alain Connes, genaamd *niet-commutatieve meetkunde*. Ik zal U de details hiervan besparen, maar de wortels ervan zijn te vinden in de kwantummechanica. Een probleem met dit extreem jonge gebied van de wiskunde (misschien 20 jaar oud) wordt treffend samengevat in volgend citaat van Yuri Manin (ik zou hem nog veel vaker kunnen citeren): 'Niet-commutatieve meetkunde ziet er vandaag uit als een gigantische bouwput, maar het ontbreekt aan een gemeenschappelijk fundament: van veel interessante constructies van 'niet-commutatieve ruimten' kunnen we zelfs niet met zekerheid zeggen of ze hetzelfde zijn of niet.'[44] Vandaar mijn vraag naar 'hetzelfde zijn'.

Nu is het in de niet-commutatieve meetkunde gebruikelijk om naar *families* van zeta-functies te kijken, geïndiceerd door functies op de meetkunde die men als muziekinstrument gebruikt.[45]

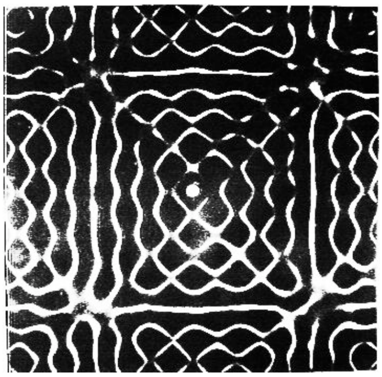
Dit roept meteen de vraag op of die families van zeta-functies *wel* de meetkunde, dat is ons muziekinstrument vandaag, uniek bepalen, een centraal punt in mijn huidige onderzoek. Met MATILDE MARCOLLI (1969-) heb ik vorig jaar al aangetoond dat trommels in de vorm van een gesloten oppervlak (eigenlijk compacte hyperbolische Riemannoppervlakken) reconstrueerbaar zijn uit een dergelijke Connes-achtige meetkunde.[46] Nu werk ik met JORGE PLAZAS aan het geval van een algemene Riemannse meetkunde.

Als antwoord construeren wij bij ieder paar diffeomorfe Riemannse meetkundes een *veld* van zeta-functies. Als de theorie werkt, dan geeft een constant zetaveld gelijke meetkundes. Een holomorf veld duidt op een overdekking. En in het algemene geval is dit zetaveld een maat voor het verschil tussen de Riemannse meetkundes. Dit is dan een soort antwoord op de vraag van Takens. We weten nog niet in hoeverre deze theorie werkt; we weten bijvoorbeeld wel al dat een constant veld gelijkheid impliceert in een residuele verzameling Riemannse metrieken op de gegeven ruimte.

In plaats van hier verder op in te gaan, wil ik besluiten met een filmpje van een object dat in het bewijs een belangrijke rol speelt: de knopenverzamelingen, d.w.z. de nulpuntsverzamelingen van de eigenfuncties. Die werden voor een vlakke trillende glasplaat voor het eerst zichtbaar gemaakt in een experiment van ROBERT HOOKE (1635-1703) in 1680, dat werd herhaald en populair gemaakt door ERNST CHLADNI (1756-1827). Ondertussen gebruikt een new age bedrijf dit zelfs om uw eigen stemgeluid in een psychedelisch patroon om te zetten.[47] Hooke en Chladni strooiden fijn zand op een glazen of metalen plaat die ze vervolgens lieten trillen. Het experiment is aan de Wake Forrest University opgenomen en we bekijken nu het spectaculaire filmpje met zout gestrooid op een luidsprekerplaat.[48] Voor mijn wiskundige collega's nog de opmerking dat we hier niet alleen de nulpuntsverzamelingen van de eigenfuncties van de Laplace-operator zien, want we hebben niet van doen met de gebruikelijke golfvergelijking.

Wie niet tegen hoge tonen kan moet zijn oren even sluiten.

(*Het filmpje wordt vertoond.*)



Chladni-patroon op een zwart geschilderde 0.125 inch dikke vierkante alluminium plaat van 70x70 cm, bij 3678.1 Hz[49]

In deze patronen komen symmetrie en trommels weer op een verrassende manier samen.

Ik zou ons onderzoeksprogramma als volgt willen samenvatten: door kwantummechanisch, d.w.z. met het veld van zetafuncties uit de niet-commutatieve meetkunde, te luisteren naar klassieke instrumenten, kunnen we die instrumenten reconstrueren. Dit luisteren gebeurt door zoiets als het afdekken van gedeelten van de trommel en luisteren naar het geluid dat dan wordt voortgebracht. Een soort trommelspel met twee handen, dus.

Maar wacht even, de zeta-functie was toch iets getaltheoretisch? De vraag is dan ook wat voor implicaties of analogieën dit werk weer heeft voor de getaltheorie. Sir Michael Atiyah zei al dat het 'Fort der Getaltheorie' het volgende is dat door methodes uit de mathematische fysica zal worden overwonnen.[50] Ik heb hier geen voorstelling bij, maar intrigerend is het wel.

Men neme het universum, en twee heel erg grote handen. Met één hand wordt stukje bij beetje het universum afgedekt. Met de andere hand wordt op het universum getrommeld. We bekijken de wonderbaarlijke Chladni-patronen. Zo kunnen we precies horen en zien in welk universum we onszelf bevinden.

Als U zich ooit door mekaar geschud voelt, dan is het misschien wel omdat mijn onderzoeksgroepje weer eens het universum aan het aftasten is.

Slotwoorden

Dames en Heren,

Het is gebruikelijk met een dankwoord te eindigen. Echter, de mensen die ik het meest wil bedanken stellen het minst op prijs hier met naam te worden genoemd. Dat zij weten hoezeer ik hen toch bedank.

Hier wil ik het dan bij laten. Ik heb willens en wetens de twee fouten gemaakt die gebruikelijk zijn voor jonge hoogleraren: te veel verschillende dingen vertellen, en te veel over hun eigen werk praten. Misschien voelt U daarom nu de behoefte zelf even op de bank te gaan liggen. Ik kan als soelaas enkel een drankje en een hapje aanbieden. Maar ik heb wel nog een verzoek: als U ons hiertoe zometeen in de Senaatszaal vervoegt, wilt U dan niet in de rij gaan staan om mijn hand te komen schudden? Gewoon binnenkomen alstublieft.

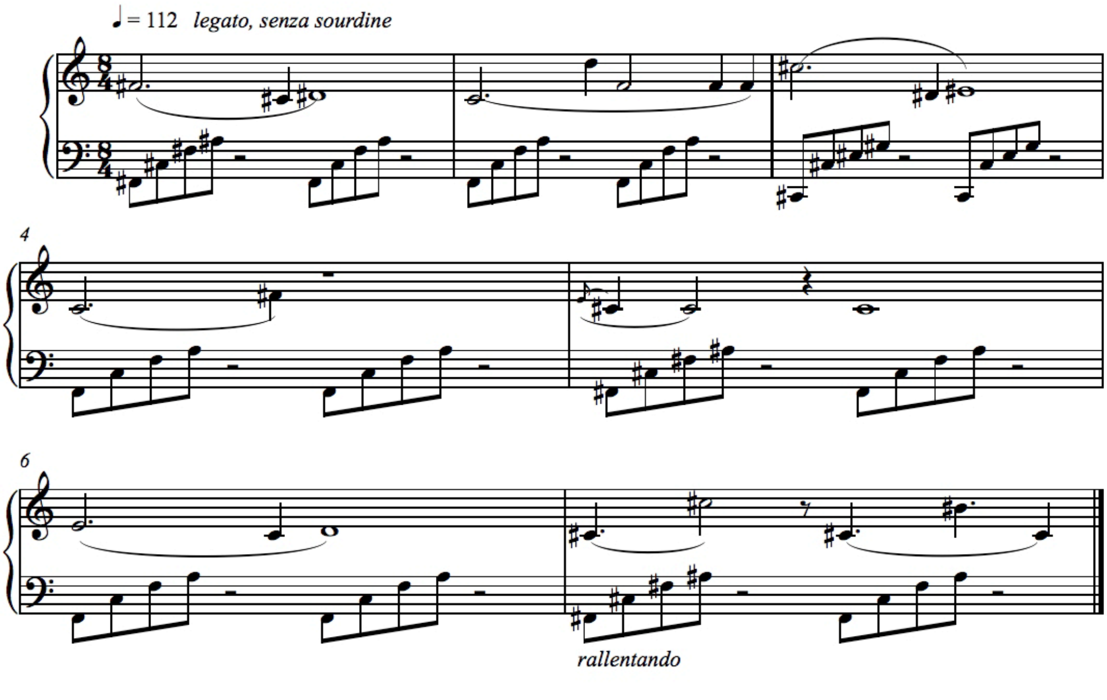
Ik heb gezegd.

APPENDIX

VOORBEELD COMPOSITIES MET DIEPRODE RUIS

DOOR DE AUTEUR MET KARIM ZAHIDI

Voorbeeldcompositie 1 bij de reeks 13,2,1,8,4,8,4,7,7,3,2,8,3,12,7,7



Voorbeeldcompositie 2 bij de reeks 11,27,1,13,6,6,6,14,4,6,1,7,5,2,2,5,1,3,2,14,2,11,2

Voorbeeldcompositie 3 bij de reeks 9,3,9,5,15,6,6,5,11,6,7,6,8,2,12,4

Voorbeeldcompositie 4 (met Karim Zahidi):
muziek bij de reeks 15,3,6,4,13,4,5,5,13,5,7,2,12,4,9,4

NOTEN

[1]'Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté', geciteerd in: Yves André, Ambiguity theory, old and new, arXiv:0805.2568 (16 May 2008), Kempf Memorial Lecture, Johns Hopkins University, 2006.

[2]p. 1007 (deel VII.6) in: *The Princeton Companion to Mathematics* (eds. Timothy Gowers, June Barrow-Green en Imre Leader), Princeton University Press, 2008.

[3]Zie ook de Diesrede van Ieke Moerdijk in 2008, 'Bol van Wiskunde',

http://www.math.uu.nl/people/moerdijk/dies2008.html.

[4]http://www.wiskundemeisjes.nl/20071227/de-favoriete-nog-levende-wiskundige-van...-19/.

[5]'The point is that there is an inherent weakness in trying to justify one's concerns by saying that they are useful. Useful is a word of engineering.';Yuri I. Manin, 'Good Proofs are Proofs that Make us Wiser', interview door Martin Aigner en Vasco A. Schmidt, The Berlin Intelligencer, 1998, p. 16-19, Springer-Verlag. Gratis beschikbaar op

http://ega-math.ru/Manin.htm

[6]Deze vergelijkingen hebben respectievelijk Galoisgroep S_4 met 24 elementen, en D_4 met 8 elementen.

[7]Pierre Cartier, La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich: évolution des notions d'espace et de symétrie, in: Les relations entre les mathématiques et la physique théorique, pp. 23-42, Inst. Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette, 1998. Engelse vertaling: Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), no. 4, pp. 389-408.

[8]Alain Connes en Matilde Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, hoofdstuk 1, paragraaf 7, i.h.b. Prop. 1.109 en p. 75.

[9]Hendrik Antoon Lorentz, Alte und Neue Frage der Physik, Wolfskehllezingen Göttingen, 24-29 october 1910, opgeschreven door Max Born, in: P. Zeeman and A.D. Fokker, eds: H.A. Lorentz, Collected Papers ('s-Gravenhage: Nijhoff, 1935-1939), vol. 7, pp. 236-237.

[10]Hermann Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), Math. Ann. LXXI, pp. 441-478.

[11]Johanna Reudler (Rotterdam 1 nov. 1879-?; 1904 Nat. Phil. Math. Amsterdam), Proefschrift Leiden, 1912, N.V. Electrische Drukkerij 'Volharding', Amsterdam. In het laatste hoofdstuk III, wordt het gestelde geverifieerd door expliciete berekening van de eigenwaarden. Het algemene bewijs van Weyl daarentegen gebruikt de theorie van integraalkernen.

[12]'Für mehrere einfache Formen der Hülle, wo sich die Rechnung durchführen lässt, wird der Satz in einer Leidener Dissertation bestätigt werden' ('wird bestätigt werden' is fout vertaald door Mark Kac in 'Can you hear the shape of a drum' (The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, pp. 1-23) als 'has been verified').

[13]Carolyn Gordon, David Webb en Scott Wolpert, Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds, Inv. Math. **110**, pp.1-22 (1992).

[14]Dit is niet de conventionele betekenis van 'hetzelfde klinken': *dat* betekent dan weer dat er twee trommels zijn waarop een punt kan worden aangeslagen waar alle eigenfuncties voor de Laplace-operator een gelijke waarde hebben, d.w.z. dat alle frequenties met dezelfde intensiteit worden aangeslagen: zie hiervoor het latere werk van Peter Buser (1946-), John Horton Conway (1937-), Peter Doyle en Klaus-Dieter Semmler, Some planar isospectral domains, Intern. Math. Res. Notices **9** (1994), zie ook:

math.darthmouth.edu/~doyle/docs/drum/drum/drum.html.

[15]Koen Thas, $\mathrm{PSL}_n(q)$ as operator group of isospectral drums. J. Phys. A **39** (2006), no. 50, L673-L675; Joeroen Schillewaert en Koen Thas, The 2-transitive transplantable isospectral drums, preprint 2008, per auct.; Olivier Giraud en Koen Thas, Hearing shapes of drums - mathematical and physical aspects of isospectrality, 129 pp.,

verschijnt in Rev. Mod. Phys.

[16]'Il serait absurde et contraire à l'esprit même de notre science que de vouloir la compartimenter en divisions rigides, à la manière du découpage traditionnel en Algèbre, Analyse, Géometrie etc. complètement caduc aujourd'hui', in: Jean Dieudonné, Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique. Bordas, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, France, 1977. Zie ook de boekbespreking door Paul Halmos in Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Volume 1, Number 4 (1979), 678-681.

[17]Zie bijvoorbeeld opgave 4.8 in J.S. Milne, Fields and Galois Theory, v.4.21 (www.jsmilne.org): 'It is a thought-provoking question that few graduate students would know how to approach the question of determining the Galois group of, say, $X^6 + 2X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 6X + 7$.'

[18]voor Hermite en Laguerre-polynomen zie: Issai Schur, Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguereschen und Hermiteschen Polynome, J. reine angew. Math. **165**, pp. 52-58 (1931).

[19]Zie: Zeros of Eisenstein series, quadratic class numbers and supersingularity for rational function fields, Math. Ann. **314**, pp. 175-196 (1999).

[20] Met enige uitzonderingen, die te maken hebben met Bernoulligetallen. In 1886 door Jakob I. Bernoulli ontdekt; ze kregen hun naam van de Moivre, die ze noteerde met 'B_n', en toen ik ze als negentienjarige ontdekte bij het sommeren van de k-de machten van de eerste N natuurlijke getallen (zoals vermoedelijk veel van de wiskundige lezers van dit stuk), durfde ik ze nog 'C_n' noemen. De ontdekking was een recursieformule voor Stirlinggetallen (die ik toen ook niet kende) die zinvol was voor negatieve indices, maar daar rationale getallen opleverde; dat waren de Bernoulligetallen. Wie de voortbrengende reeksen voor Bernoulli- en Stirlinggetallen kent kan dit makkelijk bewijzen.

[21]Masanobu Kaneko en Don Zagier, Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, in: Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995), pp. 97-126, AMS/IP Stud. Adv. Math., 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[22]zie bijvoorbeeld: Equivariant deformation of Mumford curves and of ordinary curves in positive characteristic (met F. Kato), Duke Math. J. **116** 431-470 (2003); Relèvements des revêtements de courbes faiblement ramifiés (met A. Mézard), Math. Z. **254**, 239-255 (2006); Which weakly ramified group actions admit a universal formal deformation? (met J. Byszewski), Ann. Inst. Fourier **59** (2009).

[23]Zie voor platonische lichamen en modulaire krommen ook de oratie van Bas Edixhoven in Leiden: 'Van piramides tot modulaire krommen', 9 januari 2004;

http://www.math.leidenuniv.nl/ edix/oratie.pdf

[24]Yu. I. Manin, Reflections on arithmetical physics, in: Conformal Invariance and string theory (Pioana Brasov, 1987), pp. 293-303, Academic Press, 1989.

[25]M. Kontsevich, Y. Soibelman, Affine structures and non-Archimedean analytic spaces, in: The unity of mathematics, pp. 321-385, Progr. Math. vol. 244, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[26]zie bijvoorbeeld: The p-adic icosahedron (met F. Kato), Notices Amer. Math. Soc. **52**, pp. 720-727 (2005); Discontinuous groups in positive characteristic and automorphisms of Mumford curves (met F. Kato en A. Kontogeorgis), Math. Ann. **320**, pp. 55-85 (2001).

[27]Eigenlijk is deze formulering een gevolg van de negatieve oplossing van Hilbert's Tiende Probleem, zie: Yu. Matijasevich, Hilbert's Tenth Problem, Foundations of Computing Series, M.I.T. Press, 1993; par. 10.1.

[28]zie bijvoorbeeld: Elliptic divisibility sequences and undecidable problems about rational points (met K. Zahidi), J. reine und angew. Math. **613**, pp. 1-33 (2007).

[29]'When I first published my paper about undecidable propositions the result could not be pronounced in this generality, because for thenotions of mechanical procedure and of formal system no mathematically satisfactory definition had been given at that time.', Kurt Gödel, [[Undecidable diophantine propositions]], handgeschreven Engelse aantekeningen in de *Nachlass*, 193?, in: Collected Works (eds. S. Feferman et. al.), vol. III: Unpublished essays and lectures, pp. 156-175.

[30]Vergelijk: Daniel Kehlmann, *Die Vermessung der Welt,* Rowolt Taschenbuch Verlag, Reinbeck bei Hamburg, 2005.

[31]H.W. Lenstra Jr., Wiskunde en Onbegrip, Johann Bernoulli lezing, April 1995. In: Nieuw Archief voor Wiskunde, Vierde Serie, deel 14, nr. 1 (maart 1996), pp. 33-43.

[32]Richard F. Voss en John Clarke, '1/f noise' in music: Music from 1/f noise, J. Acoust. Soc. Am. **63**, nr. 1 (1978); zie ook: Martin Gardner, White and brown music, fractal curves and one-over-f fluctuations, Sci. Am. April 1978, pp. 16-31 (herdruk in: *Fractal music, hypercards, and more: mathematical recreations from Scientific American*, W.H. Freeman (1992)).

[33]Het kan met dobbelstenen als volgt worden benaderd: nummer drie dobbelstenen. Gooi eerst met alle dobbelstenen. Gooi vervolgens achtereenvolgens enkel met de derde, tweede en derde, derde, eerste en tweede, tweede en derde en enkel de derde dobbelsteen, en schrijf na iedere worp de som van de ogen van alledrie de dobbelstenen op (dus ook de dobbelstenen die zijn blijven liggen). Laat ieder getal tussen het minimale aantal ogen 3 en het maximale aantal ogen 18 corresponderen met een noot (bijv. in een chromatische toonladder). Ziedaar roze ruis.

[34]In de appendix zijn meer voorbeeldcomposities te vinden.

[35]Doordat we bij iedere gooibeurt enkel de dobbelstenen opgeteld hadden die bij die beurt werden gegooid.

[36]Helaas is 'rode ruis' al een synoniem voor 'bruine ruis'.

[37]Vergelijk: Michael Bulmer, Music from Fractal Noise, Proceedings of the Mathematics 2000 Festival (eds. M. Bulmer, B. McCrae, K. Stacey), University of Melbourne, School of Physical Sciences Publications (2000);

http://www.maths.uq.edu.au/ mrb/qamt/fractalmusic.pdf;

voor autocorrelatiediagrammen, zie bijvoorbeeld, NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods,

http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda331.htm.

De plaatjes zijn gemaakt in Mathematica, de datasets van 250 'tonen' met de interne randomizer van Mathematica.

[38]'It woud baffle the most skilful mathematician to solve the inverse problem and to find out the shape of a bell by means of the sounds which it is capable of sending out. Ant this is the problem which ultimately spectoscopy hopes to solve in the case of light. In the meantime we must welcome with delight even the smallest step in the desired direction.'; A.F. Schuster, The genesis of spectra, pp. 120-143 from: Report of the Committee, appointed for the purpose of reporting upon the present state of our Knowledge of Spectrum Analysis, in: Report of the meeting of the British association for the advancement of science Publication (London), 1882 (51e meeting, York, aug. and sept. 1881), available from gallica.bnf.fr.

[39]M. Seriu, Spectral evolution of the Universe, Phys. Rev. D **62**, 023516 (2000) [16 pages]; M. Seriu, Evolution of the discrepancy between a universe and its model, Class. Quantum Grav. **18** (2001), nr. 24, 5329-5352.

[40]Dit volgt uit de zogenaamde isoperimetrische ongelijkheid.

[41]Zie bijv. Toroidal automorphic forms for certain function fields (met O. Lorscheid), verschijnt in J. Numb. Th. (2009).

[42]Marcus du Sautoy, The music of the primes, why an unsolved problem in mathematics matters, HarperCollins Publishers (2004).

[43]d.w.z. alleen een notie van 'isomorfisme' hebben, niet van 'morfisme'.

[44]'Noncommutative geometry nowadays looks like a vast building site [but it] lacks common foundations: for many interesting constructions of `noncommutative spaces' we cannot even say for sure which of them lead to isomorphic spaces ...'; Yu. I. Manin, Foreword, p. ix-xi in: Matilde Marcolli, *Arithmetic Noncommutative Geometry*, University Lecture Series vol. 36, American Mathematical Society, 2005.

[45]Voor experten: de onderliggende functie-algebra hoeft niet unitair te zijn, dus is het natuurlijker om naar

tr(aΔ^s) te kijken voor alle a in een (geschikte dichte) deelalgebra.

[46]via ergodische rigiditeit, zie: Zeta functions that hear the shape of a Riemann surface (met M. Marcolli), J. Geom. Phys. **58**, no. 5, pp. 619-632 (2008).

[47]http://www.cymascope.com/

[48]http://www.wfu.edu/academics/physics/demolabs/
demos/avimov/waves/chladni_plates/resonance_square.MPG.

[49]bron: http://www.physics.utoronto.ca/nonlinear/chladni.html

[50]Lezing op het slotsymposium van het NWO/FOM-programma 'Mathematische Fysica', Amsterdam, 9 maart 2007.

OVER DE AUTEUR

Gunther Leonard Maria Cornelissen werd (uit Nederlandse ouders) geboren op 4 juli 1971 te Gent in België, alwaar hij ook wiskunde studeerde en in 1997 via een beurs van het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek - Vlaanderen (F.W.O.) promoveerde op een proefschrift over 'Geometrical properties of modular forms over function fields' bij Jan Van Geel, met co-promotor Ernst-Ulrich Gekeler uit Saarbrücken. Tegelijk haalde hij een eerstegraads lesbevoegdheid voor het secundair onderwijs. Na zijn promotie werkte hij vier jaar aan het Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn (Duitsland), opnieuw mogelijk gemaakt door F.W.O. en de Max-Planck-Gesellschaft. In 2001 was hij een semester lang gastdocent aan de Katholieke Universiteit Leuven, waarna hij een vaste aanstelling kreeg als universitair docent aan de Universiteit Utrecht binnen de leerstoel 'Algebra' van Frits Beukers. In 2003 kreeg hij binnen de Vernieuwingsimplus van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk onderzoek (N.W.O.) een vidi-beurs voor onderzoek naar niet-archimedische meetkunde en automorfe vormen, en in 2007 een vici-beurs voor onderzoek naar verbanden tussen niet-commutatieve en aritmetische meetkunde. Hij geeft/gaf leiding aan vijf promovendi en twee postdocs binnen deze projecten. Hij heeft in de afgelopen jaren meer dan 20 scripties begeleid en ontwikkelt en doceert wiskunde-modules op de middelbare school.

Hij is auteur van een dertigtal wetenschappelijke publicaties in de zuivere wiskunde, o.a. over verbanden tussen logica en getaltheorie, over deformatietheorie van groepsacties op krommen, over automorfe vormen en verbanden tussen niet-commutatieve meetkunde (een taal voor kwantummechanica) en getaltheorie.

Hij is lid van twee N.W.O.-onderzoeksclusters, GQT ('Geometry and Quantum Theory') en DIAMANT ('Discrete, Interactive and Algorithmical Mathematics, Algebra and Number Theory'). Hij is redacteur en columnist voor het 'Nieuw Archief voor Wiskunde'. Hij is directeur van de onderzoeksschool MRI ('Mathematical Research Institute').

Gunther Cornelissen woont met partner en drie kinderen aan de rand van de Utrechtse binnenstad. Verdere vermeldenswaardige bijdragen aan de maatschappij vormen zijn weigering om een rijbewijs te halen (tot teleurstelling van zijn vader), zijn poging zo weinig mogelijk dieren te eten (tot teleurstelling van zijn schoonvader), en het besturen van een particuliere peuterspeelzaal.