

WISKUNDIG DENKEN: A WAY OF LIFE

Marieke Bor
Paul Drijvers

Het activeren van wiskundig denken daagt leerlingen uit, maar hoeft geen extra lestijd te kosten. Dat is een van de conclusies van het praktijkgericht onderzoek naar wiskundig denken. Marieke Bor en Paul Drijvers vatten de opbrengst van het onderzoek samen tot tips om van wiskundig denken *a way of life* te maken.

Het onderzoek

Het schooljaar 2014–2015 stond voor zes docenten in het teken van wiskundig denken. Samen met onderzoekers van het Freudenthal Instituut (Universiteit Utrecht) en het Cito werkten zij aan het onderzoek *Wiskundige denkactiviteit in praktijk*.^[1] Anne van Streun en Marian Kollenveld stonden het team bij met advies. Met elkaar hebben we nagedacht over wat wiskundig denken is^[2], welke opgaven daar goed bij passen en wat de docent kan doen om het denken in de klas te bevorderen.

De docenten, afkomstig van drie scholen, hebben met de onderzoekers eerst tips gezocht in de literatuur. Deze tips hadden betrekking op het (her)ontwerpen van opgaven en het stimuleren van wiskundig denken in de les. We zijn hiermee aan de slag gegaan om een aantal bruikbare opgaven te ontwerpen voor klas 3 van havo en vwo en de eigen lessen in deze klassen *denkactiever* te maken. Regelmatig spraken docenten met elkaar af, in tweetallen of met de hele groep, om samen lessen voor te bereiden of bij elkaar in de klas te kijken. Observaties en zelfreflecties zorgden ervoor dat we kritisch naar de lessen en de gebruikte opgaven hebben gekeken. Verbeterpuntjes werden onthouden voor volgende lessen en de opgave werd daar waar nodig aangepast en nogmaals getest door een andere docent.

Denkactiverende opgaven

We hebben met elkaar nagedacht over opgaven die leerlingen uitdagen tot wiskundig denken. De docenten stelden dat de opgaven moesten passen binnen het curriculum, omdat er anders geen tijd voor zou zijn. Het boek vormde dus het uitgangspunt voor het ontwikkelen van denkactiverende opgaven. De literatuur gaf handvatten om opgaven aan te passen zodat deze meer uitdagen tot wiskundig denken. Denk aan het weglaten van deelvragen^[3], het benadrukken van hetgeen dat interessant is, bijvoorbeeld een conflict tussen intuïtieve kennis en

wiskundige kennis^[4] of het stellen van waaromvragen.^[5] In totaal heeft het docententeam 23 opgaven ontwikkeld en deze minimaal één keer getest en verbeterd (zie bijvoorbeeld de opgave over steilheid in kader 1). Populair bij ons team was het starten met een opgave uit het einde van de paragraaf of het hoofdstuk. Veel boeken zijn ontworpen zodat leerlingen zich stap voor stap zelfstandig door theorie en opgaven heen kunnen werken. Wanneer je hen zelf deze stappen laat bedenken, eventueel in groepsverband, dan wordt het wiskundig denken meer geactiveerd. Vervolgens kun je leerlingen laten oefenen met de stof, maar hoeven zij niet meer alle opgaven te maken, wat weer tijdswinst oplevert.

Kader 1: Een voorbeeldopgave

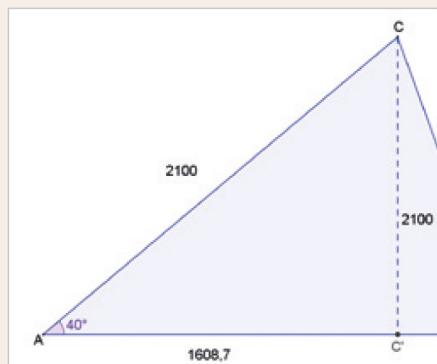


Laat leerlingen in groepjes met elkaar nadenken over de vraag: Wanneer is een weg twee keer zo steil? Discussieer met de hele klas over de verschillende mogelijkheden. Een extra vraag zou kunnen zijn: wanneer is het hellingspercentage 100%? Gebruik dit bijvoorbeeld als introductie voor de tangens.

Tijdens het onderzoek ontdekten we dat een kleine aanpassing van een standaardopgave al veel denken teweeg kan brengen. Zo kwam een docent met het idee om een noodzakelijk gegeven weg te laten. In groepjes mogen leerlingen dan bespreken welke informatie ze graag zouden willen hebben. Vervolgens geeft de docent elk groepje apart de gevraagde informatie. Niet elk groepje vraagt om hetzelfde gegeven en dat geeft de docent de mogelijkheid om bij de nabespreking te kijken naar de verschillende manieren van oplossen. Bij de uitvoering in de klas maakte de docent tijdens de nabespreking een foutje, dat zij wist te benutten om ook nu het denken te activeren. Zie kader 2. Tijdens het onderzoek ontdekten we een aantal tips die bij het (her)ontwerpen van opgaven in de praktijk erg nuttig blijken. In kader 3 staat een lijstje met onze top 10. Hierbij geldt natuurlijk dat niet elke opgave aan deze punten zal voldoen. Hopelijk biedt dit lijstje wel inspiratie om ook zelf opgaven te ontwerpen die het wiskundig denken stimuleren.

Denkactiverend lesgeven

In verschillende artikelen staat dat de docent een sleutelrol speelt als het draait om het denken van leerlingen. Zo



De docent maakt een fout door bij lijn CC' te schrijven dat deze 2100 lang is.

Leerling: 'Die zijde is toch 1350?'

Docent: 'Heb ik een fout gemaakt? Ja, je hebt gelijk.'

De docent kijkt even in de papieren hoe lang de zijde hoort te zijn.

Docent: 'Die kan natuurlijk helemaal geen 2100 zijn! Waarom niet?'

Leerling: 'Omdat hij dan even lang zou zijn als de andere zijde.'

Docent: 'Ja, en kunnen er in een driehoek twee zijdes even lang zijn?'

Leerling: 'Nee.'

Docent: 'Ja.'

Leerling: 'Maar niet de schuine zijde.'

Docent: 'Juist!'

benadrukken Doorman, Fechner, Jonker en Wijers (2014) dat een goede docent bij een routineopgave een goede vraag kan stellen die het denken activeert. Andersom kan een docent een denkactiverende opgave ook dusdanig benaderen dat de leerling niet meer zelf hoeft te denken. Met dit in het achterhoofd zijn we kritisch naar onszelf gaan kijken. Er is regelmatig gereflecteerd op eigen, maar ook op elkaars lessen. Al snel ontdekten we dat de docenten inderdaad een zeer grote rol spelen in het

Kader 3: Top 10

De ideale denkactiverende wiskundeopgave:

- gaat over hoe én waarom;
- is een aansprekend probleem voor de leerling;
- heeft iets te bieden voor zowel de sterke als de zwakke leerling;
- kan op verschillende manieren worden aangepakt;
- is origineel of verrassend;
- vereist meerdere denkstappen;
- is open en niet te sturend;
- leent zich voor discussie tussen leerlingen of in de hele klas;
- zet aan tot terugkijken en reflectie;
- nodigt uit tot verder denken en vervolgvragen.

Kader 4: Een praktijkvoorbeeld

Leerling: 'Is dit antwoord goed?'

Docent: 'Wat denk je zelf?'

Leerling: 'In het voorbeeld ziet het er ongeveer ook zo uit.'

Docent: 'En is dat dan altijd zo? Of zijn er ook uitzonderingen?'

stimuleren van wiskundig denken. Wiskundig denken stijgt steeds meer uit boven de denkactiverende opgave naar de hele les. Het wordt een vast onderdeel van het lesgeven, of zoals een van de docenten het uitdrukte, een *way of life* om er doorlopend alert op te zijn om kansen aan te grijpen om het denken van leerlingen te triggeren. Om leerlingen wiskundig te laten denken is het belangrijk om vragen te stellen. Dit kan bijvoorbeeld wanneer een leerling de docent een vraag stelt. Een praktijkvoorbeeld staat in kader 4. Als de docent niet het antwoord geeft, maar de vraag herformuleert of omvormt tot een iets eenvoudigere, dan wordt de leerling zelf weer aan het denken gezet. Of als de leerling wil weten of hij het goede antwoord heeft: Hoe zou je dit kunnen controleren? Dit zijn kleine aanpassingen in de manier van lesgeven, die een groot verschil maken in het denken van de leerling.

Welke vragen zetten aan tot wiskundig denken? Dat hangt sterk van de situatie af. Open vragen, die leerlingen op een ander niveau laten denken, zijn vaak erg effectief: Waarom?, Geldt dit altijd? en Kun je dat bewijzen?. Omdat goede vragen vaak zo specifiek zijn voor de les en de klas/leerling die je voor je hebt, is het goed om tijdens de lesvoorbereiding al na te denken over vragen die leerlingen aan het denken zetten. Andere tips zijn te vinden in onze top 10, zie kader 5.

Kader 5: Top 10

De ideale denkactiverende wiskundedocent:

- geeft geen antwoorden, maar stelt vragen;
- geeft leerlingen denktijd;
- vraagt door op reacties van leerlingen;
- heeft zelf plezier in wiskundig denken;
- bedenkt bij het voorbereiden van de les op welke manier hij het denken kan activeren;
- besteedt aandacht aan het oplossingsproces;
- reflecteert met de hele klas op de gebruikte strategieën;
- bouwt de hoeveelheid hulp in de loop van de tijd af;
- geeft het wiskundig denken ook een plaats in de toets;
- is doorlopend alert op kansen om leerlingen aan te zetten tot wiskundig denken.

Meer informatie

Als u op *YouTube* zoekt op de term 'wiskundig denken' vindt u een drietal filmpjes en een trailer met daarin meer informatie over wiskundige denkactiviteiten en een kijkje in de klas bij verschillende docenten. Een handreiking voor docenten, met daarin praktische tips om met wiskundig denken aan de slag te gaan, is te vinden op www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/2015_nro_wda.pdf. De opgaven die binnen dit project zijn ontworpen zijn online beschikbaar op www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/wda.

Noten

- [1] Dit onderzoek is mogelijk gemaakt door het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO), projectnummer 405-14-502.
- [2] Drijvers, P. (2015). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides*, 90(5), 4-8.
- [3] Doorman, M., Fechner, S., Jonker, V., & Wijers, M. (2014). *Mascil. Richtlijnen voor het ontwikkelen van lesmateriaal voor onderzoekend leren in wiskunde en natuurwetenschappen met behulp van beroepscontexten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [4] Van Streun, A., & Kop, P. (2012). Wiskundige denkactiviteiten. In P. Drijvers, A. van Streun & B. Zwaneveld (Red.), *Handboek wiskundedidactiek* (pp. 339-368). Amsterdam: Epsilon.
- [5] Drijvers, P. (2015). Denken over wiskunde, onderwijs en ICT. *Euclides*, 90(7), 4-10.

Met dank aan

Benno Boerboom en Irene Vis (Het Nieuwe Eemland, Amersfoort), Chesten Breijer, Laurens Visscher en Annie Wevers (Farel College, Amersfoort) en Dirk Boleij en Mascha Klerx (Maurick College, Vught).

Over de auteurs

Marieke Bor heeft als junior onderzoeker meegewerkt aan het onderzoek 'Wiskundige denkactiviteit in de praktijk'. E-mailadres: mariekebor@gmail.com. Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en wetenschappelijk onderzoeker bij Cito. E-mailadres: p.drijvers@uu.nl