

Chaos, een nieuwe visie op de werkelijkheid

F. Verhulst

Inleiding

Chaos is een verschijnsel dat al kan optreden in eenvoudig lijkende mechanische systemen zoals ons Zonnestelsel of, nog simpeler, een tweetal slingers verbonden door een veer. We bestuderen dergelijke systemen in formuleringen van de mechanica die sinds de achttiende eeuw algemeen bekend zijn. Chaos komt er dan op neer dat, hoewel de toekomstige ontwikkeling van zo'n systeem door de wetten van de mechanica volledig vastligt – we spreken wel van determinisme – we toch niet veel vat kunnen krijgen op die ontwikkeling. Dat komt omdat kleine onnauwkeurigheden in onze kennis omtrent de huidige staat van het systeem op den duur geweldig op kunnen blazen. Dit maakt dat de toekomst op de iets langere duur slecht voorspelbaar wordt. En daar gaat het determinisme ...

Nu kwam het determinisme al eerder onder vuur te liggen door allerlei ontwikkelingen in de moderne natuurkunde, vooral de quantummechanica, maar de 'chaos-aanslag' komt als het ware rechtstreeks uit de wiskunde zelf. Eén gevolg is dat het idee 'onzekere toekomst', dat we goed kennen uit het dagelijks leven of als we het over het weer hebben, nu ook gemeengoed begint te worden in het klassieke bolwerk van de wiskunde en natuurwetenschappen.

Dit is een vrij negatieve formulering die echter goed past bij de cultuurpessimistische tonen van deze tijd. Er gaat echter ook een bevrijdende werking vanuit: biologen, economen en psychologen zijn gewend aan onzekerheden en voelen zich nu wellicht minder geremd om de achterliggende wiskunde in hun modelvorming te betrekken.

De bijbehorende theorie van dynamische systemen en chaos heeft in de laatste decennia een grote vlucht genomen. Zowel door intensief gebruik van computers als door ontwikkeling van de theorie is het inzicht in het wezen van chaotische fenomenen enorm toegenomen. We zullen zien dat

'chaos' gaat over processen van beweging en verandering die een grillig en verward verloop hebben, slecht voorspelbaar zijn, maar toch bepaalde structuren vertonen.

Het woord 'chaos'

De werkelijkheid van alledag maakt op velen een chaotische indruk. Dat geldt voor het leven van individuele mensen, dat zich afspeelt in een plotseling veranderende wereld met gebeurtenissen als ziekte en sterven, werkloosheid door opheffing van een bedrijf, scheiding en politieke omwentelingen. Die indruk bestaat vooral in die gevallen waarbij het individu geen invloed kan uitoefenen op het verloop van de gebeurtenissen en deze zich onverwacht voor lijken te doen zoals bij het weer of bij sommige economische en politieke veranderingen. Van Dales *Groot Woordenboek der Nederlandse Taal* (1992) geeft van chaos de betekenissen "staat van ongeordendheid, warboel en omvangrijke verwarde en ordeloze massa". Het is illustratief om een willekeurige krant of ander periodiek open te slaan en na te gaan hoe vaak het woord chaos of een woord als wanorde voorkomt in de beschrijving van een situatie.

De cultureel-historische wortels van het idee chaos zijn zeer oud. Zonder dat de mensen in de Oudheid erg veel inzicht hadden in de wetmatigheden achter de natuurverschijnselen, dachten ze wel degelijk na over het ontstaan van de wereld.

De Grieken, met name in de school van Plato, meenden dat er in oorsprong een chaotisch verdeelde oermaterie was. Een goede Demiurg heeft hieruit de wereld gevormd naar een aantal eeuwig blijvende vormen; deze laatste zouden dus onafhankelijk van onze werkelijkheid bestaan.

In de opvattingen van de Hindoes is chaos niet een vormloze oertoestand, maar een eenheid van orde en wanorde. In deze mythologie gaat de wereld door drie fasen: schepping, in stand houden en vernietiging met bijbehorende goden Brahma, Vishnoe en Shiva.

Deze ideeën sluiten niet aan bij de joodse en dus ook niet bij de christelijke traditie. In het Oude Testament, Genesis 1, staat 'In het begin schiep God Hemel en Aarde. Maar de Aarde was nog ongeordend en leeg ...'. In deze mythologie geeft de schepping van het zijnde het begin van de tijdrekening aan. In de eerste periode na het tijdstip nul brengt God al scheppend orde

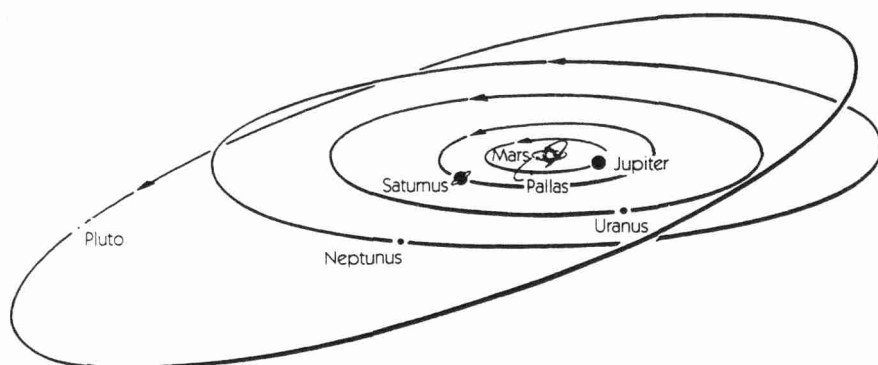
aan en in de joods-christelijke traditie speelt chaos vervolgens geen fundamentele rol. Het woord heeft dan een statische betekenis en wordt alleen gebruikt om een zeer rommelige, verwerpelijke toestand aan te duiden.

Je kunt – globaal samenvattend – zeggen dat in de mythologie, chaos steeds een structuurloos voor- of tussenstadium van de kosmos voorstelt, waarin vervolgens structuur wordt aangebracht. Scheppen is, in deze opvatting, een vorm van structureren. Misschien zou je zelfs kunnen zeggen dat chaos een noodzakelijke voorwaarde is voor het scheppingsproces. Maar ook een uitdrukking als 'mijn klerenkast is een chaos' wijst in deze zelfde richting: door op te ruimen brengen we structuur aan. Dit soort opvattingen over actief ordenen was – en is nog steeds – heel belangrijk in de westerse cultuur, hetgeen weerspiegeld wordt door een ongekende bloei op velerlei gebieden.

De wiskundige theorie van dynamische systemen en chaos houdt zich bezig met processen van beweging en verandering. De term 'chaos' is een beetje misleidend, maar is gekozen vanwege zekere overeenkomsten met wat we hierboven zagen.

Belangrijkste overeenkomst is de onhanteerbaarheid: chaotische bewegingen zijn uiterst grillig en verward en hun toekomst laat zich slecht voorspellen. Dit is iets wat we uit het dagelijks leven heel goed kennen. Om Jim Yorke, één der grondleggers van de chaostheorie te citeren: 'Je gaat maar iets te laat van huis en je mist je trein ...'. Deze vorm van chaos speelt een grote rol in de ontwikkeling van het weer en heeft alles te maken met het feit dat weersvoorspellingen er vaak zo naast zitten.

Ook hier is de betekenis van chaos niet louter negatief: het blijkt dat systemen met chaotische bewegingen vaak juist interessanter en 'vitaler' zijn dan die welke het daar zonder moeten doen. Een verschilpunt met het 'dagelijkse' begrip chaos is dat deze 'dynamische' tegenhanger niet structuurloos is. Het blijkt bijvoorbeeld dat meetkundige, waaronder fractale, structuren een essentiële rol spelen. Dynamische chaos kan dan ook niet zonder meer door structureren of herstructureren ('opruimen') worden opgeheven.



Afbeelding 1

Zonnestelsel met de buitenste planeten; binnen de Marsbaan bevinden zich de planeten Aarde, Venus en Mercurius. Behalve de Aarde zijn er nog vijf planeten met manen, in totaal drieëndertig. Verder zijn er grote zwermen asteroïden, kometen, meteoren en kleinere deeltjes. De asteroïde Pallas is in de afbeelding aangegeven; deze beweegt zich tussen de Mars- en de Jupiter-baan en heeft een diameter van circa 500 km.

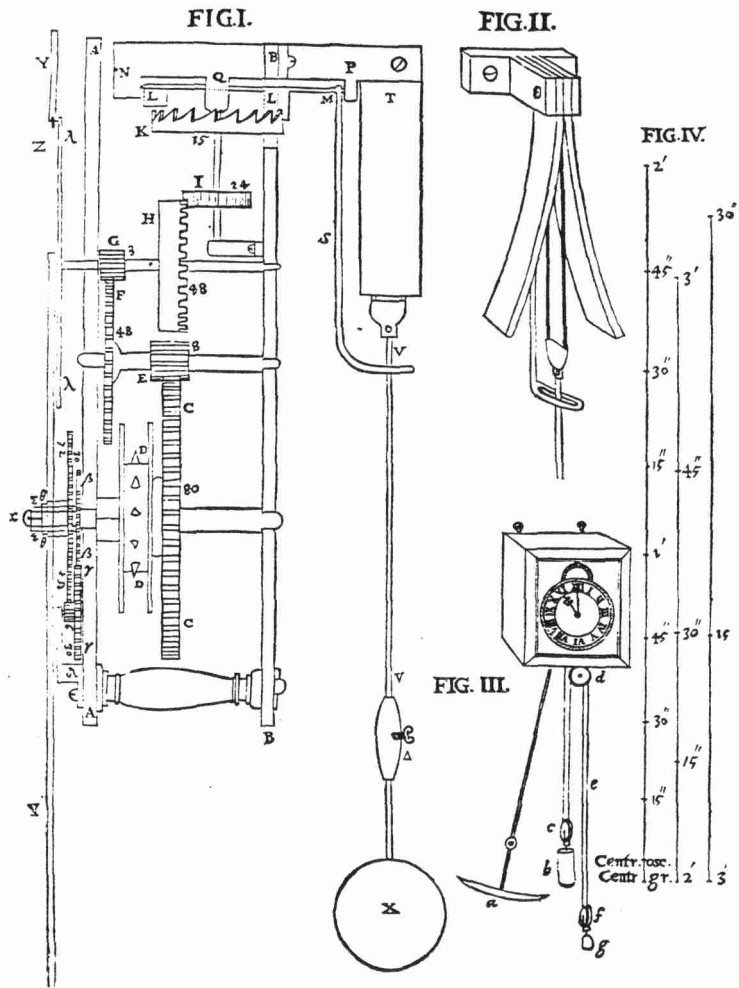
Orde en determinisme

In de zeventiende en achttiende eeuw voltrok zich grotendeels wat wij nu aanduiden als de 'wetenschappelijke revolutie'. Belangrijke nieuwe elementen hierin zijn waarneming en experiment. Voor de middeleeuwen, die vanuit een gesloten wereldbeeld in het algemeen redeneerde volgens vooropgezette theorieën, speelden deze elementen slechts een ondergeschikte rol. Bekende geleerden die aan de wieg van deze ontwikkelingen stonden zijn Tycho Brahe, Johannes Kepler en Galileo Galilei, *afbeelding 1*.

In het midden van de zeventiende eeuw is Christiaan Huygens (1629-1695) de meest vooraanstaande onderzoeker in Europa. Hij houdt zich bezig met veel onderwerpen zoals de voortplanting van het licht, de beweging van de planeten, de theorie en constructie van het slingeruurwerk. In zijn werk gaan theoretisch inzicht, technische inventiviteit en wiskundig meesterschap hand in hand. In deze tijd vertoont de beoefening van de wetenschap voor het eerst alle moderne kenmerken: nauwkeurige waarneming van de natuurverschijnselen, theoretische verklaring met ontdekking en gebruik van wiskundige theorieën, toetsing van de theorie aan de waarnemingen waarna eventueel verbetering van de eerste verklaring volgt.

Een andere sleutelfiguur in de beginfase van de moderne wetenschap is Isaac Newton (1642-1727). Zijn beroemde werk, waarin onder meer de bewegingswetten van de hemellichamen worden afgeleid, de *Principia*, heet voluit in het Nederlands *Wiskundige Beginselen van de Natuurfilosofie*. Deze titel typeert de nieuwe kijk op de werkelijkheid waarbij in sterke mate wiskundige taal wordt gebruikt. Hierbij moet men denken aan het beschrijven van de natuurverschijnselen door het opstellen van vergelijkingen, bijvoorbeeld voor de beweging van deeltjes, of door het geraffineerd gebruik van meetkundige constructies zoals Huygens doet in zijn theorie van het licht.

De vernieuwing in deze periode is op onnavolgbare wijze beschreven door E.J. Dijksterhuis in zijn *De mechanisering van het wereldbeeld*. Een essentieel element is hier de mathematisering van de natuurwetenschappen. Vanaf ongeveer 1800 was mathematiseren dé manier om natuurwetenschappelijke theorieën te vormen. Je zou zelfs kunnen zeggen dat het in zeker opzicht identiek is geworden met 'begrijpen'. Wat hiervan ook zij, de wiskundige behandeling geeft vaak veel houvast.



Afbeelding 2

De beweging van de slinger is zo voorspelbaar, dat we deze kunnen gebruiken voor tijdmeting. Deze afbeelding is van Christiaan Huygens afkomstig en is te vinden in zijn *Horologium Oscillatorium*, over de beweging van het slingeruurwerk.

Dit geldt in het bijzonder voor een groot aantal dynamische systemen in de mechanica zoals de slinger, de veer, het Zonnestelsel, de snaar, vloeistofstromingen, enzovoorts. Zie *afbeelding 2*. Hierbij steekt dan voor het eerst het *determinisme* de kop op: uit de wiskundige theorie volgt dat bij een gegeven begintoestand de gehele toekomst vastligt. In het geval van het Zonnestelsel bijvoorbeeld wordt de begintoestand gekarakteriseerd door alle posities én snelheden ten opzichte van de Zon van de planeten, manen en andere voorkomende hemellichamen. De zwaartekrachtwet, in de vorm van wiskundige vergelijkingen gegoten, bepaalt dan verder alle posities en snelheden in de toekomst.

Het determinisme suggereert een grote hanteerbaarheid, bijna maakbaarheid, van de toekomst, die immers geheel vastligt in de wiskundige beschrijving van de werkelijkheid. Dit past heel goed in allerlei optimistische gedachten betreffende het nut van wetenschappelijke kennis voor het heil der mensheid zoals die in de Verlichting van de achttiende eeuw opkwamen.

In dit verband heeft de filosoof Immanuel Kant (1724 - 1804) tot op de dag van vandaag in sterke mate het westerse denken bepaald. Kants filosofie is krachtig beïnvloed door de boven geschetste ontwikkelingen, zowel door de inhoud daarvan als door de vorm. Dat laatste slaat onder andere op de bewijskracht en de onomstotelijkheid van Newtons wiskundige presentatie. Deze beïnvloeding speelt dan vooral in Kants kennistheorie, de theorie die beschrijft hoe de mens kennis kan hebben van de wereld. In deze kennistheorie zijn begrippen als 'ruimte', 'tijd' en 'causaliteit' fundamentele uitgangspunten, zij spelen een zogenaamde aprioristische rol.

Het succes bij de beschrijving van de beweging van de hemellichamen en vele andere problemen leidden tot, wat wel genoemd wordt, het wereldbeeld van het uurwerk. De werkelijkheid, het dynamisch systeem dat de wereld als geheel vormt, wordt voorgesteld als een zeer ingewikkeld uurwerk met erg veel radertjes. Het is allemaal voor een mens niet te overzien, maar als we maar blijven onderzoeken, dat wil zeggen alle radertjes en alle wetmatigheden gaan zoeken en vinden, brengen we de hele werkelijkheid in kaart. De geleerde Laplace (1749-1827) zegt het zó:

Een intelligente geest die op elk gegeven ogenblik al de krachten zou kennen die de natuur doen leven en de onderlinge posities van de dingen waaruit deze bestaat, als deze intelligente geest groot

genoeg zou zijn om deze gegevens aan analyse te onderwerpen, dan zou deze de beweging van de grootste lichamen en van het lichtste atoom in het heelal in een enkele formule kunnen samenvatten: voor zo een intelligentie zou niets onzeker zijn en zowel de toekomst als het verleden zou hem voor ogen staan.

De gedachte dat het mogelijk is door voortdurend verder onderzoek de werkelijkheid volledig te overzien, het optimistische wereldbeeld van Kant, Laplace en hun tijdgenoten, het beeld van het ingewikkelde uurwerk, bepaalt tot de dag van vandaag veel van onze kijk op de werkelijkheid. Dat optimisme lijkt op het eerste gezicht gerechtvaardigd. In het algemeen werken onze huishoudelijke apparaten en andere machines immers uitstekend, we kunnen met grote precisie raketten besturen en nog veel meer. Ongeveer honderd jaar geleden werd dit wereldbeeld ernstig geschokt door het werk van een geniaal wiskundige.

Poincaré en de prijsvraag over de stabiliteit van het Zonnestelsel

Indien twee lichamen elkaar aantrekken volgens de zwaartekrachtwet van Newton — denk aan de Aarde en de Maan of de Zon en de Aarde — dan kunnen de dynamische vergelijkingen die de beweging beschrijven eenvoudig worden opgelost. Een beschrijving van het Zonnestelsel op basis van los van elkaar staande twee-lichamen-problemen is natuurlijk te simpel. Dat zou immers inhouden dat elke planeet alleen door de Zon wordt agetrokken, maar ze trekken elkaar natuurlijk ook onderling aan, zij het met een kleinere kracht. Dat was al in de achttiende eeuw bekend; zo kon rond 1750 de langgerekte baan van de komeet Halley om de Zon, omlooptijd ongeveer 75 jaar, alleen nauwkeurig genoeg voorspeld worden als de invloeden van Jupiter en Saturnus meegerekend werden.

De oplossing van het bewegingsprobleem van drie of meer lichamen hangt ook samen met de vraag of het Zonnestelsel stabiel is. Deze kwestie gaat terug op de eerder genoemde Laplace, die ook een tijd hofastronoom van Napoleon is geweest. In zijn *Traité de Mécanique céleste* geeft Laplace een volledig deterministische behandeling van het Zonnestelsel, gebaseerd op de wetten van Newton. Napoleon miste in dit werk referentie aan de goddelijke invloed. Zeer bekend is Laplaces krachtige antwoord toen zijn gelovige kei-

zer hem met dit gemis confronteerde: 'Sire, ik had deze hypothese niet nodig.'

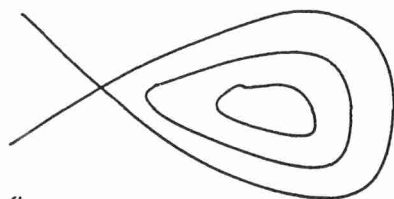
Hiermee is echter de volgende vraag geboren, namelijk of het Zonnestelsel zich wel zal blijven bewegen zoals we dat sinds millennia gewend zijn en waarbij alle gebeurtenissen zich ongeveer periodiek herhalen. Te denken valt aan Zons- en Maansverduisteringen, conjuncties van planeten, enzovoorts.

Wat zou er zoal mis kunnen gaan? Wel, het is a priori niet denkbeeldig dat sommige planeten met elkaar in botsing zouden kunnen raken, of dat ze het Zonnestelsel geheel zouden verlaten. Of bijvoorbeeld dat een Maan van de ene planeet wordt ingevangen door een andere, enzovoorts. We kunnen met berekeningen aantonen dat het onze tijd wel zal duren, maar daar gaat het hier niet om. Nee, de vraag is of deze nagenoeg periodieke dynamica het tot in alle eeuwigheid volhoudt. Dit is de grote vraag naar de stabiliteit van het Zonnestelsel; Laplace zelf gaf een eerste aanzet naar een bevestigend antwoord, maar de vraag in deze formulering van Laplace en zijn tijdgenoten is nog steeds niet bevredigend beantwoord. In de achttiende en negentiende eeuw bleek dat van het drielichamenprobleem een 'eenvoudige' algemene oplossing – zoals bij twee lichamen – al niet te vinden was, laat dus staan van het overeenkomstige probleem met meer dan drie lichamen. En dit, terwijl de belangrijkste geleerden van die tijd hieraan hun beste krachten gegeven hebben!

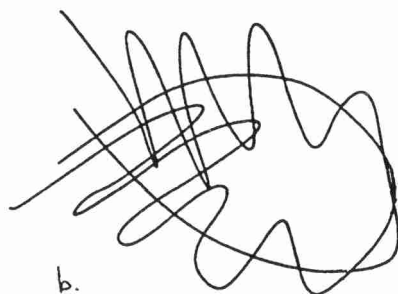
Deze stabiliteitsvraag heeft een stimulerende en centrale rol gespeeld in de ontwikkeling van de wiskunde tot op heden; hij is nog steeds niet beantwoord.

De wiskundige Karl Weierstrass (1815-1897) realiseert zich dat het toch wel erg merkwaardig is dat de grote vragen van het drielichamenprobleem onopgelost zijn en in 1887 verwerkt hij dit in een prijsvraag, die koning Oscar II van Zweden uitschrijft. In 1889 wordt het essay van Henri Poincaré (1854-1912) bekroond, waarbij Weierstrass aantekent dat het drielichamenprobleem in zijn algemeenheid nog steeds niet opgelost is, maar dat Poincaré resultaten 'epochemachend' mogen worden genoemd.

Poincarés antwoord betekent een breuk met de klassieke methoden, waarmee min of meer expliciete oplossingen worden geconstrueerd in de vorm van wiskundige formules. De lezer, die de wiskunde alleen van het VWO of als hulpwetenschap kent, zal de opdracht om formules te vinden vertrouwd voorkomen.



a.



b.

Afbeelding 3

a. Klassieke 'nette, gevangen' oplossingen. b. Homocliene wirwar die zich afspeelt bij een instabiliteit.

Poincaré bewees iets opmerkelijks, namelijk dat er in het drielichamenprobleem *niet voldoende behoudswetten* zoals energie en draai-impuls bestaan. Hij introduceerde hiertoe nieuwe, vooral meetkundige methoden in de wiskunde die bij dit deel van de mechanica nodig zijn. Het komt er op neer, dat bij aanwezigheid van voldoende behoudswetten, alle oplossingen als het ware gevangen zijn op allerlei oppervlakken die elkaar dwars snijden. In het drielichamenprobleem zijn er niet genoeg behoudswetten, de oplossingen kunnen niet allemaal gevangen zijn op oppervlakken en ze kunnen zich daardoor wild en grillig gedragen. De klassieke, gebruikelijke constructiemethoden falen hier dus.

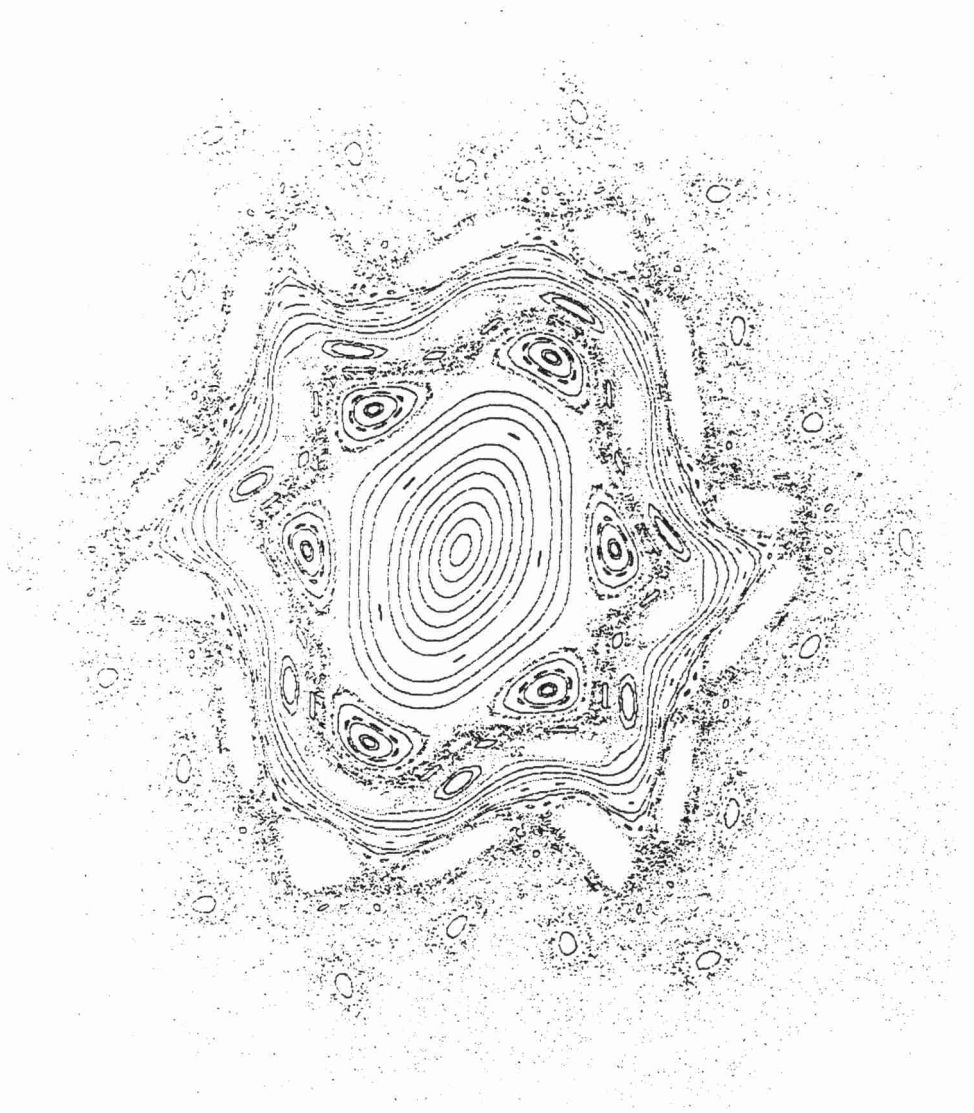
Het gaat hier over hoogdimensionale problemen, maar Poincaré herleidde door allerlei reductiemethoden zijn overwegingen tot beschouwingen voor één kromme in een vlak. In dat geval vertoont deze kromme wat heden ten dage bekend staat als 'homocliene wirwar', zie *afbeelding 3*. Poincaré zelf spreekt hier beeldend van:

een soort traliwerk, door elkaar gevlochten weefsel, een stelsel van mazen dat oneindig dicht in elkaar gegroeid is.

De oplossingen die Poincaré schetst, zijn, in huidige termen gesproken, chaotisch met alle gevolgen van dien.

Het achttiende en negentiende-eeuwse onderzoeksprogramma voor de mechanica, dat gebaseerd is op het vinden van een voldoende aantal behoudswetten, heeft dus gefaald en dit heeft meer verstrekkende gevolgen dan de meeste tijdgenoten van Poincaré hebben beseft. In feite betekent dit alles niets minder dan een forse deuk in het optimistische wereldbeeld van Kant en Laplace. We verliezen hiermee als het ware onze vat op de wereld: in tamelijk eenvoudige deterministische systemen komen kennelijk oplossingen in de tijd voor die 'chaotisch' zijn en die zich maar bar slecht laten hanteren. Niet alleen dat de klassiek-constructieve beschrijvingen hier falen, er is sprake van structurele onvoorspelbaarheid op langere termijn.

De 'volle' waarheid in deze is pas zeer langzaam in bredere kringen van de wetenschap doorgedrongen. Tot 1960 interesseerden zich slechts een handjevol wetenschappers voor deze problemen, ze werden door velen als exotisch en pathologisch beschouwd. Een saillant voorbeeld hiervan wordt gegeven door de toonaangevende classificatie-index van de tijdschriften *Mathematical Reviews* en het *Zentralblatt für Mathematik*. In de meest recente versie, die



Afbeelding 4

Oppervlakte-behoudende afbeelding die hoort bij een conservatief systeem. De regelmatige krommen corresponderen met ordelijke beweging, de puntenwolken met chaos. De afbeeldingen 4, 5 en 6 zijn gemaakt door dr. Igor Hoveijn.

van 1991 dateert, lezen we nog steeds onder item 58F13: 'Strange Attractors, Chaos and other Pathologies'.

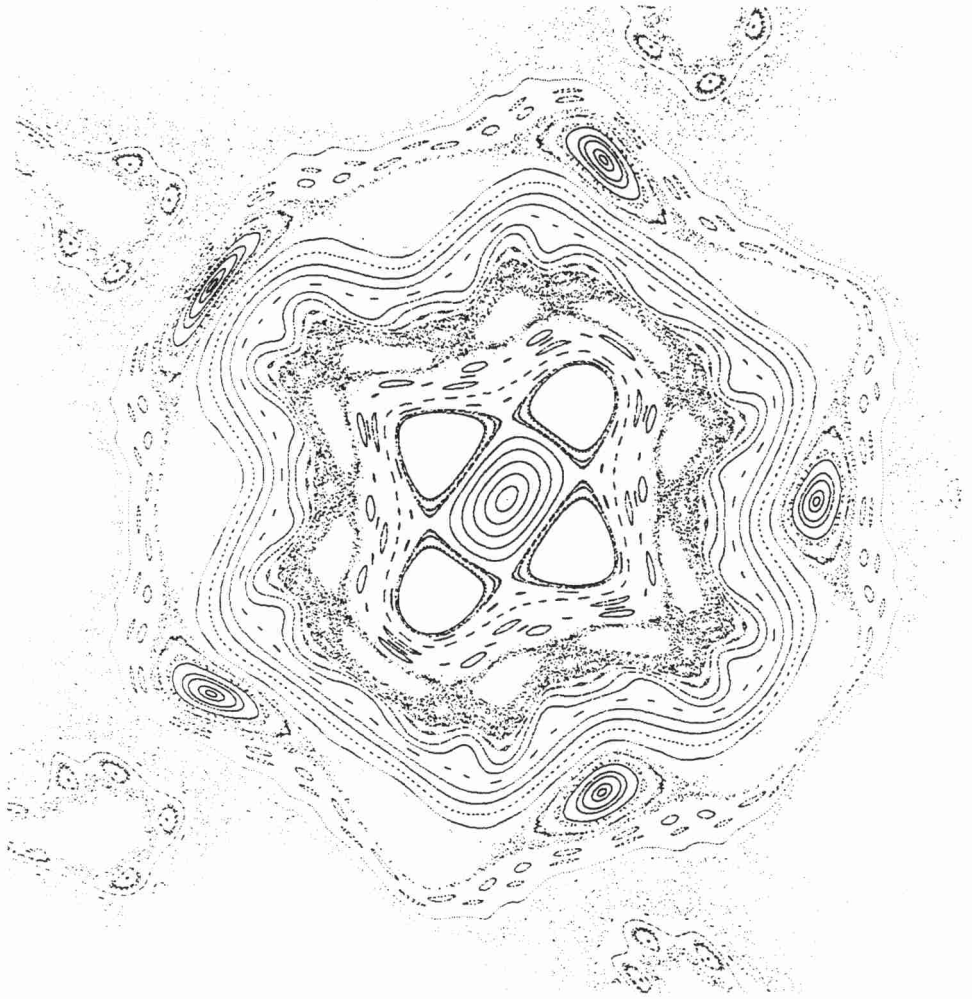
Conservatieve chaos

In de toestand van chaos treedt instabiliteit op heel veel plaatsen tegelijk op. Voor bijna alle naburige beginwaarden vinden we, dat de oplossingen lokaal exponentieel hard uit elkaar weglopen. Het is moeilijk om je hier een voorstelling van te maken. Het betekent dat als je een aantal mogelijke begintoestanden hebt van een chaotisch dynamisch systeem, je bij elke keuze van begintoestand een totaal andere evolutie van het systeem krijgt. Voorspellen van de ontwikkeling is dan heel moeilijk. *Afbeelding 4.*

Hiervoor hebben we beschreven welk een belangrijke rol de studie van het Zonnestelsel heeft gespeeld. In het Zonnestelsel vindt beweging plaats van planeten en andere deeltjes in hun banen zonder dat er wrijving is, althans zo weinig wrijving dat we deze voor de meeste berekeningen kunnen verwaarlozen.

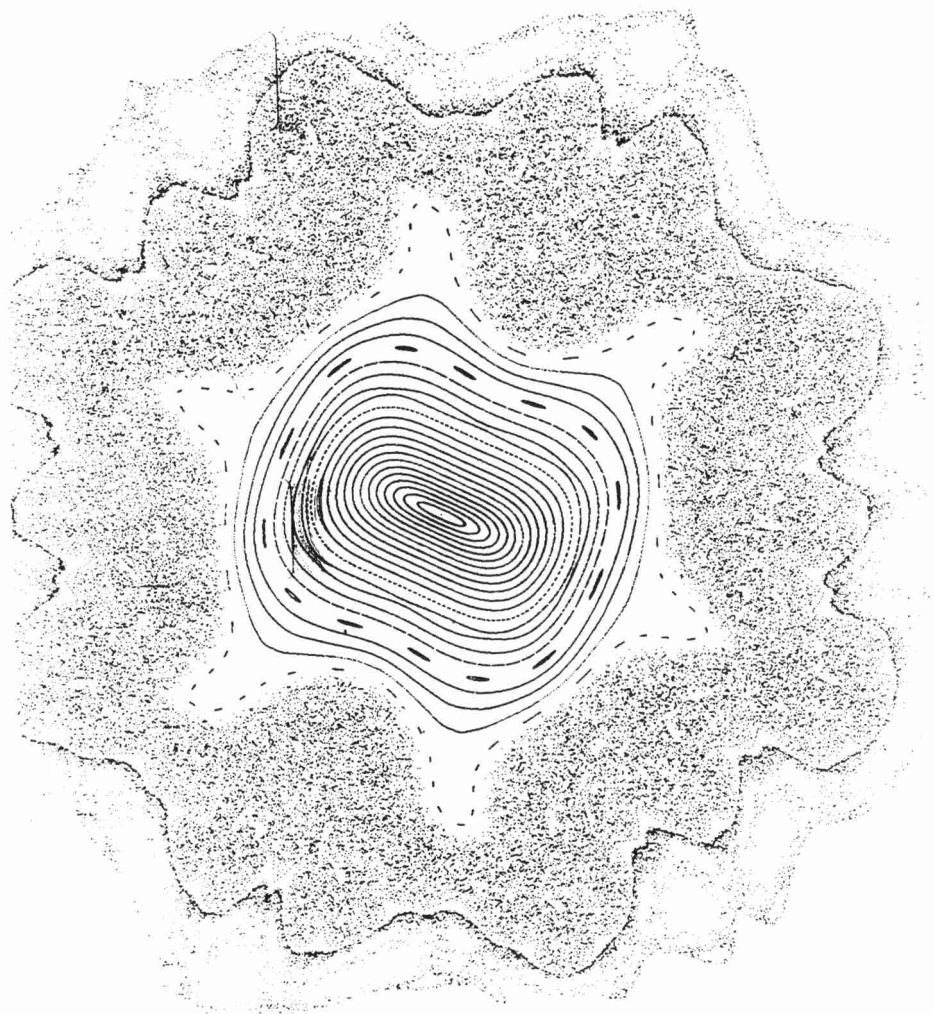
Systemen zonder wrijving worden wel conservatief genoemd, in zulke systemen wordt namelijk de aanwezige energie geconserveerd, behouden.

Eén van de belangrijkste dingen die ondertussen over conservatieve dynamische systemen bekend zijn, is dat ze bijna allemaal chaotisch zijn, dat wil zeggen in meer of mindere mate chaos bevatten. De eerste aanwijzing hiervoor kwam uit de theoretische sterrenkunde in de studie van Hénon en Heiles voor de beweging van sterren in melkwegstelsels. Zij vinden, dat als ze de deeltjes in hun banen weinig energie geven, de beweging er heel regelmatig uitziet; dat wordt weerspiegeld door de regelmatige patronen waarin het gekozen vlak wordt doorkruist. Als echter de energie iets verhoogd wordt, breken veel van de regelmatige banen, patronen in het vlak, op en bewegen de sterren daar kennelijk op een wilde chaotische manier. In 1964 worden de resultaten gepubliceerd in de *Astronomical Journal*; deze leiden eerst tot verbijstering bij sterrenkundigen en wiskundigen, maar na enige tijd begint men er iets van te begrijpen. *Afbeelding 5.*



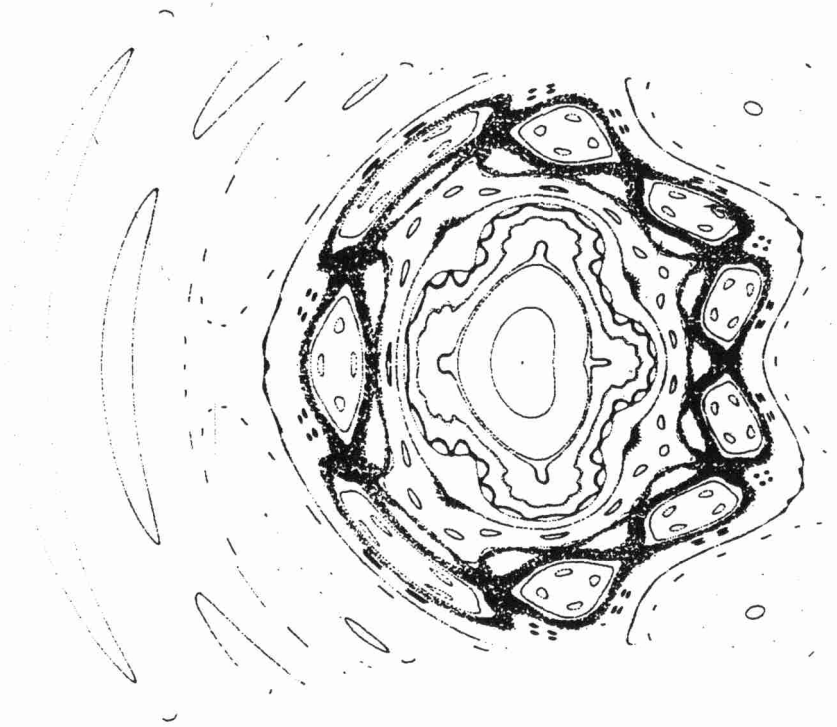
Afbeelding 5

Kleine wijziging van de parameter die in afbeelding 4 voorkomt.



Afbeelding 6

Een ander 'familied' van het conservatieve systeem uit afbeelding 4. Orde en chaos worden weer naast elkaar aangetroffen.



Afbeelding 7

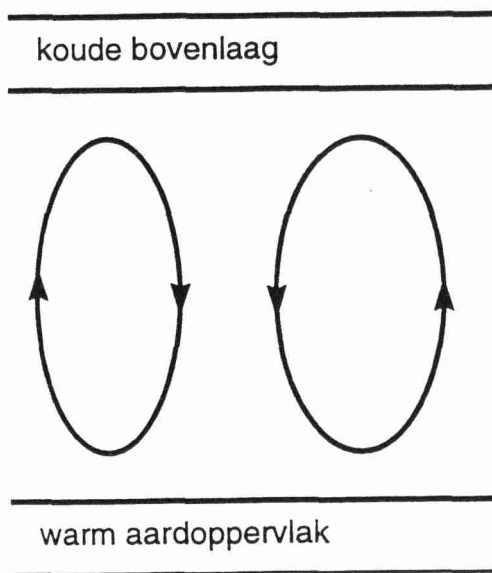
Ook deze afbeelding is van een conservatief systeem figuur afkomstig. In dit geval is deze niet 'bedacht', maar voortkomend uit het trillingsgedrag van het uiteinde van een lange boor die ronddraait in de aardkorst (onderzocht door dr. Gert van der Heijden).

Over dit trage proces van begripsvorming is nog wel iets te vermelden. Hierbij moet men zich realiseren dat de experimentele wetenschappen zoals natuurkunde, sterrenkunde, scheikunde, biologie in de loop van de twintigste eeuw een heel andere weg gingen dan de wiskunde. In de experimentele wetenschappen gingen steeds verfijnder meettechnieken hand in hand met nieuwe inzichten en theorieën. De wiskunde die hierbij nodig bleek, bestond al of werd ter plekke zo'n beetje ontwikkeld.

In de wiskunde zelf bestond eveneens een sterke ontwikkeling; deze voerde echter van de experimentele wetenschappen af en leek in de eerste helft van deze eeuw als ideaal steeds grotere abstractie te hebben. De persoonlijke contacten tussen wiskundige en experimentele wetenschappers begonnen hierdoor zelfs enigszins af te nemen. In de jaren '60 van deze eeuw bleek een deel van dit abstract wiskundige werk van fundamenteel belang te zijn voor het begrijpen van dynamische systemen en van sommige theorieën binnen de experimentele wetenschappen zoals het probleem van Hénon en Heiles. Het duurde echter even voordat de onderzoekers uit verschillende vakgebieden weer met elkaar in gesprek kwamen. Wel bleken deze nieuwe ontwikkelingen in de lucht te zitten.

Bij het begrijpen van de theorie wordt een vooraanstaande rol gespeeld door het werk van de wiskundigen Vladimir I. Arnold, Jürgen Moser en Stephen Smale. Arnold en Moser bewezen dat, hoewel in het algemeen conservatieve systemen chaotisch zijn, er toch oneindig veel regelmatige patronen overblijven in de bijbehorende oppervlakte behoudende afbeelding van het snijvlak. In het geval van Hénon en Heiles zijn dat er bij lage energie zelfs overheersend veel, bij hogere energie worden het er minder. Na enige tijd begreep men dat verband tussen de sterrenkundige berekeningen en de abstract-wiskundige stellingen. Dit opende een geheel nieuw onderzoeksgebied, waarbij het gebruik van de computer en de wiskunde elkaar aanvullen. *Afbeelding 6.*

Het soort patronen dat Hénon en Heiles vonden in hun studie van sterstelsels is typerend en deze komen we dan ook in de meest uiteenlopende gebieden tegen. Dit illustreren we aan de hand van een aantal plaatjes (afbeeldingen 4-7). *Afbeelding 7.*



Afbeelding 8

De bovenste luchtlagen zijn koeler en daardoor zwaarder dan de onderste. Dit veroorzaakt de Rayleigh-Taylor instabiliteit, waarbij de lucht uit de bovenste laag naar beneden zakt, daar verwarmd wordt, weer opstijgt enzovoorts.

De gebieden met puntjes vertegenwoordigen onregelmatige, chaotische banen die op die plaatsen door het snijvlak prikken. Het valt op, dat in veel gevallen er zowel regelmatige patronen zijn als chaotische gebieden, orde en voorspelbaarheid bestaan kennelijk naast chaos en onvoorspelbaarheid. Het is als een groot huis, waarin behalve netjes opgeruimde kamers ook een aantal erg rommelige plekken te vinden zijn. Het is een beetje als het leven zelf.

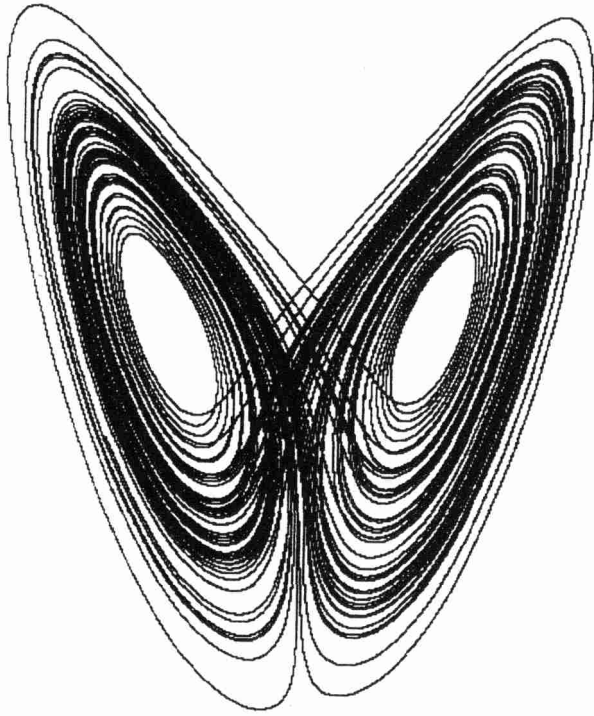
Een weerkundige verrassing

In de jaren '60 dachten de meteorologen nog dat verbetering van de weervoorspelling een kwestie was van een wat fijnmaziger meetnet over de Aarde en het bouwen van grotere computers om de voorspellingen uit te voeren. Deze opinie heeft zich bij velen tot in de jaren '80 gehandhaafd. Een fraai voorbeeld van zulk denken vinden we in het boek *Weather Prediction by Numerical Process* van Lewis Fry Richardson, in 1922 gepubliceerd. Wel had Richardson gevoel voor de omvang van de problemen, want hij beschrijft een niet-bestaande 'weerfabriek' waarin 60.000 mensen gecoördineerd met handrekenmachines zitten te werken om de ontwikkeling van het weer bij te houden (nog niet eens te voorspellen!). *Afbeelding 8.*

In 1960 voerde de meteoroloog Edward Lorenz berekeningen uit op het M.I.T. in de Verenigde Staten. Hij wilde laten zien wat er met de atmosfeer gebeurt als de Aarde door de Zon verwarmd wordt. Er ontstaan dan opstijgende luchtstromen en de koude lucht uit boven gelegen lagen zakt naar beneden, maar hoe dit precies gebeurt en hoelang zulke processen in de atmosfeer duren was onbekend. Het verschijnsel heet Rayleigh-Taylor instabiliteit.

Het wiskundig model hiervoor moet volgens de wetten van Newton deterministische voorspellingen doen in de zin zoals Laplace die had aangegeven. Het model was echter te moeilijk en te groot voor de computer die Lorenz toen ter beschikking had. Om toch een indruk te krijgen van de processen die hierbij een rol spelen, vereenvoudigde Lorenz de vergelijkingen zeer radicaal, zelfs zo zeer dat het nieuwe wiskundige model (drie kwadratische gewone differentiaal vergelijkingen) als een cartoon kan worden beschouwd van het oorspronkelijke probleem.

De resultaten van zo'n berekening over een periode van bijvoorbeeld een maand, komen in de vorm van lange rijen getallen, drie per dag. In dit geval



Afbeelding 9

In deze driedimensionale ruimte zijn de drie energiegrootheden van Lorenz uitgezet. De banen die de oplossingen beschrijven bewegen zich rond de vreemde attractor.

werden namelijk voor elke dag drie energiegrootheden van de atmosfeer vooruit berekend. Lorenz liet de berekeningen overnieuw doen door de waarden halverwege deze periode als startwaarden opnieuw in te tikken. Dit gaf geheel andere resultaten en de voor de hand liggende gedachte was, dat zijn computerprogramma een fout bevatte of dat de computer zelf defect was.

Het duurde even voor Lorenz ontdekte dat dit niet het geval was. De oorzaak was deze. De computer voerde zijn berekeningen uit in zes decimalen nauwkeurig. Bij het opnieuw intikken werden slechts drie decimalen gebruikt en dit kleine verschil in startwaarden leidde tot de ontwikkeling van een heel ander weertype.

Het bleek dat Lorenz' modelvergelijkingen een typerend voorbeeld zijn van gevoelige afhankelijkheid van beginwaarden. Als we de drie energiegrootheden van Lorenz in de ruimte uitzetten en volgen in de tijd, dan blijken de oplossingen in de figuur onregelmatig afwisselend links en rechts rond twee stromingstoestanden te draaien. Als we een iets andere startwaarde nemen, ontstaat een dergelijk plaatje, maar het ronddraaien gebeurt in heel andere onregelmatige volgordes.

De verzameling waar omheen gedraaid wordt en die de twee stromingstoestanden bevat, heeft attractie voor de oplossingen, de oplossingen gaan er naar toe, maar er is niet een rustige eindtoestand waarin het systeem zich vestigt. We noemen de verzameling een *vreemde attractor*. In het algemeen heeft zo'n verzameling een fractaal karakter; in het geval van het probleem van Lorenz is de dimensie 2.4, de attractor is dus iets dikker dan een vlak.

Lorenz realiseerde zich dat hiermee voorspelling van het weer op lange termijn wezenlijk onmogelijk is. Dit kan geïllustreerd worden met wat hij het vlindereffect noemt: als een vlinder in Brazilië zijn vleugels uitslaat, kan er in Texas een orkaan ontstaan. Een belangrijk gevolg is dat er grenzen zijn aan het bereik van de weervoorspelling. Bij het construeren van steeds grotere computerprogramma's voor een betere beschrijving van het weer, wordt vanaf een zeker punt de voorspelling slechter; het programma gaat steeds meer op het echte weer lijken en alle instabiliteiten van dien vertonen.

Literatuur

Veel van het materiaal dat in dit artikel is bijeen gebracht, is te vinden in het boek van H.W. Broer, J. van de Craats en F. Verhulst, *Het einde van de voorspelbaarheid? Chaostheorie, ideeën en toepassingen*, Aramith/Epsilon Uitgaven, 1995. In de laatste twee paragrafen behandelden we enkele vormen van chaos, er zijn er veel meer. Andere populair-wetenschappelijke en inleidende teksten staan hierna vermeld.

Populair-wetenschappelijke literatuur Dynamische Systemen en Chaos

Broer, H.W., J. van de Craats en F. Verhulst. *Het einde van de voorspelbaarheid? Chaostheorie, ideeën toepassingen*. Aramith/Epsilon Uitgaven, 1995.

Field, M., M. Golubitsky. *Symmetry in Chaos*. Oxford University Press, 1992.

Gleick, J. *Chaos, Making a New Science*. Penguin Books, 1988.

Hall, N. (red.) *The New Scientist Guide to Chaos*. Penguin Books, 1991.

Lauwerier, H. *Fractals*. Aramith Uitgevers, 1987, geheel herziene uitgave 1992.

Mandelbrot, B.B. *Fractals, Form, Chance, and Dimension*. Freeman & Co, San Francisco, 1977.

Peitgen, H.O., P.H. Richter. *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, Heidelberg 1986.

Prigogine, I., I. Stenger. *Orde uit Chaos*. Uitgeverij Bert Bakker, 1990.

Ruelle, D. *De Wetten van Toeval en Chaos*. Aramith Uitgevers, Bloemendaal 1993.

Stewart, I. *Does God Play Dice?* Penguin Books, 1989 (Ned. vert. verkrijgbaar).

Tennekes, H. (red.) *De vlinder van Lorenz*. Aramith Uitgevers, Bloemendaal 1990.

Tennekes, H. *Dan leef ik liever in onzekerheid*. Aramith Uitgevers, Bloemendaal 1990.

Inleidende studieteksten

Broer, H.W., F. Verhulst (red.) *Dynamische Systemen en Chaos, een revolutie vanuit de wiskunde*. Epsilon Uitgaven, Utrecht 1992.

Devaney, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, Redwood City 1989.

Dijkum, D. van, D. de Tombe (red.) *Gamma Chaos, onzekerheid en orde in de menswetenschappen*. Aramith Uitgevers, Bloemendaal 1992.

Ebeling, W., H. Engel en H. Herzl. In *Selbstorganisation in der Zeit*. Akademie-Verlag Berlin 1990.

Guckenheimer, J., P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York 1983.

Gutzwiller, M.C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, New York etc. 1991.

Hommel, C.H. *Chaotic Dynamics in Economic Models, Some Simple Case-studies*. Wolters-Noordhoff, Groningen, proefschrift Groningen 1991.

Laplace, P.S. *Théorie analytique des probabilités*. 3ème éd., p.VI (Introduction). Paris 1820.

Lichtenberg, A.J., M.A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2d ed. Springer-Verlag, New York 1992.

Moon, F.C. *Chaotic Vibrations*. John Wiley, New York 1987.

Peitgen, H-O., H. Jürgens, D. Saupe. *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, 1993.

Planck, M. 'Der Kausalbegriff in der Physik' (1948). In *Wissenschaftliche Selbstbiografie*. Barth, Leipzig (1955).

Poincaré, H. *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. 3 delen. Gauthier-Villars, Paris 1899.

Rasband, S.N. *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. John Wiley, New York 1990.

F. Verhulst

Ruelle, D. en F. Takens. *On the Nature of Turbulence, Communications in Mathematical Physics*. 1971. Vol. 20, p. 167.

Schuster, H.G. *Deterministic Chaos*. VCH Publishers, Weinheim/New York 1988.

Thompson, J.M.T., H.B. Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley, 1986.

Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. 2d revised ed. Springer-Verlag, Heidelberg 1996.