is 29 groter dan 31?

JACQUES HAENEN PDI
MARINUS JANSEN SBD
MIRIAM WOLTERS IPAW

1. Inleiding

Wanneer we een tweede-klasser vragen om op te schrijven welk getal na 55 komt, dan noteert het kind vaak 65. Of het schrijft 69 op als antwoord op de vraag: Welk getal komt vóór 79? Of het omcirkelt van de beide getallen 29 en 31 het eerste, als gevraagd wordt naar het grootste getal. Het gaat hier om typische fouten die in de onderwijspraktijk maar al te bekend zijn.

Volgens onze gegevens maakt ongeveer de helft van de leerlingen in de tweede klas geregeld dit soort fouten. Bij sommige leerlingen verdwijnen ze geleidelijk, bij anderen blijven ze hardnekkig voorkomen en "transformeren" ze tot rekenproblemen. Het zijn fouten waaruit we kunnen afleiden dat de leerling de schrijfwijze van onze getallen niet begrijpt. Jonge leerlingen kunnen vaak de telrij een heel eind foutloos opzeggen, zonder zich bewust te zijn van de structuur die eraan ten grondslag ligt. Vandaar de foute antwoorden op bovenstaande vragen. Dit kan worden voorkomen als het leren noteren van de telrij van meet af aan wordt gekoppeld aan de kenmerken van ons talstelsel: "basis tien" en "positie". In het gangbare onderwijs worden deze kenmerken meestal pas geïntroduceerd bij het cijferend optellen en aftrekken in het derde leerjaar, bijvoorbeeld met behulp van de (papieren) abacus. Vaak ook worden deze kenmerken gebruikt om de leerlingen een strategie te leren als in een som het tiental wordt overschreden. Maar het koppelen van deze kenmerken aan het noteren van de telrij komt in het rekenonderwijs sporadisch voor. Juist deze koppeling legt een goede basis voor het leren cijferen en voorkomt verkeerde denkbeelden over wat getallen eigenlijk zijn. Voor de jonge leerling is een getal vaak een met andere symbolen genoteerd "woordje"; een woord dat tijdens de rekenles nu eenmaal met cijfers en tijdens de taalles met letters geschreven wordt.

Hoe moet echter deze koppeling tussen de kenmerken van ons talstelsel en het noteren van getallen gelegd worden, want het gaat om kenmerken waarvan zelfs volwassenen zich veelal niet bewust zijn. Hoe kunnen we deze koppeling op een didactisch verantwoorde wijze reeds in het aanvankelijk rekenonderwijs introduceren? We hebben een leergang gemaakt voor de eerste klas die de kenmerken van ons talstelsel speels en vertellend introduceert. Dit gebeurt stap voor stap, kenmerk voor kenmerk. De notatiewijze van getallen heeft ook in de geschiedenis van de mensheid een geleidelijke ontwikkeling doorgemaakt. Ons huidige talstelsel is hiervan het resultaat. Bij de opbouw van de leergang zijn we onder meer uitgegaan van deze historische lijn. Zo realiseren we een stapsgewijze introductie die de leerlingen oriënteert op de kenmerken van ons talstelsel en die het inzicht in getallen verdiept.

We geven eerst een overzicht van deze kenmerken en hun historische ontwikkeling. Vervolgens beschrijven we de didactische opzet van de leergang en vermelden resultaten en ervaringen.

2. Ons talstelsel

Ons talstelsel wordt omschreven als een tientallig positie-stelsel. Deze aanduiding bevat de beide kenmerken van ons talstelsel: tientalligheid en positionaliteit. Van deze beide is positionaliteit het belangrijkst. Er wordt mee aangegeven dat de plaats van een cijfer in een getal mede de waarde bepaalt: de 4 in 14 staat voor 4 eenheden, de 4 in 41 staat voor 4 tientallen. Op grond hiervan spreken we van een positiestelsel, ook wel plaatswaardesysteem genoemd. Door een dergelijk positiestelsel te hanteren, kunnen we met een beperkt aantal symbolen (in ons geval tien) de telrij onbeperkt uitbreiden.

Daarnaast is ons talstelsel tientallig. Dit wil zeggen dat in ons talstelsel tien eenheden worden ingewisseld tegen één tiental, tien tientallen tegen één honderdtal, enz. Door deze "basis tien" én door het gehanteerde positiestelsel kan ons talstelsel volstaan met tien cijfers.

De 0 speelt in ons talstelsel een bijzondere rol, het betekent namelijk een lege positie. Het is dus een speciaal teken voor niets! De invoering van een dergelijk symbool is een logisch gevolg van het consequent werken met een positiestelsel. En inderdaad, waar ook elders in de geschiedenis een positiestelsel gebruikt is, in China, in India, onder de Islam of bij de Maya's, op den duur komt er een symbool nul voor de dag, waarmee een lege positie wordt aangeduid.

3. Het ontstaan van ons talstelsel[1]

Tussen 1000 en 5000 voor Christus ontstonden de zogenaamde oersteden. Dit waren plaatsen waar een groot aantal mensen op een relatief klein gebied woonden. Binnen zo'n gemeenschap ontstond de behoefte aan een zekere organisatie om orde en zekerheid veilig te stellen. Economisch en sociaal moest er van alles geregeld en geteld worden: handel, ruilen, eigendom en bezitsverhoudingen, schulden en tegoed. Ook de toenemende kennis van natuurverschijnselen vereiste telactiviteiten en registratie hiervan. Met dit soort gegevens konden voorspellingen worden gedaan, bijvoorbeeld van zaaitijden, die van belang waren voor het sociale en individuele leven.

In grote lijnen komen in de geschiedenis achtereenvolgens drie vormen van tal- of telsystemen voor: het primitieve, het additieve en het positionele. Ver terug in de prehistorie is er waarschijnlijk volgens de primitieve telvorm geteld. Een kelner die achter de bar door turven het aantal gedronken pilsjes bijhoudt, gebruikt deze telvorm nog steeds. Van de additieve telvorm zijn talloze voorbeelden bekend in de geschiedenis. In het additieve stelsel is er sprake van een bundeling van een aantal eenheden, "basis" genoemd. De Egyptenaren kenden bundels van tien eenheden. Eén eenheid wordt weergegeven met 1; een bundel van tien eenheden met ∩, van tien tienen met 𓍢 (100), van tien honderden met 𓆼 (1000) en van tien duizenden met 𓂭 (10.000). Ons getal 43 wordt in het Egyptische stelsel dus als volgt genoteerd: ∩∩∩∩||| of |||∩∩∩∩ of |∩|∩∩|∩. Ongeordende notaties, zoals de laatste twee, kwamen echter niet voor. Gewoonlijk noteerden de Egyptenaren de hiëroglyfen zodanig, dat ze van links naar rechts in waarde opklommen.

Niettemin maakt dit in principe niets uit: hoe de hiëroglyfen in dit geval ook waren gerangschikt, de Egyptenaren interpreteerden dit getal steeds als 43.

De oorspronkelijk gebruikte bundelingen zijn in de latere talstelsels nog vaak terug te vinden. De bundeling van vijf, van tien en soms van twintig eenheden zijn als zodanig nog te herkennen. De associatie met de vingers van één hand, met beide handen, of met handen en voeten is natuurlijk niet toevallig. Deze ledematen waren de natuurlijke tel- en tegelijkertijd registratiemiddelen. Dat er ooit een 20-bundel is gebruikt kunnen we bijvoorbeeld zien in de Franse taal waar 80 quatre vingt (vier van twintig) is of aan het Engelse geldstelsel waarin 1 pond tot voor kort nog 20 shilling waard was.

De notatie van zeer grote getallen is in een additief stelsel niet alleen tijdrovend maar ook onoverzichtelijk. Door het toevoegen van een tweede kenmerk, positie, ontstond het beter hanteerbare positiestelsel[2]. In één oogopslag is de waarde van het getal duidelijk. In eerste instantie was er nog geen cijferaanduiding voor de lege positie. Pas in de 15e en 16e eeuw werd hiervoor de nul ingevoerd.

4. Didactische opzet van de leergang

In de leergang simuleren we een soort historische reconstructie van ons talstelsel. De mens is steeds geavanceerder gaan tellen met een zich steeds wijzigend inwisselprincipe. Steeds anders, maar vooral handiger en systematischer en daardoor overzichtelijker. We doorlopen met de kinderen vier stadia in het weergeven van getallen:

1. Primitieve weergave zonder cijfers en positie (Eelco: de één-op-één vergelijking).
2. Additieve weergave met "basis zes" zonder cijfers en positie (Piet: tellen met twee teleenheden).
3. Additieve weergave met "basis tien" zonder cijfers en positie (Ineke en Tineke: tellen met de vingers).
4. Positionele weergave met "basis tien" met cijfers en positie (Ineke en Tineke: ons tientallig positiestelsel).

De vier stadia van de ontwikkeling van het inwisselprincipe, het tellen en de notatiewijze[3] vinden hun neerslag in drie bedrijven die door ons in een dierenbos zijn gelokaliseerd. Elk bedrijf wordt ingeluid met een verhaal. Aan het begin van de leergang krijgen de leerlingen een boekje met 27 illustraties die op deze verhalen betrekking hebben. Via deze verhalen worden lessituaties gecreëerd waarbinnen de leerlingen allerlei opdrachten moeten uitvoeren. Meestal gebeurt dit op werkbladen.

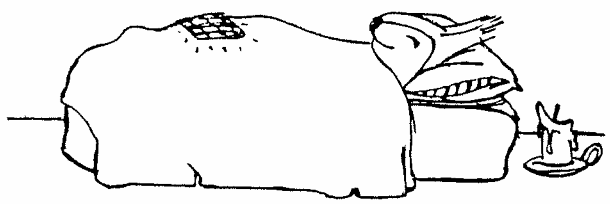
De kern van de leergang is dat de kinderen georiënteerd worden op het afspraakkarakter van de "basis" en op de kenmerken van de te gebruiken symbolen. Deze

oriëntering vindt plaats
1. door een situatie waarin een afspraak nodig is te plaatsen tegenover een situatie waarin die niet nodig is (Eelco) en
2. door de inhoud van de afspraak te variëren zowel naar de "basis" als naar de kenmerken van de gebruikte symbolen.

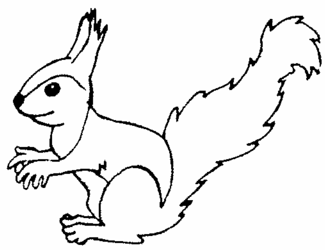
"Basis zes" wordt gebruikt in Piets systeem, "basis tien" in het systeem van Ineke en Tineke. In het systeem van Piet onderscheiden de gebruikte symbolen zich van elkaar qua vorm, in dat van Ineke en Tineke aanvankelijk doordat het vingers zijn van verschillende apen en later door de notatie in verschillende posities.

4.1 Eelco: De één-op-één vergelijking

De één-op-één vergelijking is bedrijf 1 van de leergang. Er wordt geteld zoals onze verre voorouders dat (vermoedelijk) gedaan hebben. De mensheid was toen nog in een fase, waarin het tellen geen levensnoodzaak was. De mens beschikte wel over een zeker hoeveelheidsbegrip op grond waarvan kleine aantallen konden worden herkend en benoemd. Grotere aantallen werden onderscheiden als meer en minder.
In het eerste bedrijf staan we aan de wieg van ons talstelsel. Met behulp van een verhaal over de lotgevallen van Eelco de eekhoorn creëren we een situatie waarin Eelco tot een getalsweergave komt die veel overeenkomsten vertoont met die van onze verre voorouders. Deze getalsweergave berust op de één-op-één vergelijking (vergelijk het turven). Zo deed bijvoorbeeld een schaapherder 's morgens bij het verlaten van de stal voor ieder dier een stokje of steentje in een zak. 's Avonds kon hij dan gemakkelijk controleren of de kudde nog compleet was.



Figuur 1: Eelco de eekhoorn ziek te bed.

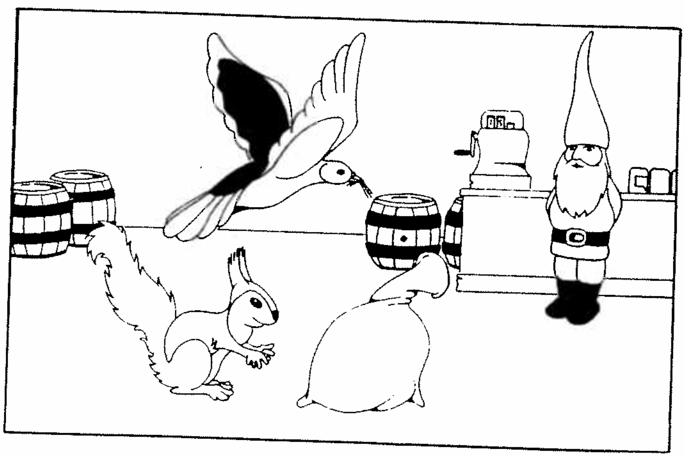


Figuur 2: Eelco de eekhoorn.

Iets dergelijks speelt zich nu ook af bij Eelco en zijn vriendjes. Als Eelco noten aan het verzamelen is voor zijn wintervoorraad valt hij uit een boom en breekt hij een pootje (zie figuur 1 en 2). Alle eekhoorns in het bos beleggen een vergadering om te bespreken hoe ze Eelco kunnen helpen. Dokter eekhoorn stelt voor dat enige eekhoorns Eelco elke dag een paar noten brengen. Omdat eekhoorns getallen niet kunnen weergeven legt dokter eekhoorn voor het bed van Eelco enige takjes. Hij spreekt met de eekhoorns die zich als vrijwilliger hebben opgegeven, af dat zij Eelco elke dag zoveel noten brengen als er takjes voor zijn bed liggen. Vanuit deze situatie voeren de leerlingen verschillende opdrachten uit op basis van de één-op-één vergelijking.

4.2 Piet: tellen met twee teleenheden

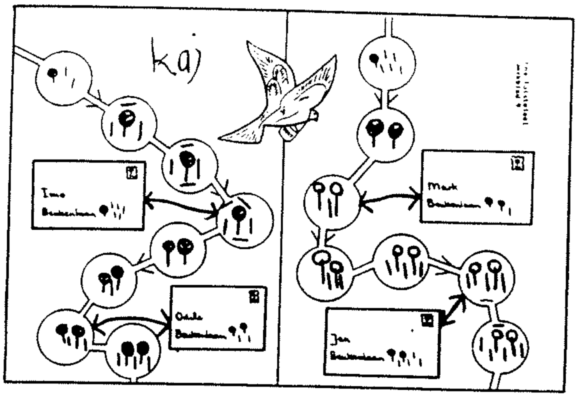
In het tweede bedrijf is Eelco weer beter en loopt met een zak met takjes door het bos. Hij wil zijn wintervoorraad noten veilig stellen en gaat daartoe naar de winkel van Floris de kabouter. Floris is een zeer filantropische kabouter en beheert in het dierenbos een winkel, waar de dieren voor niets allerlei spullen kunnen krijgen. Floris bevoorraadt zijn winkel door elke dag in het bos op zoek te gaan naar spullen die de mensen hebben achtergelaten. Eelco wil aan Floris noten vragen en wel zoveel als hij takjes in de zak heeft. In de winkel van Floris treft Eelco Piet de postduif (zie figuur 3) die vreemd opkijkt van de omslachtige getalsweergave van Eelco. Piet is de postbode van het bos en om dit werk naar behoren te kunnen doen, hanteert hij een meer efficiënte getalsweergave dan Eelco.



Figuur 3: Eelco met zijn zak vol takjes treft Piet de postduif (met blaadjes en grasprieten in zijn bek) in de winkel van Floris de kabouter.

Piet telt volgens een additief inwisselsysteem met "basis zes" en twee symbolen: een blad en een grasspriet (deze symbolen zijn gekozen, omdat Piet daar flinke hoeveelheden van in zijn bek kan vasthouden). Piet hanteert dus een systeem waarin aantallen met twee teleenheden worden geteld. Eerst wordt een aantal zoveel mogelijk uitgeput met de grootste teleenheid. Het aantal keren dat dit gebeurt wordt aangegeven met blaadjes. De rest wordt daarna geteld volgens de procedure: één grasspriet staat voor één ding. Piet geeft de getelde aantallen als volgt weer: I , II , III ,

||||, |||||, φ, φ|, φ||, ..., φ|||||, φφ, φφ|, φφ||, ..., φφ|||||, φφφ, φφφ|, ...
Piets systeem is additief. Het doet er immers niet toe in welke volgorde of ordening de blaadjes en grassprieten neergelegd of getekend worden, de interpretatie van het aantal blijft steeds hetzelfde. Piets systeem heeft in dit opzicht dus geen structuur. Dit in tegenstelling tot ons talstelsel, waarin structuur in de vorm van positie een belangrijke rol speelt[4].

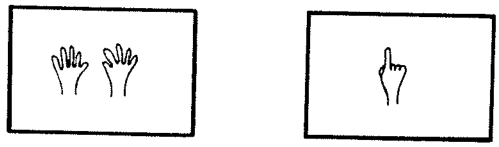


Figuur 4: Werkblad 9 van de leergang waarop Kaj eerst vanuit het eerste -gegeven- nummer de Beukenlaan heeft genummerd en daarna heeft aangegeven waar de brieven gepost moeten worden.

We hoeven dus de getelde aantallen niet zo netjes te noteren als hierboven, want volgorde en ordening van de symbolen spelen in Piets systeem immers geen rol. Een getelde hoeveelheid kan zonder verlies van informatie ook als volgt genoteerd worden: φφ|||φ, of |||φφ|φ (in ons talstelsel is dit 22).
Piet de postduif is zo aardig om Eelco (en dus ook de leerlingen) in te wijden in zijn systeem. Om te oefenen geeft Piet Eelco opdrachten en neemt hij hem mee bij het posten van brieven (zie figuur 4). Zo worden de leerlingen geconfronteerd met een additief inwisselstelsel, waarin nog geen sprake is van cijfers.

4.3 Ineke en Tineke: Tellen met de vingers

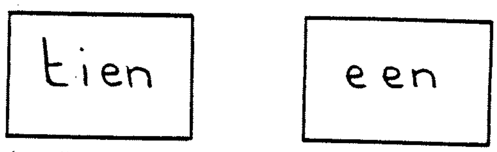
In het derde en laatste bedrijf van de leergang raken de apen Ineke en Tineke verzeild in het dierenbos en worden liefdevol door Floris de kabouter opgenomen. Floris biedt hen onderdak en maakt hen tot compagnons in zijn winkel. Dit betekent dat de apen nu ook op pad gaan om voor de winkel spullen in het bos te zoeken. De dieren in het bos moeten er even aan wennen, maar na een tijdje vinden ze het heel gewoon om twee apen door hun bos te zien lopen met een mand op de rug.
Ineke en Tineke hebben vroeger in een circus gewerkt. Daar hebben ze op hun vingers leren tellen, maar verder dan hun tien vingers komen ze niet. Dit is natuurlijk voor het winkelierswerk een handicap en Piet de postduif leert hen verder tellen met behulp van het inwisselprincipe. Hij stelt voor dat één aap de eenheden telt en de andere de tientallen. Om niet in de war te raken, hangt hij elke aap een bord om. Zo is voor iedereen, maar vooral ook voor de apen zelf, duidelijk wie wat telt.



tientallen-bord eenheden-bord

Figuur 5: De borden die Piet de postduif de apen omhangt. De aap met tien opgestoken vingers op het bord telt de tientallen en de aap met één opgestoken vinger op het bord telt de eenheden.

Twee kinderen worden voor de klas geroepen om de apen Ineke en Tineke te spelen. Ze krijgen twee houten borden omgehangen (zie figuur 5). Allerlei voorwerpen in de klas worden geteld en het eenheden-kind steekt daarbij telkens één vinger op. Bij tien opgestoken vingers wordt er ingewisseld, waarbij het tientallen-kind één vinger opsteekt. Daarna wordt weer bij 1 begonnen. Er wordt dus niet 1, 2, ..., 9, 10, 11, 12, ..., 19, 20, 21, ... enz. geteld, maar 1, 2, ..., 9, 10 - dan inwisselen en daarna weer 1, 2, ..., 9, 10 - weer inwisselen, enz. Het telresultaat wordt steeds verwoord als ''zoveel van tien'' en ''zoveel van één'' (of andersom). Het telresultaat is bijvoorbeeld ''vier van tien'' en ''vijf van één''. Als dit door de klas is vastgesteld, kan de leerkracht vragen of er een kind is die weet hoe we zo'n getal noemen. Sommige leerlingen, maar in de eerste klas lang niet allemaal, weten dat dit het getal vijfenveertig is. Eventueel kan de leerkracht dit getal op het bord schrijven en weer andere leerlingen naar voren roepen om dit getal vanuit de cijfernotatie uit te beelden. Dit uitbeelden van getallen met het verwoorden, benoemen en noteren ervan neemt in het programma een belangrijke plaats in. De kinderen vinden het leuk om met ''grote'' getallen bezig te zijn, ook al weten ze nog niet precies hoe ze die getallen moeten benoemen en noteren.
Na enige tijd draaien we de borden om. Op de achterkant van de borden staan geen vingers meer getekend, maar wordt volstaan met de woorden ''tien'' en ''één'' (zie figuur 6). Deze omkering van de borden levert geen problemen op, want de leerlingen zijn inmiddels gewend om getallen te verwoorden als ''zoveel van tien'' en ''zoveel van één'' (of andersom). Deze omkering is nodig om over te gaan op het uitvoeren van opdrachten op werkbladen. De leerlingen moeten dan in de betreffende kaders ''tien'' en ''één'' invullen, maar vóórdat het zo ver is, moeten ze eerst nog een belangrijke hindernis nemen.



tientallen-bord eenheden-bord

Figuur 6: Op de achterkant van de borden die Piet de postduif de apen heeft omgehangen, staan geen vingers, maar de woorden ''tien'' en ''één''.

4.4. Ineke en Tineke: Ons tientallig positiestelsel

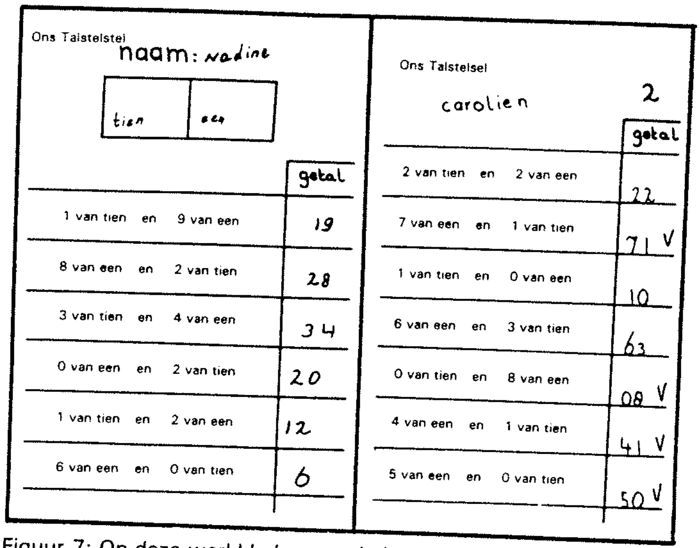
Feitelijk zijn de getallen tot nu toe steeds uitgedrukt in een additief stelsel. Het maakt immers voor de grootte van een getal niet uit in welke volgorde het aantal tientallen en eenheden wordt aangegeven. Door de borden is steeds duidelijk welk kind wat telt. Het doet er niet toe of het tientallen-kind rechts of links van het eenheden-kind staat. Bij het verwoorden van getallen kunnen we immers ook zeggen ''zoveel van één'' en ''zoveel van tien''. De volgorde wordt wél van belang als we getallen met cijfers gaan noteren, want dan komt er een nieuw element, namelijk positie, bij. Deze positionele notatie berust op een afspraak: de tienen links, de enen rechts. Aan deze overgang van additief naar positioneel besteden we in de leergang aparte aandacht. We zullen de procedure en de rol van de leerkracht daarbij kort beschrijven.

Voor de klas wordt een getal uitgebeeld en de leerlingen noteren dit getal als ''...van tien'' en ''...van één''. Het volgende getal wordt genoteerd als ''...van één'' en ''...van tien'', want de leerlingen weten inmiddels dat de volgorde er niet toe doet. Na een paar getallen op deze manier te hebben genoteerd, stelt de leerkracht de klas voor om ''van tien'' en ''van één'' maar weg te laten. Het is zoveel werk en het gaat zo langzaam! ''Laten we alleen maar de cijfers opschrijven,'' stelt de leerkracht voor. Zo verschijnen op het werkblad onder elkaar bijvoorbeeld de volgende cijfers:

3	6
2	8
5	3
4	5

Dan gaat de leerkracht met de klas het getal 3 6 bespreken.

Wat was dat ook weer voor getal? Was dat ''3 van tien'' en ''6 van één'' of ''6 van tien'' en ''3 van één''? Misschien weten sommige kinderen in de klas dat nog, maar de meesten vast niet. Om de verwarring hierover te laten toenemen, bespreekt de leerkracht met de klas ook de volgende getallen. Zo wordt het de klas duidelijk dat ''van tien'' en ''van één'' niet zomaar weggelaten kunnen worden, maar dat je dan eerst een afspraak moet maken over welk cijfer de tientallen en welk cijfer de eenheden aangeeft. Op deze wijze wordt de positionele cijfernotatie geïntroduceerd als een afspraak tussen mensen, met de regels en de consequenties bij het niet herkennen ervan. Op werkbladen wordt de overgang van additief naar positioneel geoefend (zie figuur 7).



Ons Talstelsel
naam: nadine

tien	een

	getal
1 van tien en 9 van een	19
8 van een en 2 van tien	28
3 van tien en 4 van een	34
0 van een en 2 van tien	20
1 van tien en 2 van een	12
6 van een en 0 van tien	6

Ons Talstelsel
carolien 2

	getal
2 van tien en 2 van een	22
7 van een en 1 van tien	71 V
1 van tien en 0 van een	10
6 van een en 3 van tien	63
0 van tien en 8 van een	08 V
4 van een en 1 van tien	41 V
5 van een en 0 van tien	50 V

Figuur 7: Op deze werkbladen van de leergang wordt de overgang van additief naar positioneel geoefend. Op het eerste werkblad moeten de leerlingen eerst de woorden ''tien'' en ''één'' invullen in het kader. Daarna worden de getallen opgeschreven, waarbij het kader als steun functioneert. Op het tweede werkblad gebeurt dit zonder kader als steun.

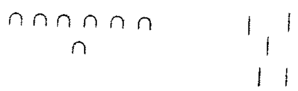
5. Enkele ervaringen

We hebben nu ruim twee jaar ervaring opgedaan met ons talstelsel in drie experimenteerklassen. Over het algemeen genomen zijn de ervaringen goed. De leerkrachten vinden het zinnig om op deze uitgebreide wijze het plaatswaarde-systeem (positiestelsel) te onderwijzen. Ze merken dat de presentatie in de vorm van het dierenbosverhaal aanslaat bij de kinderen en vinden dit leergangonderdeel ieder jaar plezieriger worden.

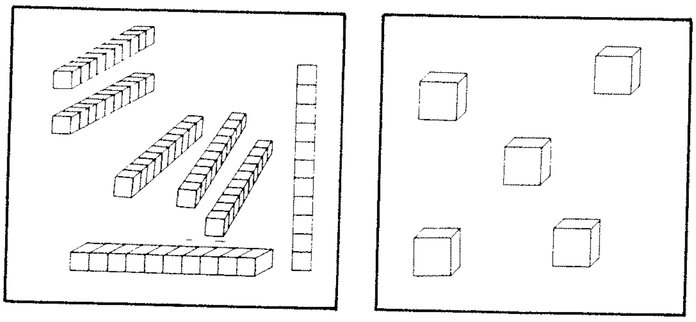
We zullen niet te lang stilstaan bij de dingen die goed gaan. Het heeft natuurlijk meer zin gedetailleerd in te gaan op zaken die fout gaan of fout kunnen gaan.

Als onze leerkrachten moeilijkheden hebben dan treden deze meestal op bij de overgang van additief naar positioneel, daar waar de positie-aanduiding (tien/één,) verdwijnt. Let wel, het zijn de leerkrachten die moeilijkheden ondervinden, niet de leerlingen. Op veel scholen is er van allerhande rekenmateriaal aanwezig. Tot dat materiaal behoren onder meer de ''tienstaven'' en de ''eenhedenblokjes''. Als een leerkracht het leerproces niet soepel genoeg vindt gaan, neemt ze soms haar toevlucht tot dit materiaal. Dit materiaal is echter typisch niet geschikt om de aandacht te richten op het kenmerk ''positie'' van ons talstelsel. Het is materiaal dat zeer geschikt is om een additief stelsel met ''basis tien'' te illustreren.

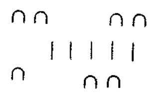
We zullen dit toelichten aan de hand van een voorbeeld. In het voorgaande hebben we gezien dat het oude Egyptische stelsel een additief stelsel is met ''basis tien''. De tientallen worden aangeduid met ∩ , de eenheden met ǀ . We zullen in het Egyptische stelsel op verschillende manieren het getal 75 noteren en dat op dezelfde wijze leggen met tienstaven en eenhedenblokjes (zie figuur 8).



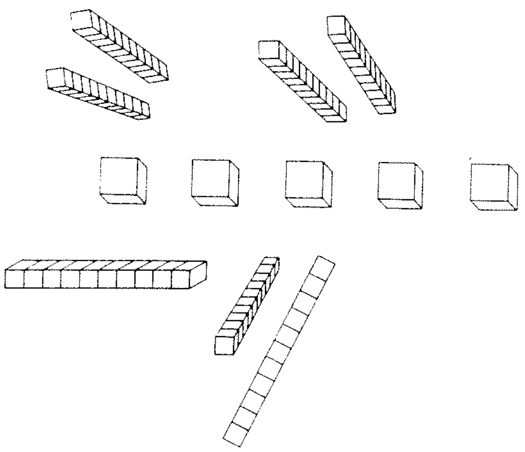
a. Egyptische stelsel - 75



b. Rekenmateriaal - 75



c. Egyptische stelsel 75



d. Rekenmateriaal - 75

Figuur 8: Weergaven van het getal 75 met verschillend materiaal.

In deze figuur is duidelijk te zien dat de positie van de eenheden c.q. de tientallen volstrekt onbelangrijk is. Waar de staven of blokjes ook liggen, het blijft een weergave van ons getal 75. Om het kenmerk positie van ons talstelsel duidelijk te maken moeten we dezelfde soort symbolen gebruiken voor bijvoorbeeld ook blokjes, maar dan ook uitsluitend blokjes. De positie van de symbolen ten opzichte van elkaar bepaalt dan welk symbool de tientallen aangeeft en welk de eenheden. In figuur 9 wordt het getal een-en-twintig met cijfers, respectievelijk met blokjes weergegeven.

t	e	t	e
2	1	□ □	□

Figuur 9: Weergave van het getal een-en-twintig door middel van cijfers en blokjes.

Een ander probleem vormt de relatie tussen notatie en verklanking van een getal. Het is een probleem dat samenhangt met onze taal. We zeggen bijvoorbeeld één-en-dertig, maar we schrijven van links naar rechts 31. De schrijfvolgorde loopt niet parallel aan de klankvolgorde en omgekeerd. In de Engelse taal doet dit probleem zich niet voor; de kinderen zeggen thirty-one en schrijven 31. Dit kan dus betekenen -en het komt ook regelmatig voor- dat een leerling heel goed door heeft dat ons talstelsel positioneel is, maar toch fouten maakt. Als we aan deze leerling vragen hoeveel tientallen één-en-dertig bevat, zegt hij één. Noteren we het getal (31), zodat het kind het kan zien, dan ziet het meteen wat het juiste antwoord is. We moeten de leerlingen dus speciaal attenderen op deze eigenaardigheid in de Nederlandse taal.

6. Resultaten

Om het leergangonderdeel Ons Talstelsel te evalueren hebben we gebruik gemaakt van opgaven uit het Kwantiwijzer-materiaal[5]. Een aantal opgaven zijn klassikaal afgenomen, andere individueel.
De opgaven voor de klassikale afname zijn te onderscheiden in drie verschillende typen, te weten:
- geef het volgende getal (bijvoorbeeld: 35 ..)
- geef het vorige getal (bijvoorbeeld: .. 50)
- omcirkel het grootste getal (bijvoorbeeld: 31 29).

Van deze drie typen opgaven zullen we enkele resultaten geven door middel van het percentage van de leerlingen dat een opgave-type juist uitvoerde. We hebben twee groepen leerlingen: een experimentele groep die het leergangonderdeel gevolgd heeft en een controlegroep die dat niet heeft (zie tabel 1).

	volgend getal voorbeeld 69 ..	vorig getal voorbeeld .. 50	grootste getal voorbeeld 31 29	totaal
experimentele groep	84,6	78,6	87,75	76,98
controle-groep	58,6	59,6	69,25	69,15

Tabel 1: Het percentage leerlingen uit de experimentele en de controle-groep dat de verschillende opgave-typen goed oplost.

We zien in tabel 1 dat de experimentele groep alle opgave-typen beter oplost dan de controle-groep. De meest voorkomende fout bij de vraag naar het vorige respectievelijk het volgende getal is: de verhoging c.q. de verlaging van het cijfer dat op de plaats van het tiental staat.
Naast de klassikale afname hebben we een aantal leerlingen ook individueel een tweetal opgaven voorgelegd. Bij de eerste opgave krijgt de leerling onder elkaar de volgende getalkaartjes voorgelegd:

$\boxed{2}$

$\boxed{3}$

$\boxed{4}$

De vragen daarbij luiden:
Leg het grootste getal.
Wijs het kaartje van de tientallen aan.
Wijs het kaartje van de honderdtallen aan.
Veel leerlingen leggen bij de eerste vraag de kaartjes in de volgorde van de telrij (2-3-4). Ze bekommeren zich niet om de getalswaarde van de cijfers in de verschillende posities. Ook komt het voor dat de leerling wel de waarde van de posities erbij betrekt, maar dan alleen voor tientallen en eenheden (2-4-3). Als vervolgens gevraagd wordt het kaartje van de tientallen aan te wijzen, wordt meestal het eerste, het kaartje met de twee aangewezen. Wordt vervolgens naar het kaartje van de tientallen gevraagd, dan zien we dat sommige leerlingen zich herstellen, terwijl anderen helemaal in de war raken en op goed geluk een kaartje aanwijzen.
Bij de laatste opgave krijgt de leerling een kaartje voorgelegd met drie getallen erop:

375	163	539

De vraag daarbij luidt:
In welk getal zitten drie tientallen?

Als antwoord op de vraag wordt vaak het getal 375 aangewezen. Zowel bij de opgaven met de losse kaartjes als bij deze laatste opgave wijzen veel leerlingen het meest linkse cijfer aan als tiental. Hieruit kunnen we afleiden dat ze weliswaar letten op de plaats van een cijfer, maar nog niet doorzien wat daarmee aan de hand is. Overigens blijkt uit de resultaten dat de experimentele groep het ook bij deze opgaven beter doet dan de controle-groep.

7. Slot

De opgaven die we de leerlingen hebben voorgelegd ter evaluatie van de leergang waren zowel voor de experimentele als voor de controle-groep nieuw. We mogen daarom concluderen dat de experimentele groep door de leergang zicht heeft gekregen op de kenmerken van ons talstelsel. Bovendien hebben we deze evaluatie uitgevoerd aan het eind van de eerste klas. Het is dus mogelijk om reeds in de eerste klas van de basisschool aandacht te besteden aan de kenmerken van ons talstelsel en aan de notatiewijze van de telrij. Deze introductie legt een goede basis voor het rekenonderwijs in de volgende klassen, want gebrek aan inzicht in deze kenmerken leidt vaak tot allerlei rekenproblemen. Een vroegtijdige oriëntering op de kenmerken van ons talstelsel kan veel rekenleed in de hogere klassen voorkomen. De hier beschreven leergang is een voorbeeld waarop een dergelijke oriëntering reeds in de eerste klas kan geschieden.

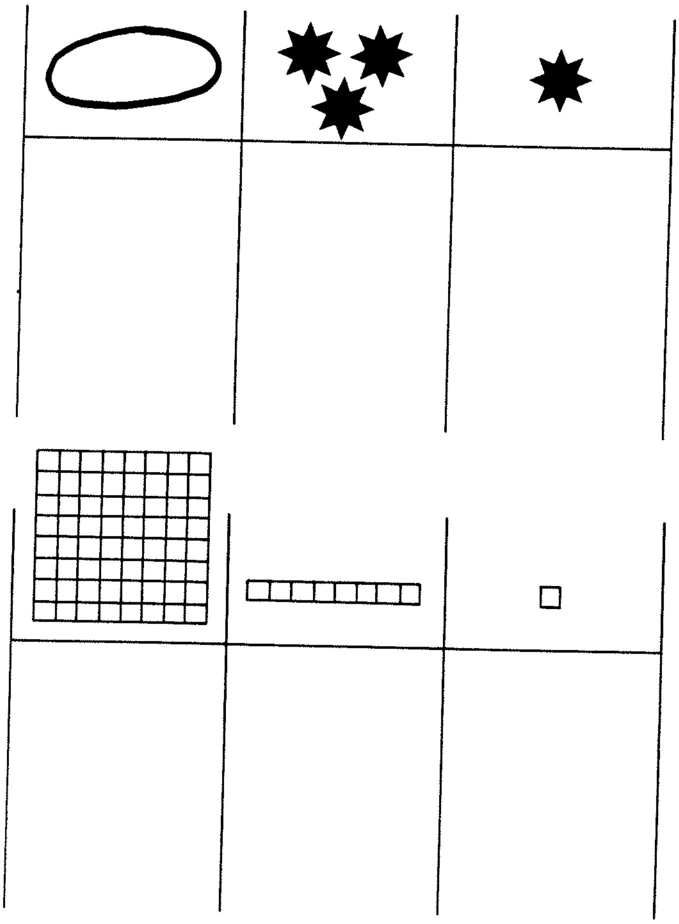
Noten:

(1) Onze gegevens over de geschiedenis van het talstelsel ontlenen we aan:
IOWO, Leerplanpublikatie 6, De abacus, Utrecht 1977.
Klix, F., Erwachendes Denken, Berlin (DDR), 1980.
Struik, D.J., Geschiedenis van de Wiskunde, Amsterdam 1977.

(2) In de geschiedenis zijn sporen terug te vinden van de overgang van een additief naar een positie-stelsel. De oude Chinezen bijvoorbeeld beschikten over verschillende tekens voor tientallen en eenheden. Het getal 2 werd als // genoteerd en het getal 30 als ≡. Deze notatiewijze is additief. Voor honderdtallen en duizendtallen had men geen nieuwe symbolen. Men gebruikte echter dezelfde symbolen, maar nu gekoppeld aan een positie: ≡//≡// betekent dan 3232.

(3) In dit artikel gaat het vooral om de notatiewijze van getallen. Er is echter een duidelijke samenhang tussen notatiewijze en tellen. Worden de getallen 1-10 verschillend benoemd, bij grotere getallen is de benoeming sterk afhankelijk van de notatiewijze zes-tien (zes eenheden van een tiental), twee-en-dertig (twee eenheden en drie tientallen).

(4) In een aantal vernieuwende rekenmethodes vindt men wel het additief noteren waarbij de basis (gedeeltelijk) waarneembaar is:



(5) Het Kwantiwijzer-materiaal is bedoeld om individueel rekenproblemen te diagnostiseren. Door een kleine aanpassing zijn enkele opgaven voor klassikale afname geschikt gemaakt.