GEORG CANTOR EN DE LEER DER VERZAMELINGEN

A. J. E. M. Smeur

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor is op 3 maart 1845 te St. Petersburg geboren. In deze stad had zijn vader, Georg Woldemar Cantor, afkomstig uit Kopenhagen, zich als zakenman gevestigd. Uit bewaard gebleven brieven weten wij, dat hij een ontwikkeld man was en zeer godsdienstig, protestant, van Joodse afkomst. Zijn moeder, Maria Böhm, stamde uit een kunstenaarsgeslacht; zij was katholiek.

In 1856 verhuist het gezin Cantor naar Frankfort am Main; de vader ging, om gezondheidsredenen, een rustend leven leiden. In mei 1862 begint Georg zijn studies te Zürich, aanvankelijk, op wens van zijn vader, voor ingenieur maar al spoedig, met zijn vaders toestemming, wijdt hij zich geheel aan de wiskunde. In 1863, na de plotselinge dood van zijn vader, vervolgt hij zijn studies te Berlijn.

In Berlijn waren drie befaamde wiskundigen zijn leermeesters, Karl Weierstrasz (1815-1897), Ernst Eduard Kummer (1810-1893) en Leopold Kronecker (1823-1891). Op 17 oktober 1867 promoveerde hij op het proefschrift *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*. Een der toegevoegde stellingen is waard gememoreerd te worden: « In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi » en wel om deze reden, dat hij zelf niet alleen veel nieuwe problemen heeft gesteld en ook opgelost maar ook, zoals nog blijk zal, de wiskunde een groot probleem gegeven heeft, dat hij zelf niet heeft kunnen oplossen.

Een medestudent van Cantor en vriend van hem was Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), ook een bekend wiskundige. Beiden waren vol lof en eerbied voor Weierstrasz, beiden ook benauwd voor Kronecker, die zich kantte tegen de wiskundige opvattingen van Weierstrasz en later ook een fel tegenstander van Cantor geworden is. In het voorjaar van 1869 deed Cantor zijn « Habilitation » in Halle; in 1870 werd hij daar buitengewoon- en in 1879 gewoon hoogleraar. Inmiddels was hij in 1874 gehuwd met Vally Guttmann. Uit dit huwelijk zijn 2 zoons en 4 dochters geboren.

Bij Cantors eerste wetenschappelijke werk moet genoemd worden zijn theorie over de reeële getallen. Daardoor kwam hij in kennis met een ander wiskundige, Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), hoogleraar te Brunswijk. In 1872 hebben beiden elkaar ontmoet. Deze ontmoeting heeft geleid tot een levenslange vriendschap en een briefwisseling, die bewaard gebleven is en waaruit wij thans het ontstaan der verzamelingenleer kennen.

In een brief van 29 november 1873 stelt Cantor aan Dedekind de vraag :

> Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen **n** und bezeichne ihn mit (**n**); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgröszen und bezeichne ihn mit (**x**); so ist die Frage einfach die, ob sich (**n**) dem (**x**) so zuordnen lasse, dasz zu jedem Individuum des einen Inbegriffs ein und nur eines des anderen gehört? Auf den ersten Anblick sagt man sich, nein, es ist nicht möglich, denn (n) besteht aus discreten Theilen, (x) aber bildet ein Continuum; nur ist mit diesem Einwande nichts gewonnen und so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, dasz (**n**) und (**x**) keine eindeutige Zuordnung gestatten, kann ich doch den Grund nicht finden und um den ist mir zu thun, vielleicht ist er ein sehr einfacher.

Cantor gebruikt hier nog het woord « Inbegriff », dat hij later zal vervangen door « Menge » (verzameling, set, ensemble). Men kan de vraag ook zo stellen : is het continuum aftelbaar ?

Cantor schrijft nog, dat het gestelde probleem hem al langer bezig houdt, dat hij geen bewijs (bevestigend of ontkennend) vinden kan maar dat hij het probleem verder niet belangrijk genoeg acht om er veel moeite aan te besteden. Later denkt hij daar anders over. Wat betreft het feit, dat hij vermeldt al langer met het probleem bezig te zijn, dient het volgende opgemerkt te worden. In een onlangs verschenen artikel heeft J. W. Dauben erop gewezen, dat in een serie artikelen van Cantor uit de jaren 1870-1872, dus uit zijn beginperiode te Halle, over trigonometrische rijen, al de kern van de latere problemen en de verzamelingenleer is aan te wijzen.

Korte tijd later, namelijk in een brief aan Dedekind van 7 december 1873, schrijft hij, dat hij de oplossing van het gestelde probleem gevonden heeft met als resultaat : het continuum is niet aftelbaar. In de brief geeft hij tevens het bewijs. Dedekind antwoordt de volgende dag en wenst Cantor geluk met het prachtige resultaat. Deze is, met zijn gevonden bewijs, meteen overtuigd van de belangrijkheid van het gestelde probleem. Wil men een geboortedatum aangeven voor de verzamelingenleer, dan kan daarvoor goed de datum der brief genomen worden, 7 december 1873.

Cantors resultaat, het continuum is niet aftelbaar, leert ons, dat oneindige verzamelingen verschillende machtigheid (dit woord is naderhand door Cantor ingevoerd) kunnen hebben. Twee verzamelingen A en

B heten *gelijkmachtig* of *ekwivalent* als er een een eenduidige afbeelding mogelijk is van de elementen van A op die van B.

Cantor gaat met zijn onderzoek van oneindige verzamelingen verder. In een brief van 5 januari 1874 aan Dedekind stelt hij het probleem : is de verzameling van de punten van een vierkant eeneenduidig af te beelden op de verzameling punten van een lijnstuk. Cantor meent, dat het antwoord ontkennend zal moeten zijn; hij heeft echter geen bewijs. Dat laat drie en een half jaar op zich wachten, tot een brief van 20 juni 1877 aan Dedeking en het antwoord blijkt niet ontkennend maar bevestigend te zijn, een zeer onverwacht resultaat. Het bewijs is ook te geven voor hogere dimensies zodat men kan zeggen : de machtigheid van het continuum is onafhankelijk van zijn dimensie.

Dedekind is zeer onder de indruk van Cantors resultaten. Zo ook de vereerde leermeester Weierstrasz. Niet echter Kronecker, een getaltheoreticus, die grote bezwaren had. Hij was een gezaghebbend wiskundig en Cantor heeft zeker onder Kroneckers tegenstand geleden.

Daar kwam voor hem nog bij, dat hij op een probleem stuitte, het beroemde continuumprobleem van Cantor, dat hij niet op heeft kunnen lossen. Dit probleem kan als volgt ingeleid worden. Het aantal deelverzamelingen van een verzameling van n elementen bedraagt 2^n. We beschouwen nu de verzameling V met als elementen alle deelverzamelingen van de verzameling der natuurlijke getallen. De machtigheid van de aftelbare verzamelingen geeft men thans aan met het symbool $\aleph_0$ (aleph-nul). De machtigheid van V is dan te schrijven als $2^{\aleph_0}$. Cantor bewees, dat V een hogere machtigheid heeft dan $\aleph_0$ en wel, dat V gelijkmachtig is met het continuum, met machtigheid $\aleph$ Dus: $2^{\aleph_0} = \aleph$. Hij stelde zich nu de vraag : is $\aleph$, de machtigheid van het continuum, de kleinste, die groter is dan $\aleph_0$, de machtigheid der aftelbare verzamelingen of bestaat er misschien daartussen nog een machtigheid ? Dit is het zogenaamde continuumprobleem van Cantor, daterend van 1884. Zijn vermoeden, dus Cantors continuumhypothese, is, dat het antwoord op het probleem ontkennend luidt. Hij spreekt de hoop uit spoedig een streng bewijs te kunnen leveren; hij is daar echter nooit in geslaagd.

Sinds 1884 was Cantor onderhevig aan neerslachtige stemmingen. Hieraan zullen mogelijk het feit, dat hij er niet in slaagde een bewijs voor zijn continuumhypothese te vinden en ook de tegenwerking van met name Kronecker niet vreemd geweest zijn. Cantor is hoogleraar te Halle gebleven; hij hoopte op een professoraat in Berlijn en dat hij dit niet gekregen heeft verweet hij Kronecker. Anderzijds had hij toch ook weer veel steun in de vriendschap met Dedekind en van de zijde van wiskundigen als Weierstrasz, in Frankrijk Charles Hermite (1822-1901), in Zweden

Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) en later in Duitsland ook nog David Hilbert (1862-1943).

Naderhand werd hij, in 1890 oprichter en tot 1893 eerste voorzitter der « Deutsche Mathematiker - Vereinigung ». Daarna streefde hij naar het tot stand komen van een internationaal Congres van wiskundigen. Het eerste is in 1897 in Zürich gehouden. Cantors theorie vond ruime bijval en erkenning. Volgende congressen waren in Parijs (1900), Heidelberg (1904), Rome (1908), Cambridge (1912). Cantor vond steeds meer erkenning en ontving verschillende internationale onderscheidingen. Hoogtepunt in zijn latere leven werd de viering van zijn 70e verjaardag, 3 maart 1915, toen bleek hoe groot de kring van zijn vrienden en vereerders, in Duitsland en Oostenrijk, was. Op 6 januari 1918 is hij te Halle gestorven.

Bezien wij nog eens de continuumhypothese. Tijdens het congres in Parijs (1900) gaf Hilbert een lijst van 23 problemen, die op een oplossing wachtten en die mogelijk de ontwikkeling der wiskunde in de komende eeuw bepalen zouden. Als eerste noemde hij Cantors continuumhypothese. Na Cantor is de verzamelingenleer verder uitgebouwd maar ook gefundeerd in een axiomasysteem. Eerste vereiste voor zo'n axiomasysteem is, dat het vrij van tegenspraak is. In 1940 bewees Kurt Gödel (1906...), dat, als het vrij van tegenspraak is dan blijft het dat bij aanname van de continuumhypothese. En in 1963 - 1964 bewees Paul Cohen (1935...), dat het ook vrij van tegenspraak blijft bij ontkenning van de continuumhypothese. Ofwel : Cantors hypothese is te bewijzen noch te weerleggen.

Eindigen wij met Hilberts befaamde uitspraak (in : « Über das Unendliche » uit 1926) : « Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können ».

LITERATUUR :

E. T. Bell, Men of mathematics. New York 1937, (hoofdstuk XXIX, p. 613-639).

C. B. Boyer, A history of mathematics. New York 1968.

G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen. Uitgegeven door E. Zermelo, met een biografie door A. Fraenkel. Berlijn 1932; heruitgave Hildesheim 1962.

J. W. Dauben, The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets. In : Archive for history of exact sciences 7, 3, 1971, p. 181-216.

H. Meschkowski, Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig 1967.