9.2.

NEGENTIENDE-EEUWSE DISCUSSIES IN BELGIE OVER DE FUNDERING VAN DE ANALYSE

P. BOCKSTAELE

Met de ontdekking van de differentiaal- en integraal rekening door Newton en Leibniz tussen de jaren 1665 en 1675 begint een nieuwe periode in de ontwikkeling van de wiskunde. Leibniz' eerste publikatie over de analyse verscheen in de *Acta Eruditorum* van 1684. Newton had reeds vóór 1670 sommige van zijn ontdekkingen meegedeeld aan enkele vrienden. Het duurde echter tot 1704 voor hij ze in druk liet verschijnen (afgezien van enkele aanduidingen in zijn *Principia* van 1687). Onmiddellijk bleek deze nieuwe calculus een machtig hulpmiddel te zijn, zowel in de zuivere als in de toegepaste wiskunde. De resultaten waren zo overweldigend en zo overtuigend, dat de bekommernis voor een exakte fundering vaak op het achterplan kwam. Newton, noch Leibniz geven een onaanvechtbare grondslag voor hun methodes. Newton gaat uit van de onderstelling dat het begrip snelheid, waarmee wiskundige grootheden variëren, in zich zelf voldoende duidelijk is. Om het gebruik van oneindig kleine grootheden te vermijden, voert hij het begrip *prima* of *ultima ratio* in ; dat is de verhouding van twee veranderlijke grootheden op het ogenblik dat ze beide nul worden. Leibniz rekent met *differentia's*, die weliswaar niet nul zijn, maar toch mogen verwaarloosd worden t.o.v. andere grootheden. Deze *differentias* of differentialen beschrijft hij soms als grootheden die kleiner zijn dan elke denkbare grootheid, als *quantitates inassignabiles*. Vooral de methode van de differentialen bleek uitstekend geschikt voor praktisch gebruik. Dit versterkte in aanzienlijke mate het geloof in de reële existentie van infinitesimale grootheden.

In de loop van de achttiende eeuw beginnen enkelen zich over de analyse te bezinnen. We noemen in dit verband slechts de namen van d'Alembert en Lagrange. D'Alembert interpreteert de *ultima ratio* van

Newton of de verhouding van *differentias* in de zin van limieten; hij meent dat hierin de basis van de analyse moet gezocht worden. Merkwaardig is wel dat juist tegen deze methode van de limieten zeer lang weerstand is blijven bestaan. Tot in de negentiende eeuw komt steeds het bezwaar terug dat deze methode misschien wel logisch onaanvechtbaar is, maar veel te omslachtig en te moeilijk hanteerbaar. Lagrange formuleert dit in zijn *Théorie des Fonctions analytiques* (1797) als volgt : „Mais il faut avouer que cette idée, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence, et sur-tout pour être présentée aux commençans." Om zowel het gebruik van limieten als van het oneindig kleine te vermijden, stelt Lagrange zijn theorie der afgeleide functies op. Met het behulp van reeksen hoopt hij de analyse zuiver algebraisch op te bouwen. Zijn methode komt neer op het volgende. Is $f(x)$ een functie van x en is i een eindige toename van de veranderlijke, dan kan men $f(x+i)$ schrijven als een reeks van stijgende gehele machten van i :

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$$

Hierin zijn $p, q, r, \dots$ functies van x. Lagrange noemt ze (op een constante factor na) de afgeleide functies van $f(x)$:

$$p = f'(x),\ 2\,!\,q = f''(x),\ 3\,!\,r = f'''(x) \dots$$

Het is duidelijk dat ook Lagrange's theorie geen definitieve grondslag voor de analyse biedt. De gegeven definitie onderstelt nl. zowel de mogelijkheid van de reeksontwikkeling als de convergentie van de reeks en doet derhalve impliciet beroep op het limietbegrip.

Een bevredigende fundering kreeg de analyse eerst tussen de jaren 1820-1830 vooral dank zij het werk van A. Cauchy. Hierin wordt op konsekwente manier een precies limietbegrip als uitgangspunt genomen. Dit betekende echter niet het einde van de strijd over het al of niet bestaan van oneindig kleine grootheden. Sommigen bleven tot in de tweede helft van de negentiende eeuw hardnekkig vasthouden aan de reële existentie van infinitesimale grootheden.

Het is de bedoeling in de volgende bladzijden een illustratie te geven van deze strijd aan de hand van een reeks publikaties over de fundering van de analyse, die in de loop van de negentiende eeuw in België verschenen.

Op wiskundig gebied was de achttiende eeuw in België een soort vacuüm. De ontdekkingen van Newton en Leibniz bleven er praktisch onbekend. Het enige wat over differentiaal- en integraalrekening verscheen, waren enkele bijdragen in de *Mémoires* van de Académie impériale et royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, opgericht in 1772 door Maria-Theresia. De auteurs waren Charles François de Nieuport (1) en Rombout Bournons (2). Laatstgenoemde hield op 8 april 1785 een lezing voor de Akademie met als onderwerp: *La méthode des limites n'est ni plus évidente, ni plus rigoureuse que celle du calcul des infinis, traités selon Leibniz*. De tekst van deze lezing bleef niet bewaard (3).

Eerst na 1814 bloeit de studie van de wiskunde in België weer op, onder meer dank zij de inspanningen van geleerden als Adolf Quetelet (1796-1874) en Michel Pagani (1796-1855). De Koninklijke Akademie werd in 1816 door Koning Willem I der Nederlanden heropgericht. Onder haar leden vinden wij Burggraaf de Nieuport. De eerste twee delen van de *Nouveaux Mémoires de l'Académie* bevatten verschillende mededelingen van zijn hand. Twee ervan handelen over de grondslagen van de differentiaalrekening : *Mémoire contenant quelques réflexions sur des notions fondamentales en géometrie, tant élémentaire que transcendante* (Nouveaux Mémoires, 1, 1820, 433-452) en *Mémoire sur la métaphysique du principe de la différentiation* (Nouveaux Mémoires, 2, 1822, 45-102). De ideeën van de Nieuport komen neer op het volgende. Een cirkel is de limiet van de regelmatige in- en omgeschreven veelhoeken waarvan het aantal zijden onbeperkt toeneemt. Deze limiet wordt werkelijk bereikt op het ogenblik dat de beide veelhoeken, waarvan de corresponderende zijden evenwijdig ondersteld zijn, in elkaar overgaan. De evenwijdige zijden die uiteindelijk samenvallen, veranderen niet van aard en blijven

---

(1) Geboren te Parijs in 1746, overleden te Brussel in 1827. Zie A. QUETELET, **Sciences mathématiques et physiques chez les belges,** Bruxelles, 1866, p. 99-109.

(2) Geboren te Mechelen in 1731, overleden te Brussel in 1788. Bournons was leraar aan het Theresiaans College te Brussel. MAILLY, Ed., Notice sur Rombout Bourbons. **Mémoires courronnés et autres mémoires, Acad. roy. de Belgique,** Coll. in-8°, 27, 1877, 32 pp.

(3) MAILLY, Ed., **Histoire de l'Académie impériale et royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, II** (Mémoires couronnés, Acad. roy. de Belgique, Coll. in 8°, 35, 1833), p. 145-146.

rechte lijntjes. De cirkel bezit dus essentiëel de natuur van een veelhoek, „mais tellement atténuée par la grandeur et la multiplicité des angles, et par la petitesse et le nombre des côtés, qu'elle semble entièrement effacée". Een rechte raakt een kromme in een werkelijk bestaand punt. Het raakpunt is derhalve geen wiskundig punt zonder afmetingen, maar een fysisch punt, dat een zekere lengte heeft. Het contact tussen de kromme en de rechte gebeurt volgens „une petite ligne évanouissante" of een „elementair recht lijntje". De Nieuport beschrijft die elementaire lijntjes als de lijnstukjes die twee direkt op elkaar volgende punten van de kromme verbinden.

Met die ideeën meent de Nieuport verschillende moeilijkheden uit de fundering van de analyse te kunnen opruimen. De „elementaire lijntjes" maken volgens hem o.m. een zinvolle interpretatie mogelijk van de *ultima ratio* van Newton of van de verhouding $\frac{dy}{dx}$ waarin $dx{=}dy{=}0$ is; ze bieden ook een rechtvaardiging voor het verwaarlozen van differentialen van hogere orde. De Nieuport illustreert dit aan het volgende voorbeeld.

Zij gegeven de vergelijking $y^2 = 2ax - x^2$ van een cirkel. Met de toename dx van x correspondeert de toename dy van y. Vervangt men in de gegeven vergelijking x en y door $x+dx$ en $y+dy$, dan komt er :

$$y^2 + 2ydy + dy^2 = 2ax + 2adx - x^2 - 2xdx - dx^2$$

of, rekening houdend met de oorspronkelijke vergelijking :

$$2ydy + dy^2 = 2adx - 2xdx - dx^2$$

Hieruit volgt :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a - 2x - dx}{2y + dy} \qquad [1]$$

Om nu de verhouding dy/dx in het punt $P(x.y)$ te vinden, neemt de Nieuport een dx „qui répondra au véritable premier élément de la courbe ; c'est-à-dire, à celui qui forme son premier incrément, lequel est précisément celui qui se confond avec la tangente menée à l'origine même de cet arc" (4). De verhouding [1] heeft dan dezelfde waarde in de punten (x,y) en $(x+dx, y+dy)$, zodat men in het twee-

(4) J.F. de NIEUPORT, **Mémoire sur la métaphysique du principe de la différentiation,** p. 49.

de lid $dx = dy = 0$ mag stellen, terwijl in het eerste lid $dx \neq 0$ blijft. Er komt dan :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{y}$$

De Nieuport wijst er nadrukkelijk op dat dx en dy in deze betrekking niet nul zijn, maar wel zo klein dat het bijhorende boogje van de kromme een „elementair lijntje" is.

Infinitesimale grootheden hebben voor de Nieuport dus wel degelijk een reële existentie. Ze zijn niet nul en ze worden ook niet opgevat als variabele grootheden. Het is van belang dit laatste punt goed in het oog te houden bij het lezen van 18de- en 19de-eeuwse werken over analyse. Veel van de moeilijkheden kwamen juist voort uit het feit dat men dx en dy opvat als toenamen van x en y, die eerst niet nul zijn, maar daarna toch nul genomen worden, zonder dat hierbij het idee van variabele grootheid of van naar nul convergeren aanwezig is.

Dit komt tot uiting in een poging die de jonge wiskundige François Joseph Gilain een goede twintig jaar later onderneemt om de analyse op te bouwen zonder infinitesimale grootheden. Gilain werd in augustus 1823 te Tienen geboren. Hij studeerde wiskunde aan de universiteit te Brussel. In 1858, kort vóór zijn 35ste verjaardag, overleed hij in zijn geboortestad. Zijn werk over analyse verscheen in 1845 — Gilain was toen 22 jaar oud. Het draagt als titel : *Les vrais principes des calculs différentiel, intégral et des variations, donnant la solution de toute espèce de problème sans le secours des infiniments petits* (Bruxelles, Société typographique belge Adolphe Wahlen, 1845). In de inleiding beschrijft Gilain de pijnlijke indruk die de gebruikelijke uiteenzettingen over de principes van de differentiaalrekening op hem maakten. Hij vraagt zich af hoe het mogelijk is in te zien wat een grootheid is die, zonder nochtans nul te zijn, kleiner is dan elke eindige grootheid : „Non, jamais personne n'a pus comprendre de pareilles absurdités." Toch is hij er van overtuigd dat de wiskundigen onbewust volgens juiste principes redeneren. Het ontdekken van die principes is het doel van zijn werk.

Het begrip afgeleide behandelt hij als volgt. Zij $y = \varphi(x)$ een gegeven functie, Δx een toename van x, Δy de corresponderende toename van y. De afgeleide van $\varphi(x)$ in het punt (x,y) is de verhouding $\Delta y / \Delta x$ als $\Delta x = 0$ is. Die verhouding is dan echter onbepaald. Gilain tracht die onbepaaldheid langs zuiver algebraische weg op te heffen. Hiervoor stelt hij : $\Delta x = f(x,i)$ en $\Delta y = F(y,i)$, waarin $f(x,i)$ en $F\ (y,i)$ willekeurige functies zijn met de eigenschap dat ze nul worden voor $i=0$.

Daar $\varphi(x+\Delta x) = \varphi(x)$ is voor $\Delta x = 0$, is $\varphi(x+\Delta x)$ de som van $\varphi(x)$ en van een functie van x en Δx die nul is voor $\Delta x = 0$ en derhalve Δx als factor bevat :

$$\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \psi(x, \Delta x) \cdot \Delta x$$

Dan is

$$\Delta y = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \psi(x, \Delta x) \cdot \Delta x \qquad [2]$$

De functie $\psi(x, \Delta x)$ bevat een deel dat onafhankelijk is van Δx, zij $\varphi'(x)$, en een deel dat Δx op zijn minst tot de eerste macht als factor bevat :

$$\psi\ (x, \Delta x) = \varphi'\ (x) + \varphi_1\ (x, \Delta x) \cdot \Delta x$$

Men kan nu voor Δy schrijven :

$$\Delta y = \varphi'\ (x) \cdot \Delta x + \varphi_1\ (x, \Delta x) \cdot \Delta x^2$$

waaruit volgt :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'\ (x) + \varphi_1\ (x, \Delta x) \cdot \Delta x \qquad [3]$$

Men mag in deze betrekking nog steeds niet $\Delta x = 0$ stellen, omdat het eerste lid dan onbepaald wordt. Gilain vervangt nu Δx *en* Δy door $f(x,i)$ en $F(y,i)$. Uit $f(x,i) = 0$ voor $i\ =0$ besluit hij, dat alle termen van $f(x,i)$ de factor i bevatten (of dat $f(x,i)$ te ontwikkelen is in een machtreeks van i). $\Delta x = f(x,i)$ is derhalve van de vorm

$$\Delta x = i^p\ \Delta' x$$

waarin $\Delta' x \neq 0$ is voor $i = 0$. Uit [2] volgt dan, dat men voor Δy kan schrijven :

$$+ \quad \Delta y = i^p\ \Delta' y$$

Vervangt men nu in het eerste lid van [3], dan komt er na vereenvoudiging :

$$\frac{\Delta' y}{\Delta' x} = \varphi'(x) + \varphi_1\ (x, \Delta x) \cdot \Delta x$$

Stel nu $i = 0$; $\Delta' x$ en $\Delta' y$ worden δx en δy en men vindt :

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \varphi'(x)$$

Die verhouding is de afgeleide van $\varphi(x)$ in (x,y) ; δy noemt Gilain de *variatie* van de functie die correspondeert met de variatie δx van de veranderlijke.

Het is duidelijk dat in het voorgaande impliciet ondersteld wordt dat $\varphi\ (x+\Delta x)$ te ontwikkelen is in een reeks van stijgende gehele machten van Δx. Dat Gilain zich hiervan bewust is, blijkt uit de volgende opmerking die hij maakt op blz. 5 van zijn werk : « Pour prévenir toute objection, disons que tout ce qui précède ne s'applique qu'aux fonctions $\varphi\ (x+\Delta x)$, qui peuvent se développer suivant les puissances entières et ascendantes de Δx. Cette restriction n'ôte rien à la généralité de la théorie, puisque toutes les fonctions, que l'on considère en mathématique jouissent de cette propriété. » De overgang van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ naar $\frac{\Delta' y}{\Delta' x}$ en $\frac{\delta y}{\delta x}$ is een gecamoufleerde *limietovergang*. Dat de verhouding $\frac{\delta y}{\delta x}$ onafhankelijk is van de keuze der functies $f(x,i)$ en $F(y,i)$ bewijst Gilain niet.

Vermoedelijk bleef Gilains werk vrijwel onopgemerkt en heeft het geen noemenswaardige invloed uitgeoefend. Belangrijker voor de ontwikkeling van de analyse in België waren de publikaties van Ernest Lamarle (5), die bijna dertig jaar lang, van 1838 tot 1867, wiskunde doceerde aan de Gentse universiteit. In 1845 — het zelfde jaar waarin ook Gilains werk verscheen — publiceerde Lamarle een *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante* (6). Het begin met een korte beoordeling van het werk van Leibniz, Newton en Lagrange. In verband met Leibniz merkt Lamarle op dat het bestaan van oneindig kleine grootheden onaanvaardbaar is. Het gebruik van infinitesimale

(5) Geboren te Calais in 1806, overleden te Douai in 1875. DE TILLY, J. Notice sur la vie et les travaux de A.-H.-E. Lamarle. **Annuaire Académie roy. de Belgique,** 45, 1879, 205-253.

(6) **Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège,** 2, 1845-1846, 221-348.

grootheden kan nuttige zijn bij het onderzoek ; deze methode is echter niet algebraïsch en biedt niet de nodige logische waarborgen. Newtons beschouwingen over de *ultima ratio* aanziet Lamarle als gelijkwaardig met de methode der limieten. Hij is van oordeel dat het limietbegrip weliswaar voldoende streng omlijnd is, maar vermoedelijk vreemd is aan de analyse, en daarom vermeden moet worden. Lagrange's theorie is volgens Lamarle zuiver algebraïsch ; hij noemt ze „grande et simple", maar meent dat ze ongeschikt is om praktisch bruikbare rekenregels te geven.

Lamarle's opvatting kan als volgt worden samengevat. Zij de functie $y = f(x)$ continu in het punt $P\ (x,y)$, Δx een toename van x, Δy de corresponderende toename van y. Δx en Δy ontstaan samen, te beginnen bij nul. Dit ontstaan, beschouwd op het allereerste ogenblik, gebeurt volgens een bepaalde wet, de « loi de génération ». Die wet verandert met x, maar voor een bepaalde x heeft ze een vaste vorm. Laat men de wet variëren met x, dan correspondeert met de toename Δx van x de toename Δy van y. Onderstelt men echter dat de wet, te beginnen bij P, niet meer verandert, dan zal aan de toename Δx een toename dy van y beantwoorden. Δy is de effectieve toename van y, dy noemt Lamarle de *differentiaal* van de functie in x. Analytisch drukt men de « loi de génération » uit, door de differentiaal te geven in functie van x *en* Δx :

$$dy = \Phi\ (x, \Delta x)$$

Lamarle bewijst dan, dat die functie kan geschreven worden onder de vorm :

$$dy = f'(x)\ \Delta x$$

Hij toont ten slotte aan dat $f'(x)$ de waarde is waartoe $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nadert, als Δx naar nul gaat.

Uit dit *Essai* blijkt duidelijk dat ook Lamarle opvallend aarzelend staat t.o.v. het limietbegrip. Hij verwerpt dit begrip niet, maar wil toch vermijden het als uitgangspunt van zijn theorie te nemen. Daarom denkt hij zijn „loi de génération" uit, die hij voldoende duidelijk en fundamenteel onderstelt. Die vormingswet vertoont merkwaardig veel overeenkomst met de *prima ratio* van Newton. In feite stelt Lamarle voorop dat die vormingswet bestaat voor elke continue functie, dus dat elke continue functie differentieerbaar is. Dit probleem behandelt hij tien jaar later in een *Etude approfondie sur les deux équations* *fondamentales* $\displaystyle Lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ et $dy = f'(x) \, . \, \Delta x$ (7)

Hij tracht te bewijzen dat een continue functie differentieerbaar is. Op te merken valt, dat in deze studie de afgeleide van $f(x)$ duidelijk als de limiet van de verhouding $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ wordt gedefinieerd.

Ondertussen was de groep van hen die geloofden in de reële existentie van het oneindig kleine echter niet uitgestorven. Twee van de meest hardnekkige verdedigers van het gebruik van infinitesimale grootheden waren Jean Joseph Manilius en Jean Nicolas Noël.

Manilius werd op 3 juli 1807 te Gent geboren en overleed er in 1869. Hij doceerde wiskundige fysika en mechanica aan de Universiteit te Gent (8). In zijn *Cours populaire de calcul différentiel et intégral* (9) omschrijft hij infinitesimale grootheden als volgt: „quantité infiniment petite: c'est-à-dire, tellement petite. qu'on puisse la considérer comme égal à zéro, lorsqu'on la compare à une quantité ordinaire". In 1850 publiceerde Manilius een kleine brochure onder de zwaarwichtige titel *Essai sur la métaphysique du calcul différentiel* (10). Hierin merkt hij op dat het rekenen met oneindig kleine grootheden in strijd schijnt te zijn met de rede. Nochtans is langs andere, logisch onaanvechtbare wegen gebleken, dat deze methode tot exakte resultaten voert. Het moet derhalve mogelijk zijn voor infinitesimale grootheden een definitie te vinden die de rede bevredigt. Hij stelt de volgende oplossing voor. Een lengte is nul t.o.v. een andere, als elk eindig veelvoud van de eerste kleiner is

(7) **Mémoires de l'Académie royale de Belgique,** 29, 1855, 118 pp. Een samenvatting verscheen in **Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique,** 21, 1854, 2me partie, 140-161.

(8) Zie BERGMANS, C., J.-J. Manilius, in: **Liber memorialis Université de Gand,** tome II, Gand, 1913, p. 101-102.

(9) MANILIUS, J., **Cours populaire de calcul différentiel et intégral et de mécanique, à l'usage des architectes, des constructeurs de machines, et des conducteurs des ponts et chaussées.** Gand, Imprimerie et Lithographie de L. Hebbelynck, 1849.

(10) MANILIUS, J., **Essai sur la métaphysique du calcul différentiel, suivi d'une nouvelle theorie sur la flexion des arcs très-surbaissès.** Gand, Imprimerie et Lithographie de L. Hebbelinck, 1850, 20 pp.

dan elke eindige breuk van de tweede. Verlengt men een rechte aan beide zijden onbeperkt, dan krijgt ze een oneindige lengte, die door ∞ wordt voorgesteld. Wordt die rechte verdeeld in een eindig aantal n gelijke delen (Manilius zegt niet hoe men zich dat moet indenken), dan is de lengte $A = \frac{\infty}{n}$ van elk deel nog oneindig. Daar elk eindig veelvoud van een eindige lengte eindig is, is dit veelvoud kleiner dan $\frac{\infty}{n}$. Een eindige lengte is derhalve nul t.o.v. een oneindige lengte.

Een oneindig kleine grootheid ontstaat door een eindige lengte A in oneindig veel gelijke delen te verdelen. De lengte van elk deeltje is dan $\frac{A}{\infty}$. Een eindig aantal van dergelijke deeltjes zijn samen nog kleiner dan elke eindige breuk van A, zodat $\frac{A}{\infty}$ nul is t.o.v. de eindige grootheid A. Manilius zegt uitdrukkelijk dat die oneindig kleine grootheden niet nul zijn « d'une manière absolue », maar dat men nooit een eindige grootheid bekomt, door er eindig veel samen te nemen, m.a.w. dat die grootheden nul zijn t.o.v. elke eindige grootheid.

Ook onder de leraars van het secondair onderwijs trof men voorstanders aan van de oneindig kleine grootheden. Ze roemen er zich op te behoren tot „l'école moderne", die er voor ijvert infinitesimale grootheden ook in het middelbaar onderwijs in te voeren. Een van hen was Jean Lambert Wezel (Waver 1802-1877). Hij was achtereenvolgens leraar aan het College te Leuven en aan het Atheneum te Antwerpen. In zijn *Cours de Mathématiques à l'usage de l'enseignement moyen* gebruikt hij infinitesimale grootheden, o.a. om de verhouding van onderling onmeetbare lijnstukken te definiëren of bij de studie van de cilinder (11). Nog in 1865 — hij was toen reeds gepensioneerd — legt Wezel in een kleine brochure (12) de nadruk op het belang van

(11) WEZEL, J.L. **Cours de mathématiques, à l'usage de l'Enseignement moyen.** 3e partie. **Géométrie élémentaire.** 4me édition, Louvain, Vanlinthout, 1851, pp. 23, 181.

(12) WEZEL, J.L. **De la Méthode dans l'Enseignement des Mathématiques élémentaires.** Louvain, Vanlinthout Frères, 1865, 27 pp.

infinitesimale methodes voor het onderwijs : „Les avantages de la méthode infinitésimale sont tellement manifestes, qu'il est superflu de les faire ressortir. La simplicité et la puissance d'investigation de ce procédé rachètent amplement la prétendue infériorité de rigueur dont on l'accuse, et je n'hésite pas à lui accorder la préférence dans les études."

In een *Note sur l'emploi de l'infini dans l'enseignement des mathématiques élémentaires* (1852) (13) reageert Lamarle tegen dergelijke praktijken. Hij tracht aan te tonen dat het gebruik van het oneindige het onderwijs van de wiskunde tot in zijn oorsprong vergiftigt. Hij keert zich vooral tegen de leraars en de auteurs die aan oneindig kleine grootheden een realiteit toekennen die ze niet bezitten. Met voorbeelden toont hij hoe het gebruik (of misbruik) van het oneindige onder al zijn vormen tot verkeerde conclusies voert.

Deze publikatie was het begin van een lange discussie over het gebruik van het oneidige in de wiskunde. Op 14 juni 1852 stuurt Manilius een nota aan de Académie royale (14), waarin hij poogt Lamarle's argumenten te ontzenuwen. Op advies van Lamarle en Pagani wordt de publikatie ervan geweigerd (15).

Een recensie van Lamarle's *Note* verscheen in het nummer van 10 juni 1852 van het tijdschrift *Moniteur de l'Enseignement* (16). Ze is met het initiaal W. ondertekend, waarachter J.L. Wezel schuil gaat. Wezel is van mening dat Lamarle's werk weinigen zal overtuigen : „Les subtilités de la dialectique de M. Lamarle ne parviendront pas à entraver la marche de l'école moderne; nous pensons au contraire, qu'après avoir lu attentivement le travail de M Lamarle, les adversaires de la nouvelle méthode seront convaincus de l'impossibilité de la combattre, et qu'ils reconnaîtront enfin la justesse et la supériorité." Lamarle beantwoordde de kritiek in het volgende nummer (17). Hiermee startte een lange pennetwist in de *Moniteur de l'Enseig-*

(13) **Mémoires de l'Académie royale de Belgique,** 27, 1853, 31 pp.

(14) Zie : **Moniteur de l'Enseignement,** nouv. série, tome 2, 1852, p. 10.

(15) Rapport de M. Lamarle sur un mémoire de M. l'Ingénieur Manilius, relatif à l'emploi de l'infini dans les mathématiques. **Bulletins Acad. roy. de Belgique,** 19, 2me partie, 1852, 490-495.

(16) **Moniteur de l'Enseignement,** nouv. série, 1, 1851-1852, 351-353.

(17) LAMARLE, E. Emploi de l'infini dans les mathématiques élémentaires. **Moniteur de l'Enseignement,** nouv. série, 1, 1851-1852, 366-369.

nement; hij duurde van juni tot einde november 1852 (het tijdschrift verscheen om de tien dagen), met een korte opflakkering tussen mei en augustus 1853. Daarna werd de discussie buiten het tijdschrift voortgezet. Afgezien van Lamarle, ondertekenen de deelnemers hun bijdragen slechts met initialen: W., N., L.N., J.M., I.B.A., A.P., en A.L.M. Dit zijn in de aangegeven volgorde : Jean Lambert Wezel, Jean Nicolas Noël, zijn neef L. Noël, J. Manilius, Isidore Benoît Annoot, Alphonse Jean Nicolas Paque en August Louis Marchand. De aanvoerder van de verdedigers van het oneindige, — *les infinicoles* zoals ze in de loop van de diskussie wel eens genoemd worden — is J. N. Noël (18), professor aan de universiteit te Luik. Hij werd geholpen door zijn neef L. Noël, door Wezel en Manilius. De tegenstanders van het oneindig kleine — *les infinifuges* — zijn, naast Lamarle, de leraars Annoot (19), Paque (20) en Marchand (21).

De opvatting van de *infinicoles* komt, kort samengevat, neer op het volgende. Het expliciet gebruik van oneindig kleine grootheden en van het oneindige in het algemeen is niet alleen te verdedigen, het is zelfs een van de meest klare, meest eenvoudige, meest instruktieve en meest exakte methodes die men kan aanwenden in de opbouw van de wiskunde, op voorwaarde dat die grootheden zich op een natuurlijke wijze opdringen. Noël definieert oneindig kleine grootheden ongeveer als Manilius : het zijn de deeltjes van een lijnstuk verdeeld in oneindig veel gelijke delen. Dergelijke grootheden zijn natuurlijk kleiner dan elke aanwijsbare grootheid, hoe klein ze ook zij; ze zijn „inassignable", d.w.z. niet nauwkeurig te bepalen, niet aanwijsbaar en dus ook steeds onbekend. Men kan ze echter niet ontgaan in de wiskunde. Ze zijn o.m. nodig om een positieve definitie te geven van een kromme. Wanneer een punt een kromme beschrijft, be-

(18) Geboren te Domberg (dép. des Vosges) in 1783, overleden te Luik in 1867. In 1819 werd hij benoemd tot leraar aan het Atheneum te Luxemburg; in 1835 werd hij professor aan de Universiteit te Luik. Zie A. LEROY, **Liber memorialis. L'Université de Liège depuis sa fondation,** II, Liège, 1869, kol. 484-496.

(19) Geboren te Ieperen in 1819, leraar aan het Atheneum te Brussel.

(20) Geboren te Ben-Ahin (Prov. Luik) in 1825. Hij was achtereenvolgens leraar te Namen en te Luik.

(21) Geboren te Parijs in 1793, overleden in 1871; leraar aan het Atheneum te Brussel.

weegt het zich gedurende een oneindig klein tijdsinterval naar een vast punt. Na zo'n interval verandert het van richting, om een andere oneindig naburige richting te nemen. Het punt beschrijft dus een rij van oneindig kleine segmenten, die Noël de *elementen* van de beschreven kromme noemt. Op een andere plaats stelt hij die elementaire lijnstukjes voor als de intervallen, die twee op elkaar volgende standen van het beschrijvende punt scheiden. Een kromme lijn definieert hij als een gebroken lijn, samengesteld uit oneindig veel oneindig kleine lijnstukjes.
Infinitesimale grootheden zijn ook onmisbaar bij de studie van verhoudingen van grootheden. Noël schrijft hierover het volgende : twee gelijksoortige grootheden hebben steeds een verhouding „exprimable ou inexprimable"; ze hebben derhalve steeds een gemene maat, die al of niet aanwijsbaar is naargelang ze eindig of oneindig klein is. In het laatste geval is de gemene maat weliswaar onbekend, maar ze bestaat; anders zouden de grootheden immers geen verhouding hebben. Zijn de grootheden A en B onderling meetbaar, dan is hun verhouding A/B gelijk aan de verhouding van twee eindige getallen. Zijn A en B onderling onmeetbaar, dan verdeelt men B in oneindig veel gelijke delen x. Men heeft dan : $B = px$ met p oneindig. Dan is $A = nx$ met n eveneens oneindig. De verhouding A/B is dan gelijk aan de verhouding n/p van twee oneindig grote getallen.

Een werkelijk verbluffend argument voor het bestaan van infinitesimale grootheden vinden we in een van de bijdragen van L. Noël (22). Bekend is de steling dat de voortbrengende breuk van een zuiver repeterende breuk gelijk is aan de periode gedeeld door een getal dat bestaat uit zoveel cijfers 9 als er cijfers zijn in de periode. Men kan dit als volgt bewijzen :
Zij x de voortbrengende breuk van 0,4545...

$$
\begin{aligned}
x &= 0{,}4545... & [1]\\
100x &= 45{,}4545... \\
&= 45 + 0.4545... & [2]\\
&= 45 + x \\
99x &= 45
\end{aligned}
$$

De repeterende breuk uit [2] is gelijk aan die uit [1]; ze bevat echter

(22) NOEL, L. Méthode des infiniment petits. **Moniteur de l'Enseignement,** nouv. série, 1, 1851-1852, 401-404.

een periode minder dan de eerste, daar ze ontstaan is door de eerste repeterende breuk met 100 te vermenigvuldigen en *derhalve de laatste periode van rechts verdwenen is.* Daar die weggelaten periode niets aan x verandert, is ze een oneindig kleine grootheid, d.w.z. verwaarloosbaar ten opzichte van x. Ze is echter niet absoluut nul.

De tegenstanders van het oneindige — *les infinifuges* — brengen allerlei bezwaren in tegen deze opvattingen. Lamarle vraagt zich o.a. af hoe een grootheid, vóór ze helemaal verdwijnt, zo kan afnemen dat ze weliswaar niet nul is maar toch kleiner dan elke eindige grootheid. Annoot merkt op dat een oneindige grootheid, verdeeld in oneindig veel gelijke delen, geen oneindig kleine grootheden oplevert, maar eenvoudig nul. Door voorbeelden trachten ze te bewijzen dat het gebruik van het oneindige tot absurditeiten voert.

Veel wordt in deze diskussie naast elkaar gepraat. Geen van de beide partijen heeft een duidelijke en exakte idee van het oneindige. Terwijl dit Lamarle en zijn volgelingen tot voorzichtigheid aanzet, hanteren de verdedigers van het oneindige dit begrip soms op zeer vermetele manier. Nog in het midden van de negentiende eeuw ontbrak bij velen een duidelijk inzicht in het limietbegrip. Door enkelen wordt het zelfs totaal verkeerd geïnterpreteerd.

Uiteindelijk bleven de beide partijen op hun standpunt en na het beëindigen van de diskussie in de *Moniteur de l'Enseignement*, hergroepeerden ze hun geschut en gingen verder hun argumenten te herhalen in een reeks brochures.

In september 1853 publiceerde J.N. Noël een samenvatting van zijn bijdragen uit de *Moniteur de l'Enseignement* onder de titel *De l'emploi de l'infini dans les mathématiques élémentaires* (Liège, H. Dessain, 1853). Onmiddellijk verschijnt een antwoord van I.B. Annoot : *De l'inifini en mathématiques. Réponse à M. Noël* (Bruxelles, Imprimerie de G. Stapleaux, 1853, iv+66 blz.). Noël geeft zich niet gewonnen en herhaalt zijn argumenten in steeds omvangrijker geschriften. In zijn *Théorie infinitésimale appliquée* (Liège, H. Dessain, 1854, viii+104 blz.) bijvoorbeeld lezen wij de volgende affirmaties over oneindig kleine grootheden : „leur existance est certaine et démontrée; leurs définitions sont claires, précises et entierement à la portée des jeunes intelligences, aussi bien par suite que la théorie infinitesimale." Als definitie geeft hij : „Un nombre est dit infiniment petit lorsqu'il est moindre que la plus petite partie *assignable* de l'unité. Un tel nombre est donc absolument inappréciable par sa petitesse et ne pourra jamais s'exprimer en chiffres. Il n'est pas rigoureusement nul, mais il est très-voisin de zéro, et sera toujours *inconnu* et *indéterminé*." Een van Noëls argumenten voor het reële bestaan van oneindig kleine grootheden is het volgende : „Tous les nombres possibles entre 1 et 2 croissent *insensiblement* depuis 1 jusqu'à 2; et il est certain que la différence *d* entre deux de ces nombres, *immédiatement consécutifs*, est si petite qu'elle échape aux sens et à l'imagination. Or bien qu'on ne puisse ni calculer, ni réaliser, ni exprimer, ni jamais connaître cette différence *d*, d'une petitesse excessive, on sait du moins qu'elle existe *nécessairement*, et on lui donne un nom pour la distinguer dans le discours : on l'appelle *infiniment petite*." Noël wijdde ook nog twee publikaties aan het gebruik van infinitesimale grootheden in de meetkunde : *Simplification des éléments de géometrie* (Liège, H. Dessain, 1856, 72 blz.) en *Méthode infinitésimale en géometrie* (Ibid. 1859, 72 blz.) (23).

Lamarle nam niet meer deel aan de diskussies, maar preciseerde zijn opvattingen over de fundamenten van de analyse in *Notions fondamentales sur plusieurs points élémentaires de géometrie, de dynamique et d'analyse transcendante* (24). De methode van Lamarle werd ook uiteengezet en verdedigd door A.J.N. Paque in zijn werkje : *Examen des diverses méthodes employées pour l'établissement et le développement des calculs transcendants* (Liège, H. Dessain, 1860, 152 blz.). Het eerste deel van deze brochure geeft een interressant overzicht van de ontwikkeling van de analyse. Hierin komt ook een beoordeling voor van het werk van Cauchy : het is uitstekend, maar te moeilijk. Paque verwerpt herhaalde malen het gebruik van het oneindig kleine als logisch onbetrouwbaar. J.N. Noël kon een dergelijke veroordeling niet onbeantwoord laten. Hij reageert onmiddellijk in een artikeltje *Notes sur l'analyse infinité-*

(23) Deze twee studies, evenals de **Théorie infinitésimale appliquée** verschenen in de **Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège.** In 1865 werden ze samengebundeld uitgegeven onder de titel : **De l'emploi des grandeurs infinitésimale en mathématiques,** Liège, H. Dessain.

(24) **Mémoires de l'Académie roy. de Belgique,** 30, 1857 XI+44 blz.

simale (25), dat echter niets nieuws bevat. Blijkbaar is men enigszins zijn eeuwige herhalingen moe, want Paque antwoordt er niet op. Wel verschijnt een kritiek van Dr. H.W. Schroeder van der Kolk van Maastricht onder de titel *Notes sur les principes de l'analyse infinitésimale* (26). Hierin wordt het begrip differentiaalquotiënt duidelijk gedefinieerd als de limiet van $\Delta y/\Delta x$ als Δx naar nul gaat. Als nooit versagende verdediger van het oneindig kleine, geeft Noël in 1864 nogmaals een samenvatting van zijn theorie in het artikeltje *Du calcul infinitésimal* (27).

Ook Manilius bleef tot aan zijn dood een trouwe voorstander van het oneindig kleine. De beschouwingen uit zijn geschriftje van 1850 herneemt hij in 1863 in de brochure *Méthode infinitesimale, sans Métaphysique et indépendante de la méthode des limites* (Gand, C. Annoot-Braeckman, 1863, 16 blz.). In 1868, het jaar vóór zijn dood, stuurt hij nog een *Note sur l'interprétation de la conception infinitésimale de Poisson* naar de Akademie te Brussel. De publikatie van dit geschriftje wordt echter afgewezen (28).

Ter afronding van het voorgaande vermelden wij nog de bijdrage van Jean-Baptiste Brasseur tot de fundering van de analyse. Brasseur werd op 24 juni 1802 te Esch-sur-l'Alzette in het Groot Hertogdom Luxemburg geboren. Hij overleed te Luik in 1868, waar hij sinds 1832 verbonden was aan de Universiteit (29). Aan zijn leerling en opvolger François Folie (Venlo 1833 - Luik 1905) liet hij een handschrift na over de principes van de differentiaal- en integraalrekening. Folie voorzag het van een inleiding en commentaar en publiceerde het in de *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège* van 1868 onder de titel *Exposition nouvelle des principes du calcul différentiel et intégral*. Uit het voorwoord vernemen wij dat het werkje ontstond in 1829, maar dat Brasseur er nooit toe kwam

(25) **Revue de l'Instruction publique en Belgique,** 9me année (nouv. série, vol. 4), 1861, 18-24, 89-94.

(26) Ibid., blz. 292-301.

(27) Ibid., 12me année, 1864, 232-239.

(28) **Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique,** 2me série, 27, 1869, 9-10.

(29) LE ROY, A. **Liber Memorialis. L'Université de Liège depuis sa fondation,** 2me partie, Liege, 1869, kol. 77-89. — LE ROY, A. Notice sur la vie et les traveaux de Jean-Baptiste Brasseur. **Bulletino di bibliografia e di Storia delle Scienze matematische e fisiche,** 2, 1869, 10 pp.

het te publiceren, niettegenstaande het aandringen van M. Pagani en anderen.

Brasseurs uitgangspunt is in wezen hetzelfde als dit van Lagrange. Hij neemt aan dat $\varphi(x+dx)$ kan ontwikkeld worden in een reeks van de vorm

$$\varphi(x) + pdx + qdx^2 + rdx^3 + \dots$$

Hiermee definieert hij dan de toename Δy van de functie $\varphi(x)$ als :

$$\Delta y = pdx + qdx^2 + rdx^3 + \dots$$

en de differentiaal dy als

$$dy = pdx$$

Bij Brasseur heeft dx niets meer te maken het de zogenaamde oneindig kleine grootheden ; het is een veranderlijke grootheid die nul tot limiet heeft. In plaats van de dubbelzinnige benaming *infiniment petit* gebruikt hij *indéfiniment petit.*

De publikaties van Brasseurs *Exposition* kwam te laat om nog een belangrijke invloed uit te oefenen. Een verantwoord gebruik van limieten en een beter inzicht in infinitesimale grootheden (variabelen die naar nul convergeren) was reeds in het universitair onderwijs doorgedrongen, in het bijzonder door de lessen van Ph. Gilbert (1832-1892) te Leuven en die van E. Catalan (1813-1894) te Luik. Belangrijk voor een definitieve doorbraak van het limietbegrip als fundament van de analyse was ook het werk van Paul Mansion (1844-1919), die in 1867 Lamarle opvolgde als professor van differentiaal- en integraalrekening aan de Universiteit te Gent.

Berglaan 54
Heverlee-Leuven