LA CONSTRUCTION DES AXES EN AXONOMETRIE ORTHOGONALE

(Aperçu historique)

Lucien Kieffer (Luxembourg)

En 1795 fut publié à Paris dans le recueil des Séances des Ecoles Normales le texte de la sténographie des Leçons de « Géometrie Descriptive » que Gaspard Monge avait données aux élèves de l'éphémère Ecole Normale de l'an III. Brusquement, sous une forme presque définitive, une nouvelle discipline mathématique était née. Monge l'avait conçue dans son esprit dès 1766, année où il commençait à enseigner à l'Ecole Royale du Génie à Mézières.

Quoique son principe : Représenter une figure de l'espace par ses deux projections sur les plans horizontal et frontal de façon qu'elles se correspondent par lignes de rappel, eût été déjà utilisé incidemment par le peintre Albrecht Dürer (1525) et par l'ingénieur français Amédée Frézier (1737), c'est Monge qui réunit les techniques disparates des architectes, des tailleurs de pierre et des ingénieurs militaires en un corps de doctrine cohérent. Dans sa Géometrie Descriptive Monge exposa le tracé des ombres et la perspective, mais ne mentionna pas l'axonométrie.

Le principe axonométrique est le suivant : Le corps est rapporté à un repère spatial Oxyz. Le plan du dessin (plan axonométrique ou tableau) n'est pas horizontal, mais il est incliné et a une position comparable à celle de la toile sur le chevalet du peintre. Le croquis axonométrique est intuitif ; puisqu'il n'y a qu'une seule épure, l'effort de reconstruction spatiale qu'exige la méthode de Monge, devient superflu. Nous ne parlons que de l'axonométrie orthogonale où les projetantes sont perpendiculaires sur le tableau. Les arêtes du trièdre ont alors pour projections les hauteurs du triangle qui sont les supports des axes axonométriques $\bar{O}x$, $\bar{O}y$, $\bar{O}z$ de l'épure. Un segment unitaire porté par les arêtes aura pour projections les cosinus des angles de pente : ce sont

les rapports de réduction dont dépendent les directions des axes. En pratique on ne se donne pas le triangle XYZ d'où l'on pourrait trouver axes et réductions, mais trois nombres simples l, m, n (p. ex. 4, 5, 6) qui soient les projections du segment k des arêtes et qui vérifient
$l^2 + m^2 + n^2 = 2k^2$ et $l^2 < m^2 + n^2 < m^2 \ (+ \ n^2)$, inégalité qui rappelle la relation triangulaire de la géométrie plane.

Le cas le plus simple de l'axonométrie c'est l'isométrie : le triangle XYZ est équilatéral, les axes $\bar{O}x$ et $\bar{O}y$ forment avec la verticale, support de $\bar{O}z$, des angles de 120°. Le premier à employer l'axonométrie sous cette forme fut l'ingénieur anglais William Farish (1759-1833). Alors qu'il était « Jaksonian professor of physics » à Cambridge il publia, en 1820, dans les Cambridges Philosophical Transactions une note : On isometrical Perspective. L'isométrie présente le désavantage de

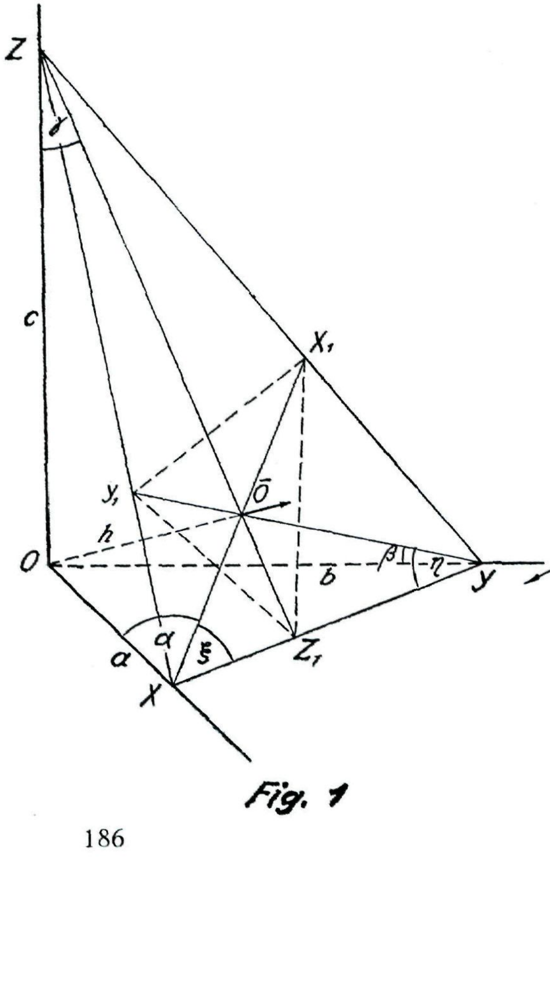

Fig. 1

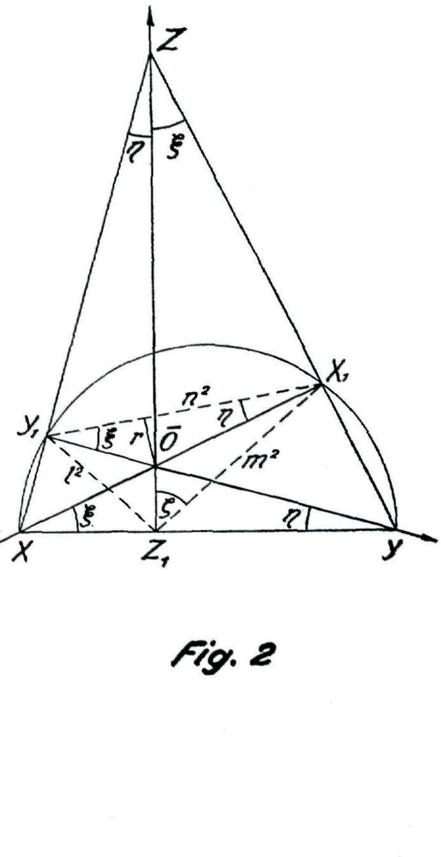

Fig. 2

donner des épures trop symétriques : ainsi le cube se projette comme hexagone régulier. Dans sa Storia della Geometria Descrittiva..., Milano, 1921, Gino Loria attribue à Kepler (Harmonice Mundi 1619, Livre 5, chap. I) cette projection isométrique. En fait l'hexagone de Kepler est inscrit dans un cercle, mais il n'est pas régulier : il s'agit plutôt d'une dimétrie 8:15:15.

Dans le cas de la dimétrie le triangle axonométrique est isocèle : XY = XZ. Dans son « Isometrische Projektionslehre, 1840, Solothurn » le Suisse Möllinger introduisit la dimétrie à la suite de l'isométrie. A l'heure actuelle le procédé le plus répandu c'est la dimétrie 1:2:2, appelée l'axonométrie des ingénieurs.

Le nom d'axonométrie est dû à Ludwig Julius Weisbach (1806-1871), professeur à l'Académie des Mines à Freiberg (en Saxe). Il publia un article « Die monodimetrische und anisometrische Projektionsmethode » qui parut en 1844 dans les Polytechnische Mitteilungen de Volz et Karmasch, t. I. à Tübingen ; puis en 1857 parut à Freiburg son « Anleitung zum axonometrischen Zeichnen. » Grâce à des calculs trigonométriques Weisbach établissait des résultats fondamentaux. Il était le premier à s'occuper de trimétrie (= anisométrie) où le triangle XYZ est scalène et les trois rapports de réduction inégaux. Il élimina les cosinus et exprima les rapports par les nombres simples l, m, n. On connaît le théorème de Weisbach qui s'énonce :

Les carrés l^2, m^2, n^2 des projections du segment k sont entre eux comme les sinus des angles doubles compris entre les axes.

Le théorème fondamental de l'axonométrie : « Le sommet du trièdre spatial se projette en l'orthocentre du triangle axonométrique, « fut énoncé par Schlömilch en 1856 (Der Zivilingenieur t. 2 et Zeitschrift für Math. und Physik., t. 4).

Citons encore Karl Wilhelm Pohlke (1810-1867) qui dans sa Darstellende Geometrie parue en 1860 à Berlin, utilisa un triangle dont les côtés sont proportionnels à l^2, m^2, n^2. Le nom de Pohlke fait penser plutôt à l'axonométrie oblique dont son fameux théorème constitue la clef de voûte.

L'intrusion de la trigonométrie dans une discipline purement géométrique fut mal vue des géomètres de l'ancienne monarchie austro-hongroise. Le premier à réagir fut Joseph Tesar professeur à l'Ecole professionnelle de Brno (Moravie). En 1880 sa note « Ueber den orthogonal-axonometrischen Verkürzungskreis » parut dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Vienne, t. 81. On lui doit le nom de *triangle de réduction* pour un triangle dont les côtés sont proportionels à l^2, m^2, n^2. Tesar démontre dans cette note que le triangle orthique $X_1Y_1Z_1$ du triangle axonométrique jouit de cette propriété. En outre il introduit l'importante notion de *cercle de réduction* qui, 40 ans plus tard, sera la clef d'une construction élégante des axes.

Voici son raisonnement géométrique :

On se donne le côté horizontal du triangle axonométrique XY et on veut trouver la projection $\bar{O}$ du sommet O du trièdre. Le sommet O se trouve sur la sphère de diamètre XY ainsi que sur deux cônes de révolution dont les axes sont les normales en X et Y sur le plan axonométrique et dont les demi-angles au sommet sont les compléments des angles de pente des arêtes. Tesar démontre que les intersections des cônes avec la sphère se projettent comme cercles qu'il nomme cercles de réduction. Ils se coupent au point $\bar{O}$ cherché.

Mais Tesar ne fit point le pas décisif : combiner les cercles avec les longueurs l, m, n.

Citons encore les contributions des géomètres suivants qui concernent la résolution des problèmes métriques : Skuhersky (1858) (Prague) et Staudigl (1875) (Vienne) introduisent une projection de profil associée qui permet d'utiliser le procédé de Monge.

L'axonométrie est une méthode éminemment pratique qui procure aux techniciens des croquis intuitifs sur lesquels il retrouvent facilement les dimensions réelles. Ils ne peuvent s'accommoder de constructions théoriques exactes, mais laborieuses et longues dans l'exécution. Faute de procédés rapides, les associations d'ingénieurs recommandaient l'emploi de patrons pour le tracé des axes.

En 1925 M. P. Pasternak de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich publia dans « l'Enseignement Mathématique, » une « Note sur l'axonométrie orthogonale » dans laquelle il démontra la construction suivante :

Sur une horizontale on reporte bout à bout les longueurs XA = 1^2 AB = n^2, BY = m^2. On décrit les cercles (A, l^2) et (B, m^2) qui se coupent en $\bar{O}$. On trouve de cette manière les axes $\bar{O}x$, $\bar{O}y$ ainsi que $\bar{O}Z$ qui est vertical.

Dans sa démonstration Pasternak utilise en somme le principe du cercle de réduction de Tesar, mais l'introduit uniquement par des considérations de géométrie plane.

Quoique dans la littérature on conserve le nom de Pasternak, il faut remarquer que la même construction est déjà contenue implicitement dans les ouvrages de Géométrie Descriptive de Théod. Schmid (collection Schubert, 1912) et de Louis Kollros (Zurich, 1918). Ces deux donnent une démonstration trigonométrique. Ils déduisent pour le triangle de réduction l^2, m^2, n^2 le théorème des sinus uniquement du fait que l, m, n sont les projections d'une même longueur k portée par les arêtes du trièdre.

La construction de Pasternak vaut pour la trimétrie et pour la dimétrie. Mais après la 2me guerre mondiale elle fut supplantée, dans le cas de l'axonométrie des ingénieurs 1:2:2, par un procédé très simple et très élégant, découvert presque simultanément par plusieurs géomètres. Un triangle auxiliaire $\bar{O}YX$ ($\bar{O}Y = \bar{O}Z$) de côtés 2, 2, 3 où l'un des côtés égaux est appliqué sur la verticale (= $\bar{O}Z$) donne les axes ; $\bar{O}X$ se trouve sur la médiatrice de la base YZ. Des démonstrations parurent dans la revue allemande ZAMM (Revue de Math. et de Mécanique appliquées) : Fritz Rehbock, Zur Ingenieuraxonométrie ZAMM t. 24, 1944 et A. Praetorius. Eine einfache und exakte Konstruktion... ZAMM t. 25-27, 1947 et dans la revue suisse Elemente der Mathematik : Ad. Hess, Bemerkungen zur normalen dimetrischen Anoxometrie t. 1, 1946.

Hess base sa justification sur un rabbattement. Praetorius et Rehbock sur la trigonométrie et la similitude. Rehbock recourt au plan de profil associé de Skuhersky. Il semble que le professeur L. Eckhart de l'Ecole Polytechnique de Vienne fût en possession de la méthode dès 1936.

En 1962 nous avons démontré que les axes d'une dimétrie quelconque sont données par un triangle auxiliaires de côtés n, n, k $\sqrt{2}$ (Archi-

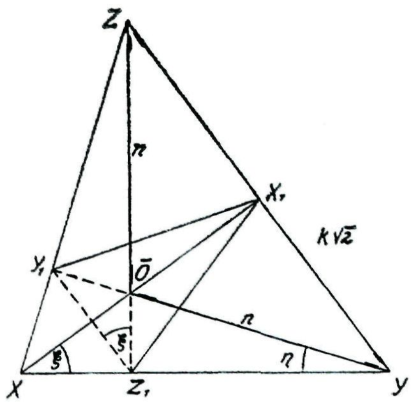

Fig. 3

ves de l'Institut Grand-Ducal, 1962). Nous nous sommes basés sur les propriétés du triangle orthique.

L'importance de la dimétrie 1:2:2 réside dans le fait qu'on peut reporter les vraies longueurs (sans réduction) sur $\bar{O}Y$ et sur $\bar{O}Z$ et qu' on les réduit de moitié sur $\bar{O}X$, quitte à avoir une image légèrement agrandie.

Le problème de la construction des axes peut se poser encore sous une autre forme : Connaissant en grandeur et en position deux des vecteurs l, m, n, construire le 3ème.

En 1840 le grand mathématicien allemand Gauss a trouvé un résultat qui figure sans démonstration dans le tome II de ses œuvres (p. 309) :

« Sind die komplexen Werte der orthographischen Projektion von 3 gleichlangen und unter einander senkrechten Geraden l, m, n, so ist $l^2 + l^2 + m^2 + n^2 = o$.

Gauss considère le plan axonométrique comme plan complexe d'origine $\bar{O}$ où le repère orthonormé est choisi de façon que l'un des axes se trouve sur la projection d'une arête du trièdre.

La somme vectorielle des 3 vecteurs l^2, m^2, n^2 est nulle : cela signifie que les vecteurs forment un triangle, le triangle de réduction. D'autre part la somme des carrés des modules vaut 2. Il est alors possible de construire le vecteur m à partir de l et de n. On obtient le vecteur l^2 en doublant l'argument du vecteur l et en élevant au carré son module.

Géométriquement on élève au carré en construisant sur l le triangle directement sembable au triangle (u, l) où u est le vecteur unitaire sur l'axe réel.

En écrivant la relation de Gauss sous la forme $\frac{m^2}{n} = -\left(n + \frac{l^2}{n}\right)$ on entrevoit les différentes étapes de la construction.

Pour terminer disons un mot de l'axonométrie oblique où les directions des axes ne dépendent pas des rapports de réduction. Le tableau peut être incliné ou même coïncider avec le plan frontal (axonométrie frontale ou perspective cavalière au sens large) ou horizontal (perspective militaire dans le cas de l'isométrie). Deux axes forment entre eux un angle droit, le troisième donne la direction des fuyantes : dans la dimétrie, on réduit les segments portés par cet axe. La perspective cavalière exacte d'une sphère devrait être une ellipse, ce qui choque l'œil. Par conséquent presque toutes les figures du globe terrestre (avec équateur et méridiens) qu'on rencontre dans les manuels de géographie sont fautives.

En 1937 le professeur Ludwig Erhard de Vienne a publié sa méthode des intersections (Affine Abbildung und Axonométrie, C. R. Vienne, IIa 146) qui permet de construire une axonométrie oblique à partir des deux projections de Monge. Le principe de cette méthode est déjà contenu dans la note de G. Hauck, Theorie der parallel projektiv-trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme J. f, r. u. a. Math. 128 (1905).

La simplicité de la méthode des intersections lui a valu une vogue incontestable.