DE TERMINOLOGIE VOOR « CIJFER » IN REKENKUNDIGE TEKSTEN DER LATERE MIDDELEEUWEN

A. J. E. M. Smeur (Gouda)

1. Met cijfer bedoelt men een symbool voor een getalwaarde, bv. een der tekens 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, of 0, de zogenaamde Indo-Arabische cijfertekens, waarmee in de gebruikelijke positionele schrijfwijze ieder getal is weer te geven. Dezelfde betekenis hebben de woorden Ziffer en chiffre. Het Engelse cypher echter, dat cijfer kan betekenen, betekent toch bijna steeds nul, in overeenstemming met de betekenis van het Arabische woord assifr, het lege, waarvan het woord cijfer afgeleid is. In deze betekenis van nul komt het als cyfra, of tziphra, in veel laat-middeleeuwse teksten voor. Het Engelse woord voor cijfer is figure. Ook dit is weer in overeenstemming met de betekenis, die figura in laat-middeleeuwse teksten heeft.

Zo leest men bv. in *Algorismus* van Johannes de Sacrobosco, een werk van circa 1230, dat eeuwenlang in gebruik geweest is (1) :

...novem figurae significativae... quae tales sunt : 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

(De nul wordt nog apart vermeld als cyfra, ook wel figura nihili ; de schrijfwijze der cijfertekens varieert in de verschillende handschriften).

In *Liber abaci* van Leonardus van Pisa, van 1202, staat (2) :

Novem figurae Indorum hae sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Ook in niet-Latijnse teksten komt het woord voor, bv. in een, afkomstig uit Hildesheim (3) :

... 9 figuren ...

Figura dient dus in de letterlijke betekenis genomen te worden. Er wordt mee uitgedrukt de uiterlijke vorm van het teken, de figuur.

Dezelfde betekenis als figura hebben karakter (character) en elementum. In een handschrift in het Brits museum, van omstreeks 1200, staat (4) :

> Loca appeleramus spacia in quibus scribantur karakteres.

De zeer bekende *Arithmeticae practicae methodus facilis* van Gemma Frisius (eerste uitgave : Antwerpen 1540), weliswaar al een gedrukte tekst en van na 1500, begint met :

> Numerare est cuiusvis propositi numerorum valorem exprimere, atque etiam quemcunque datum numerum, suis characteribus adsignare. Duo igitur sunt precipua, per quem cum numeratio tum reliquae deinceps species perficiuntur, characteres, sive elementa, et eorum loca. Elementa sunt decem, quorum novem significativa, unum non significativum, quod, ob receptam consuetudinem, cyphram deinceps appellabimus, scribiturque ut litera .O., vel circulus. Significativa sunt 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

En in een andere gedrukte tekst, uit 1523, staat (5) :

> In universum autem omnis numerus novem istis figuris... terminatur 1 2 3 4 5 6 7 8 9 quos tu caracteres seu figuras Arithmeticas indiscriminatim vocaveris.

In een 12e-eeuwse tekst, getiteld *Algoritmi de numero Indorum* lezen we nog (6) :

> ... multiplicare aliquem numerum in alio per literas indorum ...

en

> ... posuimus duo milia tercentos. XXVI. per indas literas ...

Litera indorum en litera inda zijn hier dus in dezelfde betekenis gebruikt als figura in de voorgaande citaten. De tekst heeft ook nog figura. Er wordt namelijk aangegeven hoe het zoeven genoemde getal 2326 geschreven moet worden ; eerst een 6, dan een 2, die 20 betekent, een 3, die 300 aanduidt, en tenslotte een 2 voor 2000. Dit geheel heet de figura van het getal.

---

2. De term figura en de genoemde synoniemen leveren taalkundig geen problemen ; hun betekenis in een rekenkundige tekst is voor de hand liggend. Nu lezen we echter in een gedrukte tekst van het einde der 15e-eeuw, namelijk in *Arithmeticae summa tripartita Magistri georgii de hungaria*, Schoonhoven 1499, op pag. a2r :

> Tercio est notandum, quod locus limes, differentia et figura apud algoristas pro una et eadem re supponunt.

Figura is reeds besproken. Locus komt in enige der hiervóór gegeven citaten al voor. Het kan in zijn letterlijke betekenis genomen worden : de plaats, die een cijferteken tussen de andere inneemt. De betekenis van limes (grens of weg) en differentia (verschil) is echter niet zonder meer duidelijk. In laat-middeleeuwse teksten vindt men van al de genoemde termen nu eens de ene, dan weer de andere ; het meest echter nog wel differentia. Een verklaring van de betekenis der gebruikte termen ontbreekt meestal. In *Vorlesunger über Geschichte der Mathematik* van M. Cantor komen wel enkele van deze termen ter sprake maar zonder een duidelijke uiteenzetting over hun verschil en samenhang. In *Zahlwort und Ziffer* van K. Menninger, dat sinds de zeer vermeerderde 2e druk van 1958 wel een standaardwerk genoemd mag worden, vindt men alleen figura. In het navolgende willen wij, aan de hand van citaten uit laat-middeleeuwse teksten, de betekenis der verschillende termen nader bezien.

---

3. *Arithmeticae summa* van Georgius de Hungaria vertoont zeer veel overeenkomst met *Algorismus* van Johannes de Sacrobosco. Deze laatste heeft ook de vier termen locus, limes, differentia en figura. In het hierna volgende citaat (7) vindt men de bewering van Georgius de Hungaria terug, maar er volgt nog een toelichting :

> Figura vero, differentia, locus et limes idem supponunt, sed a diversis rationibus imponuntur. Figura enim dicitur, quantum ad lineae protractionem ; differentia vero, quantum per illam ostenditur, qualiter figura sequens differat a praecedente ; locus dicitur ratione spatii, in quo scribitur ; limes vero, quia est via ordinata ad cuiuslibet numeri repraesentationem.

De term figura drukt dus alleen, zoals reeds gezegd, de uiterlijke

vorm uit, datgene wat getekend is : « lineae protractio », de cijfertekens voor de getallen. Drie en vier worden door verschillende figurae weergegeven, namelijk 3 en 4.

Differentia wordt gebezigd om uit te drukken, dat een en dezelfde figura niet zonder meer steeds dezelfde getalwaarde aangeeft. In tweeentwintig bv., in tekens 22, geeft het ene teken twee eenheden aan, het andere twee tientallen. Het gebruik van de term differentia naast figura is een direct gevolg van de positionele schrijfwijze.

De term locus dient ter aanduiding van de plaats waar de figura geschreven wordt.

Limes, zo blijkt uit de toelichting, dient met weg vertaald te worden. Het is de « via ordinata », de aangewezen of geregelde weg, en wel geregeld om elk getal weer te geven.

Op *Algorismus* van Johannes Sacrobosco is een commentaar geschreven door Petrus Philomenus de Dacia, daterend van circa 1291, waarin ook het hiervóór gegeven citaat becommentarieerd wordt. We laten de betreffende passage hier volgen. Wat tussen aanhalingstekens staat is de tekst van Johannes de Sacrobosco ; daartussen en erna staat het commentaar (8) ;

> ... « figura dicitur, quantum ad linearum protactionem », id est, quia sic vel sic lineata sive figurata est ; ... « differentia, quia per eam ostenditur, qualiter figura sequens differt a praecedente », quia aliud significat figura eadem in primo loco et aliud in secundo ; ... « locus dicitur ratione spatii, in quo scribitur ; vocatur » etiam « limes » illud idem, « quia » figura in genere sumpta « est via ordinata ad repraesentationem cuiuslibet numeri ». Nota igitur, quod illud, pro quo omnia haec quatuor supponuntur vel accipiuntur, est ut instrumentum universale in numerando, et vel accipitur ratione viae ordinatae ad cuiuslibet numeri, et sic vocatur limes, quod idem est, quod via ; vel accipitur ratione spatii, in quo scribitur, et sic vocatur locus ; vel ratione talis lineationis, et sic vocatur figura ; vel in quantum figura scripta differat a se vel ab alia scripta alibi, et sic vocatur differentia.

Volgens dit commentaar zijn de vier benamingen in gebruik als alomvattend hulpmiddel bij de numeratio (ut instrumentum universale in numerando). Numerare mag hier niet zonder meer met tellen vertaald worden. Behalve het tellen op zich met als belangrijkste het benoemen der opeenvolgende machten van 10, werd onder numeratio ook verstaan het weergeven van enig getal in Indo-Arabische cijferte-

kens en, als omgekeerde daarvan, de juiste numerieke waarde kennen van een in die tekens geschreven getal (9). Bij de beide laatste aspecten van numerare zijn locus, limes, differentia en figura te gebruiken.

Voor zover in de laatste zin van het commentaar staat : « ... quantum figura scripta differat a se ... scripta alibi », is de betekenis, die aan differentia toegekend wordt dezelfde als bij Johannes de Sacrobosco, dus ook zoals wij hiervoor al schreven bij het voorbeeld 22. Er staat echter ook nog : « ... vel ab alia ... », waarbij alia op figura slaat. Dit zou dan betekenen, dat differentia ook nog het verschil tussen de cijfertekens onderling uitdrukt.

Dat deze veronderstelling inderdaad de bedoeling van de commentator weer zou kunnen geven, kan ook nog eens extra aan de hand van het volgende geïllustreerd worden, te lezen in een rekenkundige tekst uit 1143 (10) :

> istae sunt differentiae : 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Met differentia wordt hier dus hetzelfde uitgedrukt als wat meestal met figura aangeduid werd. In dezelfde tekst vindt men nog enkele malen het woord differentia, bv. bij « De Mediatione » (mediatio, halveren, delen door twee, komt vaak als aparte rekenkundige bewerking voor) :

> Cum vero mediare iubemur, sumentes inicium a prima differentia.

Men kan dit lezen als : het eerste (van rechts te beginnen) cijferteken, en dan had er in plaats van differentia dus beter figura kunnen staan, ofwel als :het cijfer, dat op de plaats der eenheden staat. In het laatste geval is differentia overeenkomstig de in de latere middeleeuwen algemeen gangbare opvatting gebruikt. In de genoemde tekst kan differentia echter steeds goed als cijferteken vertaald worden, maar in zijn inleiding erbij zegt A. Nagl toch wel (pag. 135) :

> Sonst wäre hinsichtlich der Numeration auch noch die Terminologie unseres Textes zu beachten. Derselbe hat für den Begriff der dekadischen Stelle schon den Ausdruck differentia, ...

In een 13e-eeuwse tekst is over differentia te lezen (11) :

> Positio numeri comitatur differentiam.

Met de plaatsing van een getal gaat dus zijn differentia samen. (Het gebruik van het woord numerus is hier verwarrend, er had beter figura kunnen staan ; met numerus is meestal de numerieke waarde van een getal bedoeld). Weer blijkt dus, dat het woord differentia dient om uit te drukken, dat de door een cijferteken aangeduide getalwaarde behalve van dat teken ook nog afhangt van de plaats ervan tussen de andere.

Dezelfde tekst heeft nog (12) :

> ... distinguntur simplices numeri per suas differentias ita ut quelibet differentia IX contineat numeros secundum quantitatem primi ipsorum se transgredientes. Prima igitur est differentia unitatem, ...

Ook blijkt de betekenis van differentia nog duidelijk uit (13) :

> ... Est itaque differentia unitatum ab uno usque ad IX, differentia decenorum a decem usque ad XC, differentia centenorum a C usque ad nongenta, sic usque in infinitum.

In rekenkundige teksten der latere middeleeuwen is differentia zeer gebruikelijk, meestal in zinnen als :

> Ponamus sex milia quadrigentos viginti duo per differentias suas, (14) ...
>
> ... numerum ... per differentias suas pones (15).
>
> ... pone numerum per suas differentias (16) ...
>
> ... scribe numerum ... per suas differentias, (17) ...
>
> ... numerus ... scribendus est ... per suas differentias, (18) ...

Om de betekenis van differentia uit te laten komen zullen we dus moeten vertalen met : schrijf het getal met de tekens, die, naar gelang hun plaats, eenheden, tientallen, hondertallen, enz. aangeven. Hetzelfde kunnen we korter weergeven door : gebruik de positionele schrijfwijze.

Ondanks het algemeen gebruik der uitdrukking differentia lezen we toch ook nog in een traktaat van circa 1400, bij overeenkomstige onderwerpen, zowel (19) :

> ... scribe numerum ... per suas differencias ...

als :

> ... scribe numerum ... per suas figuras ...

waaruit men zou concluderen, dat de schrijver zelf niet het verschil tussen differentia en figura geheel onderscheiden heeft.

---

4. Bezien wij tenslotte wat er aangaande de uitdrukking limes te vinden is. Een (vermoedelijk 12e-eeuwse) tekst van Ocreatus geeft (20) :

> Ordines igitur numerorum sive limites a primis numeris qui digiti vocantur et sunt IX per decuplos in infinitum procedunt. Sunt autem in unoquoque limite numerorum novem termini, ... Omnes autem qui sunt in caeteris limitibus, praeter primum, articuli solent appellari : ut sit primus limes ab I usque ad X, secundus vero a X ... usque ad C, tertio vero a C usque ad mille ...

Limes duidt dus hetzelfde aan als ordo, de rangorde van een getal, in de betekenis van : de eenheden vormen de eerste limes, de tienvouden de tweede limes, de honderdtallen de derde limes, enz. (digiti zijn de gehele getallen een tot en met negen, articuli de tienvouden, compositi de overige natuurlijke getallen). Er lijkt dus eigenlijk geen verschil te zijn tussen limes en differentia. Met even zoveel woorden wordt dit beweerd in (21) :

> Idem est limes et differentia.

Een 13e-eeuwse tekst heeft (22) :

> Separantur autem digiti et articuli in limites. Limes est collectio novem numerorum qui aut digiti sunt aut digitorum equae multiplices quilibet sui relativi. Limes itaque primus est digitorum, secundus primorum articulorum, tercius secundorum articulorum et sic in infinitum. Numerus compositus est qui constat ex numeris diversorum limitum.

De laatste zin kan heel goed vertaald worden als : een samengesteld getal is een getal, dat met meerdere cijfers geschreven wordt. Die cijfers zijn de « figurae » en omdat die figurae op verschillende plaatsen staan, kunnen ze verschillende waarden hebben ; dit laatste heeft geleid tot de term « differentia ». Dus bv. 4272 heeft vier limites (en bv. 3781 heeft dezelfde vier limites), nl. die der eenheden, tien-, honderd- en duizendtallen ; in iedere limes staat een der negen (eventueel tien) figu-

rae 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (0) ; de 2 in de eerste en die in de derde limes geven niet dezelfde waarde aan, vandaar de term differentia.

Vaak komt de term limes voor in de Latijnse zinnen, die tussen de Engelse tekst van *The Crafte of nombrynge* staan, bv. (23) :

> Quaelibet illarum (nl. figurarum) si primo limite ponas,
> Simpliciter se significat : si vero secundo,
> Se decies ...
>
> Articulus si sit, in primo limite cyfram,
> Articulum vero reliquis inscribe figuris,
>
> Et si compositus, in limite scribe sequente
> Articulum, primo digitum ; quia sic iubet ordo.

Met bovenstaande is de term limes, dachten wij, wel voldoende toegelicht. Onbegrijpelijk is dan wat niemand minder dan Johannes de Sacrobosco zegt. Na het citaat, dat wij hiervoor al gaven, en dat eindigt met « repraesentationem », vervolgt de tekst met (24) :

> Sciendum igitur, quod iuxta novem limites inveniuntur novem figurae significitivae novem digitos repraesentantes, quae tales sunt : ...

Hier heeft limes een betekenis, die we verder nergens tegenkomen ; in *Algorismus* van Johannes de Sacrobosco komt het woord niet meer voor. Blijkbaar bedoelt hij, omdat hij van negen limites spreekt, met limes de mogelijkheid (de via ordinata noemt hij het) om een getal met figurae aan te geven. Waar deze afwijkende opvatting als enige naast de andere staat moeten we wel zeggen, dat ze toch niet de gangbare weergeeft.

Vermelding verdient nog een uitzonderlijk gebruik van de term limes — in de gewone hiervóór aangegeven betekenis — dat te vinden is in een tekst van Johannes de Muris (14e eeuw) (25) :

> Et nota quod aliqui volunt dare artem multiplicandi per notas limitum, ut primi limitis nota sit 1, secundi 2, tercii 3 etc. semper, et cum post tres limites ponatur mille per notas, prout scire ordinem et econtra ...

Bij de vermenigvuldiging van bv. 100 en 1000 worden de bijbehorende

« notae limitum », nl. 3 en 4, opgeteld, « a quo deme unum et remanent 6 », de nota van 100.000. In de genoemde tekst wordt deze wijze van rekenen verder uitgewerkt en toegepast bij het rekenen met een abacus ofwel rekenbord. De methode was reeds door Archimedes aangegeven (26), maar schijnt na hem niet meer gebruikt te zijn. Het « deme unum » had, zoals men gemakkelijk opmerkt, vermeden kunnen worden als alle « notae limitum » één kleiner genomen waren.

---

5. In *Algoritmi de numero Indorum* (27) wordt bij de behandeling van vermenigvuldigen aangegeven hoe de vermenigvuldiger onder het vermenigvuldigtal geplaatst moet worden :

> Eritque prima mansio eiusdem numeri sub ultima mansio primi numeri quem posuisti.

Hier zullen we moeten vertalen : en dan zal (de plaats van) het eerste cijfer van dat getal onder (de plaats van) het laatste komen van het eerder geschreven getal. Mansio, verblijfplaats, betekent hier blijkbaar de plaats van een cijfer in een getal. Het heeft dus dezelfde betekenis als het door Johannes de Sacrobosco tegelijk met limes, differentia en figurae genoemde locus.

Dezelfde betekenis hebben waarschijnlijk « statio » en « species » in een, niet steeds geheel duidelijke, tekst van 1143 (28).

Verder komen, in de hier genoemde betekenis, mansio, statio en species nergens voor ; het is dus wel zeker, dat dit geen gangbare benamingen geweest zijn.

SUMMARY

In **Arithmeticae summa** of Georgius de Hungaria, printed at Schoonhoven, 1499 is stated that locus, limes, differentia and figura are used for one and the same thing. The Latin word figura has the same meaning as the English word figure, a sign or symbol to denote some numerical value. The Dutch word for figura is cijfer, just like chiffre (French) and Ziffer (German). Synonyms of figura are ‚character elementum and litera inda. Locus is used to express, in a written number, the place of a figure between others. The same meaning have mansio, statio and species, although the use of these is known in only one case. The word differentia expresses that the value of a figure differs according to the place of that figure between others. This fact is a consequence of the new manner to write a number in the decimal positional system. So « scribe numerum per suas differentias » is the usual

way to say, during the second half of the middle ages : write a number by his figures, which figures have different values according to their place.
Limes is the word to denote the various orders in a number, the units (the first limes), the tens (the second limes), the hundreds (the third limes) and so on.

(1) M. Curtze, Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannes de Sacrobosco Commentarius, una cum algorismo ipso edidit ..., Kopenhagen 1897, 2 (exemplaar in U. B. Utrecht). De tekst van de Algorismus ook in : J. O. Halliwell, Rara mathematica, London 1841 (exemplaar in K. B. Brussel). Reproductie in K. Menninger, Zahlwort und Ziffer 2, Gottingen 1958 ; 216.

(2) Geciteerd in K. Menninger, Zahlwort und Ziffer 2 ; 243.

(3) Fr. Unger, Das älteste deutsche Rechenbuch. In : Historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik 33, Leipzig 1888 ; 125.

(4) L. C. Karpinsky, Two twelfth century algorisms. In : Isis 3, Brugge 1921 ; 403. Op pag. 398 worden enkele vindplaatsen van « karakter » gegeven.

(5) Compendiaria supputandi ratio, Deventer 1523 ; A2v. Ook A. Smeur, De 16e-eeuwse Nederlandse rekenboeken, den Haag 1960 ; 67.

(6) B. Boncompagni, Trattati d'arithmetica I, II, Roma 1857 ; 10 en 11. Volgens D. E. Smith, History of mathematics I, Boston 1951 ; 170 en 203, is Algoritmi de numero Indorum van circa 1140.

(7) M. Curtze ; 1 en 2.

(8) M. Curtze ; 25 en 26.

(9) Zie bv. het gegeven citaat van Gemma Frisius.

(10) A. Nagl, Ueber eine Algorismus-schrift des XII-Jahrhunderts und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christl. Abendlande. In : Zeitschrift f. Math. u. Phys. Hist.-lit. Abt. 34, 1889 ; 240. De 12e-eeuwse cijfertekens zijn nog niet dezelfde als de thans gebruikelijke.

(11) G. Eneström, Uber eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift. In : Bibliotheca mathametica 8(3), Leipzig 1907-1908 ; 138.

(12) Een bijna gelijkluidende tekst in : G. Eneström, , Uber die « Demonstratio Jordani de algorismo ». In : Bibl. math. 7(3), 1906-1907 ; 27.

(13) M. Cantor, Ueber eine Codex des Klosters Salem. In : Zeitschr. f. Math. u. Phys. 10, Leipzig 1865 ; 2. De tekst is van ca 1200.

(14) Algoritmi de numero Indorum ; 9. Zie aantekening (6) (12e eeuw).

(15) Ioannis Hispalensis Liber algorismi de pratica arismetrice. Trattati II ; 30. Zie aantekening (6) (12e eeuw).

(16) L. C. Karpinsky, Two twelfth century algorisms ; 404. Zie aantekening (4).

(17) Sacrobosco. M. Curtze ; 2. Zie aantekening (1) (13e eeuw).

(18) Arithmeticae summa tripartita Magistri georgii de hungaria, Schoonhoven 1499 ; a2r.

(19) F. J. Studnicka, Algorismus prosaycus magistri Christiani anno fere 1400 scriptus. In : Sitzungsberichte der königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Math.-naturwissensch. Classe 1893, Prag 1894 ; 7en 9.

(20) Ch. Henry, « Prologus N. Ocreati in Helceph ad Adelardum Batensem Magistrum suum », Fragment sur la multiplication et la division. In : Abhandl. z. Gesch d. Math. 3, Leipzig 1880 ; 132. Het in dit citaat voorkomende terminus moet niet met cijfer, maar met : uitdrukking, of : term (voor de getalwaarde) vertaald worden. Een soortgelijke tekst, beginnend met « Ordines vero sive limites numerorum » bij Ioannes Hispalensis Liber. Trattati II ; 27.

(21) Artikel, aangegeven in aantekening 12 ; 27.

(22) G. Eneström, Der « Algorismus de integris » des Meisters Gernardus. In : Bibl. math. 13(3), 1912-1913 ; 291.

(23) R. Steele, The earliest arithmetics in English, London 1923 ; 4 e.v.

(24) Zie de citaten, waarbij aantekening (1) en (7).

(25) A. Nagl, Das Quadripartitum des Ioannes de Muris und das praktische Rechnen im vierzehnten Jahrhundert. In : Zeitschr. f. Math. u. Phys. 34, Suppl. 1890 ; 143-145.

(26) J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik I, Berlin-Leipzig 1930 ; 97. M. Cantor, Vorlesungen I, Leipzig 1907 ; 318 e.v.

(27) B. Boncompagni, Trattati I ; 10. Zie aantekening (6).

(28) A. Nagl, Ueber eine Algorismusschrift ; 240. Zie aantekening (10).