Review van het boek "subsystems of Second Order Arithmetic (second edition)" door Stephen G. Simpson. Cambridge University Press, 2009.

De eerste editie van dit boek verscheen in 1999, maar werd niet in dit tijdschrift besproken. Deze tweede editie verschilt (aldus het voorwoord) alleen van de eerste in correcties van typefoutjes en bijwerking van de bibliografie.

De grondgedachte van dit boek is de volgende. Volgens Hilbert (en Bernays, in hun *Grundlagen der Mathematik I*, 1934) kan het leeuwendeel van de alledaagse, zeg maar bachelor-niveau, wiskunde worden opgeschreven in de taal van de *tweede-orde rekenkunde*. Dit is een taal met variabelen voor natuurlijke getallen en voor verzamelingen van natuurlijke getallen. We kunnen nu axiomatische systemen in deze taal beschouwen die (naast evidente axioma's die de optelling en vermenigvuldiging van natuurlijke getallen definiëren) het volgende *inductie-axioma* hebben:

$$\forall X\,[(0 \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow x+1 \in X)) \rightarrow \forall x(x \in X)]$$

waar X een verzameling van natuurlijke getallen voorstelt, en x een getal. Wat met zo'n axioma te bewijzen is, hangt er natuurlijk van af, hoeveel deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ men in het systeem kan definiëren. Een *set existence axiom* is een axioma van de vorm:

$$\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \phi)$$

waar ϕ een formule is uit een bepaalde klasse. Verschillende set existence axioma's geven verschillende axiomatische systemen; het boek behandelt er vijf. Het idee is nu, precies te klassificeren welke set existence axioma's nodig zijn om wiskundige stellingen te kunnen bewijzen.

Zo'n klassificatie lukt, als men niet alleen met een set existence axioma een wiskundige stelling kan afleiden, maar andersom ook uit de wiskundige stelling het axioma (daarvoor is het van belang dat zowel de wiskunde als de set existence axioma's in dezelfde taal geformuleerd zijn). Een voorbeeld van zo'n bewijs is dat van Kelley (1950), dat de stelling van Tychonoff (een willekeurig product van compacte topologische ruimten is compact) het keuze-axioma impliceert.

Het programma dat behelst elementaire wiskunde op deze manier axiomatisch te onderzoeken heet *reverse mathematics* (wiskunde "in zijn achteruit", omdat men axioma's afleidt uit stellingen i.p.v. omgekeerd) en is in de vroege jaren '80 geformuleerd door H. Friedman.

Het zwakste hier beschouwde systeem is RCA_0, waarin alleen recursieve verzamelingen kunnen worden gedefinieerd. Alle klassificaties worden in dit systeem bewezen. Een voorbeeld: het axioma ACA_0, arithmetische comprehensie, is relatief tot RCA_0 equivalent met de stelling van Bolzano-Weierstraß uit de analyse.

Op deze manier is een indrukwekkende hoeveelheid wiskunde geklassificeerd en de bevinding is, aldus de auteur, dat er een natuurlijke onderverdeling is in 5 systemen. In volgorde van toenemende bewijskracht: RCA_0, WKL_0, ACA_0, RTA_0, $\Pi^1_1{-}\mathrm{CA}_0$.

De auteur meent dat dit werk van groot belang is voor de grondslagen van de wiskunde. Grondslagen van de Wiskunde, te onderscheiden van andere technische disciplines in de Logica, onderzoekt de precieze verhouding tussen de wiskundige praktijk en de axiomatische onderbouwing. Volgens de auteur is dit gebied ten onrechte verwaarloosd en is de in dit boek neergelegde studie van groot filosofisch belang.

Uw recensent heeft m.b.t. dit laatste wel enige reserves. Het formuleren van wiskunde in een formeel systeem zoals tweede-orde rekenkunde vergt een aanzienlijke *codering* van wiskunde: door middel van een eenvoudige bijectie $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kan men elk natuurlijk getal opvatten als code voor een geordend paar natuurlijke getallen en dus (met nog iets meer werk) als rationaal getal; een reëel getal is een verzameling rationale getallen; maar als men over functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wil praten, wordt het ingewikkelder. Nog afgezien van willekeurige *deelverzamelingen* van $\mathbb{R}$. Voor een klassificatie van *filosofisch belang* zou men moeten bewijzen, dat de axiomatische analyse niet van het formele systeem en de codering afhangt. Het boek gaat op dit punt niet in, hoewel resultaten van U. Kohlenbach suggereren dat als men andere formele systemen neemt, men andere klassificaties krijgt.

Niettemin is dit een buitengewoon waardevol boek. Niet alleen omdat veel standaard-wiskunde ter sprake komt (analyse; algebra van aftelbare groepen, ringen, lichamen en vectorruimten; separabele metrische ruimten; stellingen uit de combinatoriek; meetkunde; theorie van partiële ordeningen; functionaal-analyse; verzamelingenleer) maar ook omdat bestudering van de technieken die voor de klassificaties gebruikt worden de lezer een hoop leert over centrale onderwerpen in de Logica: met name recursietheorie, modeltheorie en decriptieve verzamelingenleer. Bovendien is de kernactiviteit, het formuleren van wiskunde in een logisch, formeel systeem, iets waarmee iedereen die Logica wil leren, op den duur vertrouwd moet zijn.

Het boek is dus uitstekend materiaal voor een (gevorderd) studentenseminarium, en de presentatie leent zich daarvoor zeer goed. Het is helder geschreven, bewijzen zijn kort en duidelijk, en er staan veel opgaven in.

Jaap van Oosten, departement Wiskunde, Universiteit Utrecht