

Samenvatting

In dit proefschrift wordt het begrip boomachtige verzameling geïntroduceerd. Eenvoudig gezegd, kan dat begrip als een veralgemenisering van het concept simpliciale verzameling gezien worden. Maar terwijl simpliciale verzamelingen vooral zeer geschikt zijn voor het bestuderen van topologische ruimtes, zijn boomachtige verzamelingen ergens anders nuttig voor.

Simpliciale verzamelingen hebben een sterk verband met categorieën. De wiskundige Grothendieck heeft aan elke kleine categorie een simpliciale verzameling gerelateerd die de nerf van die categorie heet. Deze constructie levert een functor van de categorie van alle kleine categorieën naar de categorie van simpliciale verzamelingen. Een simpliciale verzameling die de nerf van een categorie is kan gekarakteriseerd worden met behulp van een zekere opvul-conditie. Namelijk, een simpliciale verzameling is de nerf van een categorie dan en slechts dan als elke inwendige hoorn in de simpliciale verzameling op precies één manier opgevuld kan worden. Als we de eenduidigheid van de opvulling laten vallen dan komen we aan het begrip quasi-categorie dat recentelijk door Joyal is bestudeerd.

Een ander concept van veel belang in dit proefschrift is dat van een operade. Operaden werden in de jaren '70 geïntroduceerd in het gebied van de algebraïsche topologie en zijn sindsdien nogal populair geworden, voornamelijk in het onderzoeken van verzwakte algebraïsche structuren. Ofschoon de fundamentele van de operadentheorie algemeen bekend zijn, geven wij in dit proefschrift een andere benadering tot operaden. Wij beschouwen operaden als een veralgemenisering van het begrip categorie op de volgende manier. In een categorie heeft elke pijl een domein en een codomein die allebei een object van de categorie moeten zijn. Als we in plaats van een object een rij van objecten toestaan als het domein van een pijl dan komen we aan het concept van operade.

De nerf-constructie van categorieën en het gezichtspunt van operaden als een uitbereiding van categorieën leidt tot de vraag of men de nerf van een operade kan definiëren. Om deze vraag te beantwoorden definiëren we de categorie Ω . De objecten van deze categorie zijn zekere niet-planaire gewortelde bomen en de pijlen tussen twee bomen zijn de pijlen tussen zekere operaden die met de bomen geassocieerd zijn. Deze categorie bevat de simpliciale categorie Δ als een volledige subcategorie. De categorie van boomachtige verzamelingen is dan de categorie van preschoven op Ω en de nerf-functor van categorieën kan uitgebreid worden tot een boomachtige nerf-functor van operaden. Het karakteriseren van simpliciale verzamelingen die de nerf van een categorie zijn kan veralgemeniseerd worden om de nerven van operaden te karakteriseren. Preciezer gezegd, het begrip van een hoorn blijft zinvol ook in de context van boomachtige verzamelingen en dus kan over opvulcondities in een boomachtige verzameling gesproken worden. Een boomachtige verzameling is dan de nerf van een categorie dan en slechts dan als elke inwendige

hoorn op precies één manier opgevuld kan worden. Als we de eenduidigheid laten vallen dan komen we aan het begrip inwendig Kan complex. In het bijzonder, is elke quasi-categorie ook een inwendig Kan complex.

Quasi-categorieën worden soms beschouwd als een speciale vorm van zwakke ω -categorieën. Op dezelfde manier kunnen inwendige Kan complexen als zwakke ω -operaden gezien worden. Inwendige Kan complexen genieten een rijke structuur. Er is een interne notie van homotopie en van samenstelling en deze samenstelling is associatief op homotopie na. Bovendien is de categorie van boomachtige verzamelingen een monoïdaal gesloten categorie en de inwendige Kan complexen vormen een exponentieel ideaal met betrekking tot normale boomachtige verzamelingen. De algemene theorie van boomachtige verzamelingen is zeer geschikt om operaden in de context van homotopietheorie te onderzoeken. We definiëren een verfijning van de boomachtige nerf functor voor het geval dat de operade verrijkt is in een monoïdaal model-categorie. Deze functor heet de homotopie-coherente nerf functor. We bewijzen dat onder bepaalde voorwaarden de homotopie-coherente nerf van een operade een inwendig Kan complex is.

Een toepassing van de theorie is het definiëren van hoger dimensionale categorieën. We geven een algemene definitie van een categorie verrijkt in een boomachtige verzameling die geïtereerd kan worden om een definitie van verrijkt n -dimensionale categorieën te krijgen. Als we dan dit proces uitvoeren met de homotopie-coherente nerf van de categorie van kleine categorieën uitgerust met de folkloristische modelstructuur, krijgen we een definitie van zwakke n -categorieën. Uit de algemene theorie volgt dan meteen een definitie van functoren tussen deze categorieën, een notie van homotopie tussen zulke functoren en een samenstelling van functoren.

Bepaalde resultaten in dit werk zijn veralgemeniseringen van bekende resultaten. Bijvoorbeeld: Het bewijs dat de inwendige Kan complexen een exponentieel ideaal zijn, levert als speciaal geval een bewijs dat quasi-categorieën een exponentieel ideaal in de categorie van simpliciale verzamelingen zijn. Dit resultaat werd recentelijk door Joyal bewezen maar ons bewijs is anders. Ons bewijs dat onder bepaalde voorwaarden, de homotopie-coherente boomachtige nerf van een operade een inwendig Kan complex is, levert, samen met andere stellingen, een bewijs van een resultaat van Cordier en Porter.

Het proefschrift eindigt met een bespreking van een mogelijke modelstructuur op de categorie van boomachtige verzamelingen. We bewijzen dat als dit inderdaad een modelstructuur is, er dan een zekere homotopie-invariantie eigenschap geldt voor algebraïsche structuren op elementen van een inwendig Kan complex. Deze eigenschap is vergelijkbaar met een homotopie invariantie eigenschap in modelcategorieën van Berger en Moerdijk. We vermoeden dat de theorie van boomachtige verzamelingen veel toepassingen zal vinden in onder andere, algebraïsche (en abstracte) homotopietheorie, hoger-dimensionale categorieën en A_∞ -ruimtes, en een nieuwe benadering tot het bestuderen van operaden oplevert.