Geschenken uit het Oosten

Rede uitgesproken door

Prof. dr. J.P. Hogendijk

bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar
geschiedenis van de wiskunde,
aan de Universiteit Leiden op
dinsdag 8 maart 2005

Mijnheer de rector magnificus, zeer gewaardeerde toehoorders.

Wiskunde is veel ouder dan de meeste andere wetenschappen die aan deze universiteit worden gedoceerd. Vierduizend jaar geleden werden in het tegenwoordige Irak al wiskundige problemen opgelost. De moderne wiskunde is grotendeels in het Westen ontwikkeld, maar sommige bijdragen van Oosterse culturen zijn nog steeds zichtbaar. Twee van deze "geschenken uit het Oosten" zijn het tientallig en het zestigtallig positiestelsel, die allebei voorkomen in de aanvangstijd 16.15 uur in de uitnodiging voor deze oratie.

Het tientallig positiestelsel is het stelsel dat wij tegenwoordig in het dagelijks leven gebruiken om getallen te schrijven. Voor ons is dit vanzelfsprekend, maar de wiskundigen hebben het meer dan 2000 jaar zonder dit stelsel moeten doen: aan de oude Grieken en Romeinen was het onbekend. In het tientallig positiestelsel gebruiken we symbolen voor één tot en met negen, en het cijfer nul. We kunnen met deze tien cijfers willekeurig grote getallen maken, doordat we de cijfers in een positiestelsel schrijven. Laten we als voorbeeld kijken naar de aanvangstijd van deze oratie, 16.15 uur. Hierin is zestien uur geschreven als 16 uur, met de 1 in de linker positie voor één maal tien, en de 6 in de rechter positie voor zes maal één. Met de cijfers 1 en 6 kunnen we ook het getal 61 maken, dat niet hetzelfde betekent als 16. De waarde van een cijfer hangt dus af van zijn positie in het getal. Het jaar twee duizend vijf, waarin wij leven, schrijven we als 2005, dat is van links naar rechts twee duizendtallen, geen honderdtallen, geen tientallen, en vijf eenheden. De twee nullen geven aan dat er geen honderdtallen en geen tientallen zijn, en het symbool 0 betekent dus "niets".

Een symbool dat niets betekent was wel even wennen voor de Europese wiskundigen in de twaalfde en dertiende eeuw, toen het tientallig positiestelsel pas uit de Islamitische wereld naar Europa was gekomen. De Europese wiskundigen noemden de symbolen voor 1 tot en met 9 de negen "figuren", maar voor de nul lieten ze het Arabische woord maar staan. Dit Arabische woord was sifr, ofwel "leegte", en dit is de oorsprong van het moderne woord "cijfer". Het woord cijfer wordt dus eigenlijk ten onrechte ook voor de symbolen 1 tot en met 9 gebruikt.[1]

We zijn gewend in het tientallig positiestelsel ook breuken te schrijven. Zestien en een kwart schrijven we als 16,25, dat is één tiental, zes eenheden, twee tienden en vijf honderdsten. Met de komma geven we aan waar de breuk begint.
Sinds de Franse revolutie zijn maten, gewichten en munteenheden steeds verder aan het tientallig positiestelsel aangepast. De aanvangstijd van deze oratie laat zien dat de overwinning van dit stelsel niet volledig is. In het tientallig positiestelsel zouden we kwart over vier 's middags als 16.25 moeten noteren. Maar we schrijven 16.15 omdat we een uur in 60 minuten verdelen. We gebruiken het zestigtallig stelsel ook bij het verdelen van een minuut in 60 seconden, en bij het rekenen met hoeken in graden,

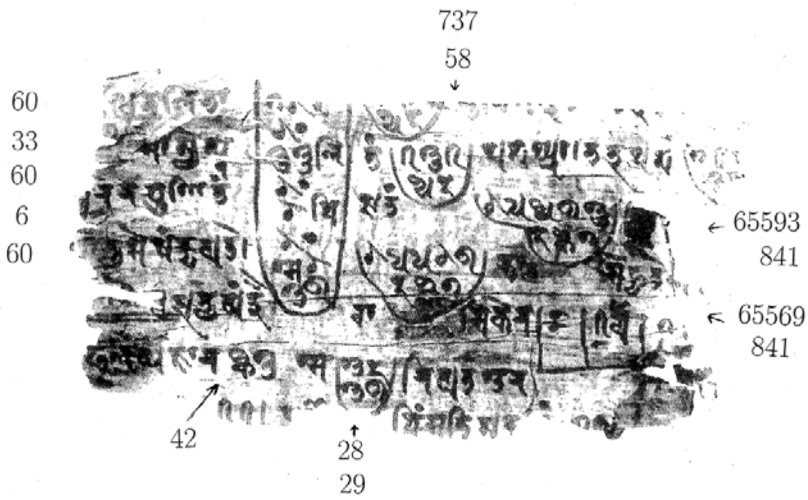
minuten en seconden. De aantallen minuten en seconden schrijven we, nogal inconsequent, weer in het tientallig positiestelsel: vijftien minuten is 15 minuten.

Voordat ik verder inga op de geschiedenis van dit inconsequente gedrag, wil ik iets zeggen over mijn favoriete werkmethode. In mijn cursussen over geschiedenis van de wiskunde probeer ik zoveel mogelijk aan de hand van oorspronkelijke bronnen te werken. Ik doe dit om didactische redenen, want authenticiteit wekt enthousiasme op, en van de bronnen is het maar een kleine stap naar de historische context en de redenen waarom wiskunde werd gedaan. Maar het werken met bronnen is ook een principiële keuze. Het bronnenmateriaal vormt de basis van onze kennis, en ik vind dat studenten het met eigen ogen moeten zien. De bronnen moeten steeds opnieuw worden bestudeerd en geïnterpreteerd, omdat iedere generatie nieuwe inzichten en onderzoeksmethoden meebrengt. Ik zal vandaag bronnen uit drie verschillende culturen met u bekijken om u met een groter deel van het vakgebied te laten kennismaken. Daarom kan ik niet zo veel aandacht aan elke bron en elke cultuur besteden als ik eigenlijk zou willen.

Een Indiaas stuk berkenbast

Mijn eerste bron is een bladzijde uit één van de oudst bewaarde wiskundige documenten uit de geschiedenis van het tientallig positiestelsel. U ziet in afbeelding 1 een blad uit een handschrift dat in 1881 is gevonden in de omgeving van het dorp Bakhshali in Noordwest Pakistan.[2] Het handschrift wordt tegenwoordig bewaard in de Bodleian Library in Oxford. Het bestaat uit ongeveer 50 stukken berkenbast, die tussen de achtste en de twaalfde eeuw[3] na Christus aan beide kanten zijn beschreven met een wiskundige tekst in het Sanskriet. Dit is de heilige taal van het oude India, waarvan het moderne Pakistan een onderdeel was. Het handschrift bevat een collectie wiskundige problemen, die is samengesteld door iemand die zichzelf "de zoon van Chataka, een brahmaan, en een koning van de wiskundigen" noemt.[4] We weten verder niets over deze persoon.
De tekst bevat Sanskrietwoorden, die van links naar rechts worden geschreven, en getallen, die bijna allemaal in boogjes staan. U kunt deze getallen zelf lezen, omdat wij tegenwoordig hetzelfde systeem gebruiken, en de cijfers in dezelfde volgorde schrijven. De vorm van de cijfers is veranderd en daarom heb ik de belangrijkste getallen in moderne cijfers eromheen gezet, maar het gaat mij er om dat u het handschrift zelf leest.

In het langgerekte boogje links van het midden van boven naar beneden staan getallen 60, 33, 60, 6, 60; rechts daarvan van boven naar beneden onder andere 737, 58, 65593, 841, 65569, 841. In de onderste regel staat het getal 42 los, en rechts daarvan staan 28 en 29 in een boogje. Op het afgebeelde stuk berkenbast zijn nog enkele getallen te vinden, en ook op de ontbrekende gedeeltes moeten getallen gestaan hebben.



Afbeelding 1
Bakshali handschrift, Pakistan
(tussen 700 en 1200 na Chr.)

De oudste bronnen voor het tientallig positiestelsel zijn Indiase sterrenkundige teksten uit de vijfde en zesde eeuw na Christus. Deze teksten zijn echter alleen bewaard in kopieën van veel recenter datum dan het Bakhshali handschrift.[5] De ontdekker van het tientallig positiestelsel was waarschijnlijk een Indiase sterrenkundige uit de tweede of derde eeuw na Christus. Hij heeft als uitgangspunt een ouder stelsel gebruikt dat al vanaf de derde eeuw voor Christus voorkwam.[6] In dit oudere stelsel bestonden symbolen voor één tot en met negen, maar nog geen nul, en het getal tien werd dus niet geschreven als één-nul. Er waren aparte symbolen voor alle tientallen tot en met honderd, voor alle honderdtallen tot en met duizend, en zo verder. Dit was dus een tientallig stelsel maar geen positiestelsel.
Voor het dagelijks leven in het oude India was dit voldoende, maar niet voor de berekeningen in de Indiase sterrenkunde, waarin enorm grote getallen werden gebruikt. Dat was waarschijnlijk de reden waarom het tientallig positiestelsel is ontwikkeld.
Dit nieuwe stelsel is vanuit India in de achtste eeuw in de Islamitische wereld ingevoerd, en daarna is het in de twaalfde en dertiende eeuw via Spanje en Italië in middeleeuws Europa terecht gekomen. Daar was men gewend aan Romeinse cijfers, maar de Italiaanse handelaars en bankiers zagen de voordelen van het nieuwe systeem in. Kort na het begin van de boekdrukkunst kregen de cijfers hun moderne vorm. In de periode daarvoor zijn de cijfers wel iets van vorm veranderd, maar toch zijn er duidelijke verbanden te zien tussen de moderne cijfers en de cijfers in het Bakhshali handschrift. Dit is ook te zien in afbeelding 1.

In de verticale boog in het midden zien we getallen 60 en 6.
De 6 lijkt op een bakje dat in een skilift hangt, maar de kabel waaraan het bakje hangt wordt tegenwoordig niet meer geschreven, en het rondje van de moderne zes is open, net als bij de nul. In het getal 33 hebben de cijfers 3 een kuif die in de huidige vorm is verdwenen. Het cijfer 2 in de getallen 42, 28, en 29 in de onderste regel heeft ook een extra kuif, maar geen horizontaal streepje aan de onderkant. De 9 en 4 zijn een kwartslag gedraaid ten opzichte van de huidige vormen, en de 4 in het handschrift heeft een merkwaardige extra knoet die er tegenwoordig niet meer aanzit. In de 737 boven aan de pagina is te zien dat ook de 7 een kwartslag gedraaid is ten opzichte van de huidige vorm.

De getallen in afbeelding 1 maken deel uit van een berekening, die in de editie van Takao Hayashi is geanalyseerd.[7] De berekening gaat over een probleem waarin een Indiase lengtemaat voorkomt die ik gemakshalve als kilometer zal weergeven. Het probleem gaat over twee reizigers die elkaar achtervolgen. Het wordt eerst algemeen behandeld en opgelost, en daarna volgen getallenvoorbeelden. Afbeelding 1 heeft te maken met het volgende getallenvoorbeeld: Een reiziger gaat op weg. Hij reist elke dag 7 kilometer in dezelfde richting. Na 5 dagen gaat een tweede reiziger hem achterna. Deze reist op de eerste dag 5 kilometer en elke dag daarna 3 kilometer extra, dus op de tweede dag 8 kilometer, op de derde dag 11 kilometer, enzovoort. Hoeveel dagen duurt het tot de tweede reiziger de eerste heeft ingehaald?

Op de voorafgaande bladen berkenbast is beredeneerd dat de tweede reiziger ongeveer 6 hele dagen plus 4/29 dag nodig heeft om de eerste in te halen. In afbeelding 1 wordt deze oplossing gecontroleerd.
Eerst wordt de gemiddelde snelheid per dag van de tweede reiziger uitgerekend. Het antwoord: 737 gedeeld door 58 kilometer, staat aangegeven in het boogje bovenaan in het midden (we moeten de twee getallen dus lezen als het bovenste getal gedeeld door het onderste). Deze gemiddelde snelheid maal de 6 4/29 reisdagen levert de afstand die de tweede reiziger heeft afgelegd, namelijk de 65593/841 kilometer in het boogje aan de rechterkant.
De afstand die de eerste reiziger dan heeft afgelegd kan ook gemakkelijk worden uitgerekend als aantal reisdagen maal zeven kilometer per dag.[8] Het resultaat staat in het boogje in het midden van de pagina aangegeven als 65569/841 kilometer. Dit is minder dan de 65593/841 kilometer van de tweede reiziger in het rechter boogje. De tweede reiziger is de eerste dus al gepasseerd!
De auteur geeft de volgende verklaring van dit vreemde resultaat.
De 6 + 4/29 reisdagen zijn niet het exacte antwoord, maar een benadering. (Ik treed nu even in wiskundige details, om aan te geven wat het niveau van de wiskunde in dit handschrift was.) De auteur heeft het aantal reisdagen gevonden als oplossing van een kwadratische vergelijking,[9] en hierbij moest hij de wortel uit 889 trekken. Dit getal is geen kwadraat, en daarom heeft hij de wortel benaderd. Hij kan nu de voorsprong van de tweede reiziger als volgt uitrekenen: neem het verschil tussen 889 en kwadraat

van de benadering van de wortel uit 889, en deel dit verschil door acht maal de drie kilometer die de tweede auteur per dag sneller gaat lopen. De voorsprong blijkt 24/841 kilometer te zijn, en alles klopt precies.

We kunnen met moderne wiskunde nagaan dat de auteur de voorsprong van de tweede op de eerste reiziger correct heeft uitgerekend. Wie dit zelf probeert zal bewondering krijgen voor de auteur van de tekst in het Bakhshali-handschrift.[10] Ikzelf word altijd weer gefascineerd door de tijdloze en cultuuroverschrijdende aspecten van de wiskunde. We moeten echter ook aandacht hebben voor de verschillen tussen de moderne methodes en de denkwijze van de auteur. Waar wij formules gebruiken, citeert de auteur van het Bakhshali-handschrift *verzen* in het Sanskriet. Hij geeft een vers met de oplossing van de kwadratische vergelijking, en een ander vers voor de benadering van de wortel uit een getal dat geen kwadraat is. Wiskundigen in het oude India moesten ook kunnen dichten.

Het wordt tijd om ons af te vragen waarom de auteur het probleem van de twee reizigers eigenlijk behandelde. Van de tweede reiziger wordt aangenomen dat hij dag en nacht doorloopt en daarbij zijn snelheid continu verhoogt. Dit gedrag doet niet erg realistisch aan. Het Bakhshali handschrift staat vol met zulke onrealistische problemen. Deze problemen horen tot een gebied dat vaak de recreatieve wiskunde genoemd wordt. Ikzelf spreek liever over de sportieve wiskunde (en daarmee bedoel ik niet die hardlopende reizigers). In allerlei culturen en perioden losten mensen in Azië en Europa wiskundige problemen op voor hun plezier. De problemen kozen ze liefst zo moeilijk mogelijk, en de oplossingen zo slim mogelijk. Daarna werden andere mensen uitgedaagd, om deze problemen ook op te lossen. In het probleem in afbeelding 1 zijn de snelheden van de reizigers met opzet zo gekozen dat de oplossing niet mooi uitkomt. Zo kon de auteur laten zien dat hij ook tegen dit soort situaties opgewassen was.

Problemen uit de sportieve wiskunde reisden ook van de ene cultuur naar de andere. In de tiende eeuw werd het probleem van de twee reizigers ook behandeld door de Islamitische wiskundige al-Karaji, afkomstig uit Irak of Iran. Ook al-Karaji koos een getallenvoorbeeld dat niet mooi uitkomt.[11]

We gaan nog even terug naar Afbeelding 1. In het langgerekte verticale boogje in het midden rekent de auteur de 6 4/29 reisdagen om in het zestigtallig stelsel. De getallen 33 en 6 behoren tot de staart van de breuk. In moderne termen zijn ze de derde en vierde sexagesimaal van deze breuk, en ze betekenen 33 gedeeld door 60^3 en 6 gedeeld door 60^4. Het eerste deel van de breuk is weggevallen doordat het handschrift is beschadigd. Door de breuk 4/29 zelf om te rekenen vinden we de eerste sexagesimaal 8 en de tweede sexagesimaal 16. Een klein stukje van de 16 is in afbeelding 1 met enige goede wil nog zichtbaar. Beschadigde wiskundige teksten kunnen soms uit de wiskundige inhoud voor een deel gereconstrueerd worden.

We zien dat de auteur gehele getallen in het tientallig stelsel schrijft, breuken in het zestigtallig stelsel, en dan de sexagesimalen (33 en 6) zelf weer in het tientallig stelsel. Hij vertoont hetzelfde inconsequente gedrag dat we al gezien hebben in de aanvangstijd 16:15 uur van deze oratie. Het enige verschil is dat hij een dag in 60 delen verdeelt, en wij in 24 uren. In het moderne Europa en in middeleeuws India bestond dus een merkwaardige voorliefde voor zestigtallige breuken. Waar komt deze voorliefde vandaan?

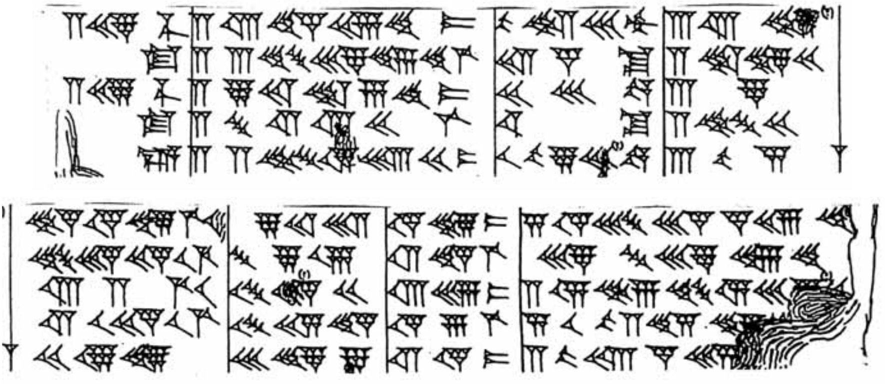
Een Babylonisch kleitablet

Ik zal deze vraag beantwoorden aan de hand van mijn volgende bron. Afbeelding 2 is een tekening[12] van vijf regels (regels 22-26) uit een kleitablet, dat in de negentiende eeuw is opgegraven in Babylon, in de buurt van het moderne Bagdad. Het kleitablet is omstreeks 175 voor Christus door een anonieme Babylonische sterrenkundige geschreven in spijkerschrift. Het wordt nu in het British Museum in Londen bewaard en is diverse keren gepubliceerd.[13] Op dit tablet staan voornamelijk getallen, die u eenvoudig zelf kunt lezen, van links naar rechts. Eerst bekijken we getallen van 1 tot 59. Die worden geschreven met twee tekens: een verticale spijker, en een pijltje met de punt naar links. De verticale spijker betekent 1 en het pijltje 10. Bijvoorbeeld: links bovenaan de eerste regel staat een groepje van twee verticale spijkers, die samen 2 betekenen. Het groepje rechts daarvan bestaat uit twee pijltjes met de punt naar links, en dan zeven kleine spijkertjes die boven elkaar worden geschreven. Samen is dit twee maal tien plus zeven, dat is zevenentwintig. Er staan dus twee getallen naast elkaar, 2 en 27.

Nu gaan we deze twee getallen combineren. Daarvoor gebruikten de Babyloniërs het zestigtallig stelsel, dat wij tegenwoordig kennen uit het rekenen met uren, minuten en seconden. Als u zich voorstelt dat de getallen 2 en 27 twee minuten en 27 seconden zijn, dan zijn dit totaal 2 x 60 + 27 = 147 seconden.
De Babyloniërs hadden geen klokken met een minuten- en secondewijzer, maar het voorbeeld geeft wel aan hoe hun systeem werkte, want de 2 27 betekent inderdaad 2 x 60 + 27 = 147.
Drie regels daaronder ziet u in dezelfde kolom het getal 2 x 60 + 28 = 148.

Wat betekenen deze twee getallen?
De 147 en 148 zijn jaartallen in de Seleucidische jaartelling. Jaar 1 van deze jaartelling begon in 311 voor Christus en de jaren zijn zonnejaren die begonnen in de lente. Het jaar 147 in de eerste regel loopt daarom van het voorjaar van 165 voor Christus tot het voorjaar van 164 voor Christus.

We gaan nu naar de verdere inhoud van dit tablet. In afbeelding 3 is de inhoud van afbeelding 2 in moderne woorden en symbolen vertaald.
De groepjes in spijkerschrift zijn vervangen door getallen in de moderne tientallige



Afbeelding 2
Kleitablet, Babylon
(ca. 175 voor Chr.)

(jaar	maand	hulpgetal		positie volle maan		lengte daglicht
2 27	apr	2 13 44 26 40	↑	0 52 30	schorp	3 13 55
	okt	2 3 49 37 46 40	↓	22 4	ram	2 51 57 20
2 28	apr	2 8 21 51 6 40	↑	20 30	weegsch	3 7
	okt	2 9 12 13 20	↓	11	ram	2 59 20
	mrt$_2$	2 2 59 15 33 20	↑	10 7 30	weegsch	3 0 5

	afstand maan tot ecliptica)		grootte eclips	snelheid maan	lengte maand
	54 14 48	- ↑	8 21 32	14 58 ↑	5 14 39 34 4 26 40
20	49 34 24	+ ↓	9 8 16	12 44 ↓	37 9 37 46 40 ...
	13 2	- ↑	19 34 20	13 36 ↑	2 15 56 49 15 33 20
	12 10 14	+ ↓	19 25 44	14 6 ↓	5 10 0 2 45 46 40
	1 20 18 48		30 47 8	12 14 ↑	2 0 23 4 35 ......

Afbeelding 3

schrijfwijze. De andere spijkerschrift-symbolen in afbeelding 2 zijn woorden voor positief, negatief, stijgend en dalend, namen van sterrenbeelden in de dierenriem, en namen van de maanden van het jaar. Deze zijn in afbeelding 3 door moderne equivalenten vervangen. Bij de maanden van het jaar kan dat niet precies, omdat de maanden in de Babylonische kalender echt iets met de maan te maken hadden. Een maand begon in principe op de eerste avond wanneer de wassende maansikkel op de Westelijke horizon zichtbaar was, net zo als in de tegenwoordige Islamitische kalender. Een jaar bestond uit 12 of 13 maanden. Men voegde dertiende maanden op zodanige manier in dat het jaar altijd dichtbij het begin van de lente begon. Ik heb de eerste maand van het Babylonische jaar daarom vertaald als “april”, de tweede als “mei”, enzovoort.[14]

Het tablet heeft onder andere te maken met het voorspellen van maansverduisteringen voor een periode van ongeveer 25 jaar, tussen 175 en 150 voor Christus. Een maansverduistering komt hoogstens eens in de vijf of zes maanden voor, wanneer het volle maan is, en de aarde precies tussen de zon en de maan in staat, zodat (modern gezegd) de maan in de schaduwkegel van de aarde terecht komt. De Babylonische sterrenkundige heeft op het tablet alleen die maanden aangegeven waarin eventueel een maansverduistering zou kunnen plaatsvinden. Elke regel gaat over één zo’n maand. Als er een maansverduistering is, dan moet die in het midden van de maand plaatsvinden, omdat elke maand één of twee dagen na nieuwe maan begint.

In elke regel staan acht getallen, keurig gerangschikt in kolommen. Een paar van deze kolommen zijn gemakkelijk te herkennen. In de derde kolom staat het punt in de dierenriem precies tegenover de stand van de zon in het midden van de maand. Dit is bij benadering de positie van de volle maan. De Babyloniërs verdeelden de dierenriem in twaalf sterrenbeelden van elk 30 graden lang, samen dus 360 graden. Zij verdeelden de graden volgens het zestigtallig stelsel in minuten en seconden.
In de eerste regel van de derde kolom staat 0 52 30 Schorpioen, dat betekent 0 graden, 52 minuten en 30 seconden van het achtste sterrenbeeld van de dierenriem, dat bij de Babyloniërs ook al Schorpioen heette.
Merk op dat het symbool 0 van de nul graden, de transcriptie is van twee kleine haakjes schuin boven elkaar die u in afbeelding 2 kunt zien. Dit is de oudst bekende vorm van de nul.

In de zevende kolom van links staat de dagelijkse beweging van de maan in het midden van de maand; in de bovenste rij staat 14 graden en 58 minuten. Tegenwoordig zouden we het precies zo uitdrukken. Uiteraard was zo’n nauwkeurig getal niet het resultaat van een meting maar van een berekening; op dit tablet staan berekeningen en voorspellingen, geen waarnemingen.
In de zesde kolom staat de zogenaamde “grootte” van de maansverduistering. Dit getal geeft aan of er inderdaad een maansverduistering zal zijn, en of deze partieel of geheel zal zijn. In de moderne sterrenkunde is het mogelijk, precies te berekenen wanneer maansverduisteringen in het oude Babylon plaatsvonden en hoe lang zij duurden. Neugebauer heeft de resultaten vergeleken met de getallen in de zesde kolom,[15] en het blijkt dat de Babylonische voorspellingen behoorlijk goed waren.

Het is niet nodig in detail uit te leggen wat de overige kolommen betekenen.[16] Voor ons is alleen belangrijk dat de lange getallen in de kolommen van afbeelding 2 en 3 bijna allemaal breuken in het zestigtallig stelsel zijn. Ik noemde zonet de 14 graden 58 minuten bovenaan de zevende kolom van links, en dit is eigenlijk een breuk, namelijk 14 58/60. In de Babylonische sterrenkunde werd uitsluitend met breuken in het zestigtallig stelsel gerekend.

Omstreeks 150 voor Christus nam de Griekse sterrenkundige Hipparchus veel methoden van de Babyloniërs over. Hij werd hierdoor geïnspireerd elke cirkel in 360 graden te verdelen, en de graden natuurlijk weer volgens het zestigtallig stelsel in minuten en seconden. Ook de verdeling van het etmaal in 24 gelijke uren (weer onderverdeeld in minuten en seconden) gaat vermoedelijk terug op Hipparchus. De latere sterrenkundigen in de Griekse cultuur, de Islamitische wereld en middeleeuws Europa zijn Hipparchus gevolgd.

De 24 gelijke uren waren in de oudheid en de middeleeuwen alleen van theoretisch belang voor berekeningen in de sterrenkunde. In het gewone leven verdeelde men de dag in 12 seizoensuren: het eerste uur begon bij zonsopgang, en het twaalfde uur eindigde bij zonsondergang. In de zomer zijn deze seizoensuren natuurlijk langer dan in de winter.
De verdeling van de dag in uren veranderde pas in de veertiende eeuw door de ontwikkeling van de techniek. Toen werden in veel steden in Europa mechanische torenklokken gebouwd, die elk uur of elk kwartier met een bel de tijd aangaven. Deze klokken wezen geen seizoensuren maar gelijke uren aan, omdat het gemakkelijker is, uurwerken te construeren voor uren van constante lengte. Hiermee deden de 24 gelijke uren hun intrede in het leven van de gewone man en vrouw. In de eerste tijd waren de klokken nog niet erg nauwkeurig, en het kwartier was de kleinste tijdseenheid die in de praktijk voorkwam. De klokken hadden nog geen minutenwijzer.
Als u straks naar buiten gaat, zou u even moeten kijken naar de torenklok van het Leidse Academiegebouw waarin we ons nu bevinden: die klok heeft alleen een wijzer voor de uren. Minuten en seconden werden pas belangrijk in het dagelijks leven nadat onze landgenoot Christiaan Huygens in 1656 het slingeruurwerk had uitgevonden.[17]

In de negentiende eeuw werd de lokale zonnetijd afgeschaft en de aarde in tijdzones verdeeld. Dit was belangrijk voor de ontwikkeling van de spoorwegen, en later ook voor de telefonie, radio en televisie. Uiteindelijk is de huidige situatie ontstaan, waarin minuten en seconden het dagelijks leven van veel mensen regeren.

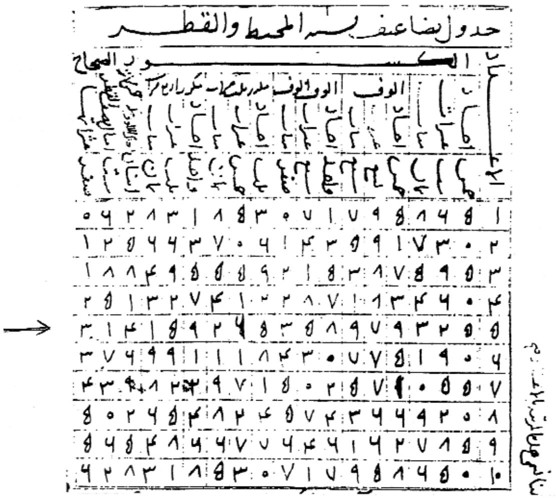
Na deze uitweiding wil ik de bespreking van afbeeldingen 2 en 3 met twee algemene opmerkingen over Babylonische sterrenkunde afsluiten. Ten eerste komt de Babylonische sterrenkunde tegenwoordig vaak tussen de wal en het schip terecht. De meeste historici van de wiskunde houden zich er niet mee bezig, omdat het volgens hen sterrenkunde is en dus geen wiskunde. Door deze houding missen zij de wiskundige methoden die in dit materiaal verborgen zijn maar in de zuiver wiskundige teksten niet voorkomen. Historici van andere wetenschappen, die niet zelf aan de Babylonische tabletten hebben gerekend, komen liever niet in het drijfzand van de rekenschema's en getallen terecht.

In moderne boeken over de natuurwetenschappen in de oudheid worden vaak vele bladzijden besteed aan het ophemelen van de Griekse sterrenkundigen Eudoxos, Eratosthenes, Aristarchos en Apollonios van Perga,[18] die allen vóór 150 voor Christus leefden. Deze vier Grieken waren voorzover bekend niet in staat, maansverduisteringen en planeetstanden in detail te voorspellen. Hun Babylonische tijdgenoten konden dit wel, maar over hún werk wordt in moderne boeken meestal weinig of niets gezegd. De Oosterse bijdrage in de ontwikkeling van de exacte natuurwetenschap is veel groter dan meestal wordt aangenomen.

Mijn tweede opmerking gaat over maatschappelijke context. De Babyloniërs waren geïnteresseerd in het berekenen van hemelverschijnselen, omdat ze geloofden dat die verschijnselen samenhingen met gebeurtenissen op aarde. Hun rekenmethoden leidden tot een bloei van de astrologie, die zich voortzette in de latere Griekse cultuur, in India, de Islamitische wereld en middeleeuws Europa. In al deze culturen was de astrologie een bedding voor de sterrenkunde en daardoor ook voor de wiskunde. Geschiedenis van de wiskunde moet zich ook bezig houden met de contexten waarin wiskunde voorkomt, ongeacht het belang van die contexten in de moderne wetenschap.

Een Arabisch papieren handschrift

De derde bron die ik u wil laten zien heeft te maken met decimale breuken. Het tientallig positiestelsel is in India uitgevonden, maar decimale breuken komen in middel-



Afbeelding 4
"Brief over de cirkelomtrek"
Al-Kāshī, ca. 1420
(Handschrift uit de 16e eeuw)

eeuws India nergens voor. Ze zijn voor het eerst uitgevonden in de Islamitische wiskunde, minimaal drie keer onafhankelijk van elkaar, en daarna zijn ze ook in West-Europa diverse keren uitgevonden.[19] De uitvinding ligt voor de hand als men het zestigtallig stelsel voor breuken en het tientallig stelsel voor gehele getallen tot één uniform geheel wil combineren.

Afbeelding 4 is een tabel uit een 16e eeuws handschrift met een tekst van één van de uitvinders van decimale breuken, Jamshid al-Kashi. Deze wis- en sterrenkundige leefde tot 1420 in armoedige omstandigheden in Iran. Daarna werd hij naar Samarkand uitgenodigd aan het hof van koning Oeloeg Beg, die zelf een groot liefhebber van wiskunde was. Het handschrift is geschreven op papier, dat in die tijd ruim voorhanden was, en het wordt bewaard in een bibliotheek bij het graf van Imam Reza in Meshed in Oost-Iran.

Het is een tabel met veelvouden van het getal dat modern als 2π wordt aangeduid.[20]
De notatie 2π is modern, al-Kashi spreekt in plaats hiervan over de verhouding van de omtrek van een cirkel tot de straal.
In de rechterkolom van de tabel ziet u de getallen 1 tot en met 10 van boven naar beneden. Links daarvan ziet u de omtrek van een cirkel met die straal, dus van boven naar beneden 2π, 4π, enzovoort, tot en met 20π. De cijfers worden in de volgorde geschreven die wij gewend zijn. Ze lijken veel op de cijfers die in het tegenwoordige Midden-Oosten worden gebruikt. In de vijfde regel in afbeelding 4, die door een pijltje is aangegeven, staat het getal 10π, en hierin kunt u de eerste 16 decimalen achter de komma van π herkennen: 3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2. (De daaropvolgende decimaal 5 is niet nauwkeurig, en het laatste cijfer 5 geeft het veelvoud van 2π aan.)

Om π met deze nauwkeurigheid te bepalen heeft al-Kashi een onvoorstelbare hoeveelheid rekenwerk gedaan. In dit opzicht stond hij in zijn tijd op eenzame hoogte.
In 1596 publiceerde Ludolph van Ceulen, die in de Pieterskerk in Leiden begraven is, de eerste 19 decimalen achter de komma van π. Deze decimalen staan aangegeven op de voorpagina van zijn boek, waarvan een deel is gereproduceerd in afbeelding 5. Van Ceulen stelt de straal van de cirkel een 1 met een heleboel nullen zodat hij geen decimale breuken nodig heeft. Hij was niet bekend met het werk van al-Kashi, en toch zijn de eerste 16 decimalen van π bij het pijltje in afbeelding 4 ook in afbeelding 5 te zien.

Afbeelding 5
Fragment van de voorplaat van Ludolf van Ceulen, Vanden Cirkel*, 1596.*

Zo levert het getal π een voorbeeld van het cultuur-overschrijdende karakter van de wiskunde. Al-Kashi zelf, en vele andere Islamitische wiskundigen, geloofden dat de wiskunde tijdloos was. In één van zijn werken zegt al-Kashi dat hij wiskunde "heeft aangeboord, met de kracht van inspiratie, uit de Eeuwige Aanwezigheid." [21]
Wiskunde grenst hier aan mystiek.
Decimale breuken werden in de Islamitische wereld geen doorslaand succes, net zo min als het tientallige positiestelsel voor gehele getallen. De grote rekenaars in de Islamitische cultuur waren sterrenkundigen, die gewend waren in het zestigtallig stelsel te rekenen. Zij gaven de sexagesimalen aan met de letters van het Arabisch alfabet, volgens hetzelfde systeem dat hun Griekse voorgangers hadden gebruikt om met de letters van het Griekse alfabet te rekenen. Al-Kashi was gewend met gehele getallen en breuken in het zestigtallig stelsel te rekenen, en pas het eindresultaat eventueel naar het tientallig stelsel om te zetten.
In Europa braken decimale breuken pas definitief door dankzij het boekje *de Thiende* van Simon Stevin, dat in 1585 in Leiden verscheen, toen hij aan de Leidse universiteit studeerde. De tijd was er rijp voor, omdat de mensen inmiddels, door de opkomst van de handel en de publicatie van vele rekenboeken, voldoende bekend waren met het rekenen met gehele getallen in het tientallig positiesysteem.
Vanaf dat moment zijn sexagesimale breuken een fossiel uit een voorbije tijd, maar wel een fossiel met een blijvend karakter. Dit hebben we gezien in de aanvangstijd 16.15 van deze lezing, die nu bijna voorbij is.

Sinds 1600 is de wiskunde enorm gegroeid. In de zeventiende eeuw is de moderne algebraïsche notatie ingevoerd door René Descartes, in zijn *Géométrie*, een aanhangsel van zijn *Discours de la Méthode* die hij in 1637 voor het eerst in Leiden heeft gepubliceerd.[22] Deze notatie houdt in dat letters van het alfabet voor onbekende of onbepaalde getallen worden gebruikt. Doordat men inmiddels had geleerd, concrete getallen met Indiase cijfers te schrijven, kwamen de letters van het alfabet voor andere wiskundige doeleinden beschikbaar.

In de negentiende en twintigste eeuw zijn veel wiskundige begrippen en theorieën in een nieuw perspectief komen te staan. Deze ontwikkeling gaat steeds verder, en de wiskunde leeft zoals nooit tevoren. Dit betekent niet dat de oude wiskunde ongeldig is geworden, maar hoogstens, dat we er nu op een andere manier naar kijken. De groei houdt gelukkig niet in, dat de wiskunde iedere paar jaar weer een nieuwe `modieuze' vorm moet krijgen. Dat zou een enorme energieverspilling zijn.

Het tijdloze aspect van wiskunde is een van de redenen waarom het werken met oude bronnen zo enthousiasmerend kan zijn. Hoewel de bronnen zijn geschreven in een tijd en context die wij ons maar moeilijk kunnen voorstellen, kan het wiskundige gedachtegoed erin zeer herkenbaar zijn. Zo kan de moderne lezer of lezeres met eigen ogen zien, dat sommige vanzelfsprekende concepten en symbolen een eeuwenlange geschiedenis hebben.

Wat u op de lagere school over het tientallig positiestelsel heeft geleerd, had u ook kunnen leren in middeleeuws India. Wat decimaalbreuken zijn, had u in de middeleeuws Islamitische wereld aan de weet kunnen komen. Wat een boog aan de hemel van 14 graden en 58 minuten is, had men u ook in 300 voor Christus in een Babylonische tempel kunnen uitleggen.

Ik vind het fascinerend dat diverse Aziatische culturen aan de ontwikkeling van de wiskunde hebben bijgedragen, en dat de gevolgen hiervan nog elke dag om ons heen te zien zijn. Het was de bedoeling van deze oratie, uw ogen te openen voor deze geschenken uit het Oosten.

Graag wil ik als afsluiting iets zeggen over mijn eigen onderzoek en onderwijs in de geschiedenis van de wiskunde.
Veel wiskundige bronnen uit Oosterse culturen zijn nog niet onderzocht. In mijn eigen onderzoek zal ik me vooral richten op ongepubliceerde Arabische handschriften, of Arabische teksten die wel gepubliceerd zijn maar onvoldoende geanalyseerd. In dit materiaal vinden we nog steeds onbekende bijdragen van hoog niveau, die belangrijk zijn voor de geschiedenis van de wiskunde. Voor de moderne wiskunde leren we hieruit niets nieuws, maar deze bijdragen laten zien dat het niveau van de wiskunde in de Islamitische cultuur tussen de achtste en de veertiende eeuw na Christus veel hoger was dan meestal wordt aangenomen. Soms kan het nieuwe materiaal goed gebruikt worden in het moderne wiskundeonderwijs of het populariseren van wiskunde. Uiteraard zie ik de wiskunde in het Islamitisch cultuurgebied in samenhang met de culturele en wetenschappelijke context, wat dit laatste betreft vooral de sterrenkunde en de astrologie, en ook in samenhang met andere culturen, met name de Griekse oudheid, India en middeleeuws Europa.

Ik vind het belangrijk in mijn onderzoek nauwe contacten te onderhouden met moderne Islamitische landen. Het is daarbij niet nodig, de bijdragen van de middeleeuws Islamitische auteurs anders voor te stellen dan ze zijn. Dat wordt door de meeste moderne wiskundigen en fysici in de Islamitische landen helemaal niet gewaardeerd. Zij stellen, net als ik, juist prijs op een zo objectief mogelijke bestudering van de bronnen. Door het bestuderen van het gemeenschappelijk erfgoed kan een vruchtbare samenwerking ontstaan. Uit mijn eigen ervaring wil ik graag een voorbeeld geven.

Tegelijk met mijn deeltijdhoogleraarschap in Leiden heb ik een positie als adjunct professor in de geschiedenis van de wiskunde aanvaard aan de King Fahd University of Petroleum and Minerals. Dit is een Engelstalige universiteit in Dhahran in Saoedi-Arabië. Samen met Saoedische, Pakistaanse en Marokkaanse collega's ben ik daar bezig met het opzetten van cursussen en onderzoeksactiviteiten in de geschiedenis van de wiskunde. Het doel hiervan is Saoedische studenten met middeleeuws

Arabische teksten te laten werken, en Arabische teksten in Engelse vertaling toegankelijk te maken (onder andere de berekening van π in 16 decimalen door al-Kashi waarvan u het resultaat zojuist heeft gezien). Als deze plannen worden uitgevoerd, zal de rest van de wereld kunnen kennisnemen van Engelstalige versies van een aantal fraaie middeleeuws Islamitische bijdragen aan de wiskunde.
De Arabische studenten zelf kunnen zo door eigen ervaring ondervinden, dat de moderne wiskunde en natuurwetenschappen wortels hebben in de Islamitische cultuur. De King Fahd University hoopt dat deze studenten hierdoor nog meer vertrouwen krijgen in hun eigen talenten, en nog meer worden gestimuleerd om topprestaties in de moderne wetenschap te leveren.
Ik wil hierbij graag aantekenen dat modern wiskundig onderzoek en het werken aan wiskundeonderwijs goede mogelijkheden biedt om samenwerkingsverbanden aan te gaan met Islamitische landen. Ik vind dit in deze tijd erg belangrijk en hoop dit soort verbanden te kunnen bevorderen.

In de korte tijd dat ik aan de Leidse universiteit werk, heb ik een motiverende omgeving aangetroffen voor dit aspect van mijn werk. Er is een samenwerkingsproject opgestart van de professoren Lenstra, Stevenhagen en mijzelf in Leiden met het Huis van de Wiskunde (Khane-ye Riyaziyyat) in Isfahan in Iran. Het doel hiervan is onder meer het organiseren van een internationale conferentie in augustus 2007 over wiskunde en Iraans-Islamitische architectuur in Isfahan, volgens velen de stad met de mooiste Islamitische architectuur van de wereld.

In mijn onderwijs in Leiden zou ik iets soortgelijks willen doen als in Saoedi-Arabië, maar dan met de Nederlandse cultuur. Het Nederlands is een van de weinige talen met een eigen woord voor “wiskunde”, dat afgeleid is van het zestiende eeuwse “wisconst”. Er is een unieke 16e en 17e eeuwse Nederlandstalige wiskundige literatuur, waaruit ik al geciteerd heb. Deze literatuur zou op het internet toegankelijk gemaakt moeten worden. Dit is interessant voor Nederlandse en buitenlandse historici van de wiskunde, en hopelijk ook voor wiskundeleraren en leerlingen op middelbare scholen, als de oude Nederlandse teksten voorzien worden van goede inleidingen en commentaren. Ik heb gelukkig al een enthousiaste groep van Leidse en enkele Utrechtse studenten die hiermee een begin gemaakt hebben.

Aan het eind van deze oratie wil ik graag enkele woorden van dank uitspreken. Om te beginnen dank ik het College van Bestuur van de Leidse universiteit, het bestuur van de Faculteit Wis- en Natuurkunde, en alle anderen die aan de totstandkoming van mijn benoeming hebben bijgedragen.
Hooggeleerde Lenstra, beste Hendrik, hartelijk dank dat je mijn deeltijdhoogleraarschap uit jouw Spinozapremie hebt willen financieren, en ik ben jou en je collega’s dankbaar voor de gezellige en motiverende ontvangst die mij in Leiden ten deel is gevallen.

Het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht heeft mij in staat gesteld mij als historicus van de wiskunde te ontplooien in een ideale wiskundige omgeving. Hooggeleerde Bos, beste Henk, ik ben je zeer dankbaar voor de aandacht en de vrijheid die je mij gegeven hebt, en voor alles wat je mij geleerd hebt in een breed scala van onderwerpen, van de analyse van authentieke bronnen via het schrijven van artikelen tot het geven van onderwijs in de geschiedenis van de wiskunde.

Hooggeleerde mevrouw Kruk, beste Remke, het is nu al meer dan dertig jaar geleden dat ik als eerstejaars student wiskunde bij je aanklopte om te vragen of ik Arabisch als keuzevak zou kunnen doen. Je hebt me niet alleen de Arabische taal geleerd maar ook bij de Leidse universiteitsbibliotheek geïntroduceerd, waar ik, nota bene als student, zelf met echte middeleeuwse Arabische handschriften mocht werken.
Jouw begeleiding heeft een cruciale rol gespeeld in mijn wetenschappelijke carrière. Ik kan nog steeds nauwelijks geloven dat ik nu zelf hoogleraar aan deze universiteit ben geworden. Het leven loopt soms vreemder dan je zelf van te voren kunt bedenken.

Zeer geachte studenten aan deze Universiteit, ik zie uit naar een voortzetting van onze prettige en interessante samenwerking en hoop op goede en concrete resultaten.

Mijn onderwijs en mijn werk met studenten is sterk beïnvloed door trainingen en retraites die ik heb gevolgd. Ik wil Ad en Hanna Stemerding, Marianne van de Wetering, en Ton Brouwer hartelijk bedanken voor alle inspiratie die ik van hen heb ontvangen.

Tenslotte dank ik mijn moeder en Mieke voor hun warme belangstelling en hun onvoorwaardelijke steun.

Ik heb gezegd.

Noten.

1. Zie voor de nul in middeleeuws Europa Menninger, *Zahlwort und Ziffer, eine Kulturgeschichte der Zahl*, tweede editie, Göttingen 1957, deel 2, pp. 213-220.

2. Zie de foto in T. Hayashi, *The Bakhshali Manuscript: An Ancient Indian Mathematical Treatise*, Groningen: Egbert Forsten, 1995, p. 546; deze is gebaseerd op de foto gebruikt door G.R. Kaye in, *The Bakhshali Manuscript: A Study in Medieval Mathematics*, 1927, reprint: Delhi, Cosmo Publications, 1981, 2 delen, Plate VI, 7 recto.
(De afmeting van het afgebeelde stuk berkenbast is naar schatting 12 bij 7 centimeter, vergelijk Hayashi hoofdstuk I.2.}

3. De datum zou kunnen worden gepreciseerd door een moderne koolstof 14-datering op het handschrift uit te voeren.

4. Zie Hayashi, pp. 85-86.

5. Zie bijvoorbeeld *Aryabhatiya of Aryabhata, ed. Kripa Shankar Shukla in collaboration with K.V. Sarma*, New Delhi: Indian National Academy of Science, 1976, pp. lxviii-lxxi (handschriften), pp. 26-33 (tientallig positiestelsel).

6. Voor afbeeldingen van cijfers in dit zgn. Brahmi-stelsel zie B. Datta, A.N. Singh, *History of Hindu Mathematics*, reprint ed., Delhi 2001, vol. 1 p. 26.

7. Zie de edities van Hayashi, voetnoot 2, pp. 294-296, 369-370, 430-434 en vergelijk Kaye, voetnoot 2, vol. 1 (Parts I-II), pp. 44-46 example (ii), p. 110 [7r.], vol. 2 (Part III), p. 179, Plate VI, 7 recto.

8. Toen de tweede reiziger op weg ging had de eerste reiziger een voorsprong van 35 kilometer, en in de 6 + 4/29 dagen daarna reisde hij 7 kilometer per dag, dit geeft de 42 en de 28/29 in de onderste regel.

9. Na t dagen heeft de tweede reiziger $5+8+....+(5+3t-3)=t\left(5+\frac{3}{2}(t-1)\right)$ kilometer afgelegd en de eerste reiziger 35 + 7t . Het verschil van de afgelegde weg van de tweede reiziger minus die van de eerste reiziger is $\frac{1}{2}(3t^2-7t-70)$ en ze ontmoeten elkaar als deze uitdrukking nul is, dus als
$$t=\frac{7+\sqrt{889}}{6}$$

10. In moderne algebraïsche notatie benadert de auteur de wortel uit een niet-kwadraat $K = p^2 + E$, met p geheel, als $p+\frac{E}{2p}$.

Stel nu $t=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{K}\right)$, $u=\frac{1}{2a}\left(-b+p+\frac{E}{2p}\right)$.

In de tekst is $K = 889$, $p = 29$, $E = 48$, $a = 3$, $b = -7$, t is de exacte oplossing van het probleem, en $u=6\frac{4}{29}$ de benadering.

Dan zijn t en u wortels van de vergelijkingen $at^2 + bt + c = 0$ en $au^2 + bu + c' = 0$ met $c=-70,\ b^2-4ac=K=p^2+E,\ b^2-4ac'=\left(p+\frac{E}{2p}\right)^2$.

De voorsprong van de tweede op de eerste reiziger op tijdstip u is .

$$\frac{1}{2}\left(au^2+bu+c\right)=\frac{1}{2}\left(c-c'\right)=\frac{1}{8a}\left(\left(b^2-4ac'\right)-\left(b^2-4ac\right)\right)=\frac{1}{8a}\left(\frac{E}{2p}\right)^2$$

11. Zie F. Woepcke, *Extrait du Fakhri, traité de l'algèbre par Abou Bekr Mohammad Ben Alhacan Alkarkhi*, Paris 1853, p. 82 no. (6). Al-Karaji liet de wortel staan.

12. Zie *Late Babylonian Astronomical and Related Texts, copied by T.G. Pinches and J.N. Strassmaier, prepared for publication by A. Sachs*, Providence: Brown University Press, 1955, p. 11 no. 50, Obverse. Voor een foto van het tablet zie F.X. Kugler, *Die Babylonische Mondrechnung*, Freiburg 1900, Plate 13.

13. Meest recentelijk in O. Neugebauer, *Astronomical Cuneiform Texts*, London 1955, vol. 1, pp. 106-109 (tablet no. 60).

14. De maart met index 2 is een dertiende maand in het Babylonische jaar.

15. O. Neugebauer, *Astronomical Cuneiform Texts*, vol. 1, pp. 106-109.

16. Zie bijv. O. Neugebauer, *Astronomical Cuneiform Texts*, vol. 1, pp. 44-61, 106-109; in het Nederlands zie ook J.P. Hogendijk, Babylonische astronomie: een vergeten hoofdstuk uit de geschiedenis van de wiskunde, in: F. van der Blij e.a. (ed.) *Kaleidoscoop van de wiskunde 1.* Utrecht (Epsilon Press), pp. 161-180. Een recent overzicht van de fascinerende geschiedenis van de Babylonische sterrenkunde is Hermann Hunger, David Pingree, *Astral Sciences in Mesopotamia*, Leiden: Brill, 1999. Gemakkelijker leesbaar is B.L. Van der Waerden, *Science Awakening Part II*, Groningen: Noordhoff, 1968.

17. Zie Gerhard Dohrn-Van Rossum, *History of the Hour*, Chicago 1996, pp. 282-284.

18. Een afschrikwekkend voorbeeld is het recent verschenen boek *From Eudoxos to Einstein: A History of Mathematical Astronomy* van Christopher M. Linton (Cambridge: Cambridge University Press, 2004.). Deze auteur besteedt 4 bladzijden aan Babylon, en daarna 34 bladzijden aan de Griekse sterrenkunde in de periode voor Hipparchus. Linton geeft impliciet toe dat hij de Babylonische tabletten niet zelf heeft bekeken, zie zijn voetnoot 11 op p. 12.

19. Voor de Islamitische uitvinding van decimale breuken door al-Uqlidisi, zie A.S. Saidan, *The Arithmetic of Al-Uqlidisi*, Dordrecht: Reidel, 1978, pp. 114, 481-485; door al-Samaw`al al-Maghribi, zie R. Rashed, L'Extraction de la Racine n-ième et l'Invention des Fractions Decimales (XIe-XIIe Siècles), *Archive for History of Exact Sciences* 18 (1978), pp. 142-145, en door al-Kashi, zie Paul Luckey, *die Rechenkunst bei Gamsid b. Mas`ud al-Kaši mit Rückblicken auf die ältere Kunst des Rechnens*, Wiesbaden 1951, pp. 102-114. Zie voor Europa J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik, 4. Auflage, Band 1: Arithmetik und Algebra, vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke*, Berlin: Walter de Gruyter, 1980, pp. 116-117.

20. Handschrift Meshed, Astan-e Qods Rezawi, no. 5389, f. 46, zie *Fehrest-e Ketabkhane-ye Astan-e Qods Rezawi, ta'lif Aqa-ye `Abd al-`Ali Ektabi*. Meshed: A.H. (solar) 1305-1350/1926-1971 CE (vols. 7-8 zijn geschreven door A. Gulchin Ma`ani), vol. 3, p. 52, no. 162, vol. 8, p. 42.
Zie voor editie en Duitse vertaling van de tekst: Paul Luckey, *Der Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-Risala al-Muhitiya) von Gamsid b. Mas`ud al-Kaši*, Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften Jahrgang 1950 no. 6, Berlin 1953, pp. 22, 86.

21. Boris Rosenfeld and Jan P. Hogendijk, A Mathematical Treatise Written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 15 (2002/03), pp. 25-65, zie p. 46 regel 20-21, p. 61 regel 8.

22. [René Descartes,] *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences: plus la dioptrique, les meteores et la geometrie, qui sont des essais de cete methode*, Leyde: de l'imprimerie de Jan Maire, 1637. Voor een facsimile uitgave met Engelse vertaling zie *The geometry of René Descartes, transl. from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham*, New York: Dover Publications, 1954.