Jan Hogendijk
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
3508 TA Utrecht
J.P.Hogendijk@uu.nl

Geschiedenis

Lijfrentes in de zeventiende en achttiende eeuw

Is het financiële product nu winstgevend voor de koper of de verstrekker? Welke berekening ligt eraan ten grondslag? Jan Hogendijk legt uit hoe het product lijfrente vanaf de zeventiende eeuw werd toegepast, en in welke mate de wiskunde erachter toentertijd werd doorgrond.

Geld speelt in de geschiedenis van de wiskunde een belangrijke rol. In de Renaissance bleken de Hindoe-Arabische cijfers het beste systeem te zijn voor het rekenen met grote sommen geld. Sindsdien worden deze cijfers in de Westerse cultuur gebruikt. In de eeuwen daarna leidden geldzaken tot interessante problemen, die met wiskunde doeltreffender opgelost konden worden dan zonder wiskunde. De berekening van lijfrentes is hiervan een mooi voorbeeld. Belangrijke basisideeën zijn in de zeventiende en achttiende eeuw ontwikkeld, onder meer door Nederlandse wiskundigen, met methodes die niet uitgaan boven het niveau van het huidige VWO. Het nu volgende historische verhaal kan wellicht de interesse wekken van leraren, leerlingen en anderen voor een toepassingsgebied van de wiskunde dat actueler is dan ooit.

Al sinds de dertiende en veertiende eeuw probeerden overheden (zoals steden) in het huidige Nederland en Vlaanderen aan geld te komen door het op de kapitaalmarkt te lenen. Voor het lenen van het geld betaalden de overheden een vergoeding. Daarbij waren twee systemen in gebruik [1].

Losrentes

In het systeem van 'losrentes' betaalde de overheid elk jaar een constant rentepercentage, bijvoorbeeld 4 procent, van het geleende kapitaal. Om een jaarlijkse uitkering van 1000 gulden rente te krijgen moest een persoon, die we in de rest van het verhaal Jantje zullen noemen, 25.000 gulden aan de overheid uitlenen. Dit systeem was ook in de handel gebruikelijk. Deze rente moest elk jaar weer betaald worden, en de enige manier om hiervan af te komen was door het aflossen van het hele beginkapitaal. Dit aflossen kon in één keer gebeuren maar ook in gedeelten, en zo ontstond een wiskundig probleem, dat aan het eind van de zestiende eeuw werd opgelost.

Als Jantje een beginkapitaal inlegt en de overheid bijvoorbeeld 30 jaar lang elk jaar een rente en aflossing van totaal 1000 gulden uitbetaalt, waarna het beginkapitaal helemaal afgelost is, hoeveel was dan dit beginkapitaal, als we uitgaan van een losrente van 4 procent per jaar en samengestelde interest? De oplossing berust op de volgende gedachte. Als de overheid over één jaar 1000 gulden moet uitbetalen, dan moet zij nu beschikken over $100/104 \times 1000$ gulden, dat is afgerond 961 gulden en 11 stuivers. Dit bedrag heet de contante waarde van een uitkering van 1000 gulden over één jaar. Over twee jaar moet weer 1000 gulden worden betaald: de contante waarde van deze uitkering is $(100/104)^2 \times 1000 = 924$ gulden en 11 stuivers. Het beginkapitaal is de som van de contante waarden van alle 30 uitkeringen. We vinden hiervoor c maal 1000 gulden met $c = (100/104) + (100/104)^2 + \ldots + (100/104)^{30}$, afgerond 17.292 gulden. Wij kunnen c gemakkelijk uitrekenen met behulp van de somformule voor een eindige meetkundige rij, in moderne notatie $c = (x - x^{31})/(1 - x)$ met $x = 100/104$. Aan het eind van de zestiende eeuw was deze methode wel beschreven in sommige boeken (bijvoorbeeld de *Elementen* van Euclides), maar lang niet bij alle rekenmeesters bekend, en meestal werden de 30 machten gewoon uitgerekend en gesommeerd. Ook werden er tabellen aangelegd met de resultaten van zulke berekeningen (vaak als bedrijfsgeheim) zodat met de cijfers gemanipuleerd kon worden. Om een eind te maken aan deze praktijken publiceerde Simon Stevin (1548–1620) in 1582 rentetabellen. Zie Tabel 1 voor zijn Tafel van Interest voor een rente van 4 procent per jaar [2].

Bij jaar n staat in kolom I de (afgeronde) contante waarde van een uitkering van $10.000.000$ gulden na n jaar en in kolom II de som van de contante waardes van n uitkeringen van $10.000.000$ gulden waarvan de eerste na 1 jaar wordt uitbetaald, de tweede na 2 jaar, enzovoort, tot en met de laatste na n jaar. De contante waarde van een uitkering van a guldens na 30 jaar krijgen we door het desbetreffende getal $3.083.185$ in de tabel te vermenigvuldigen met a en het product te delen door $10.000.000$.

Lijfrentes

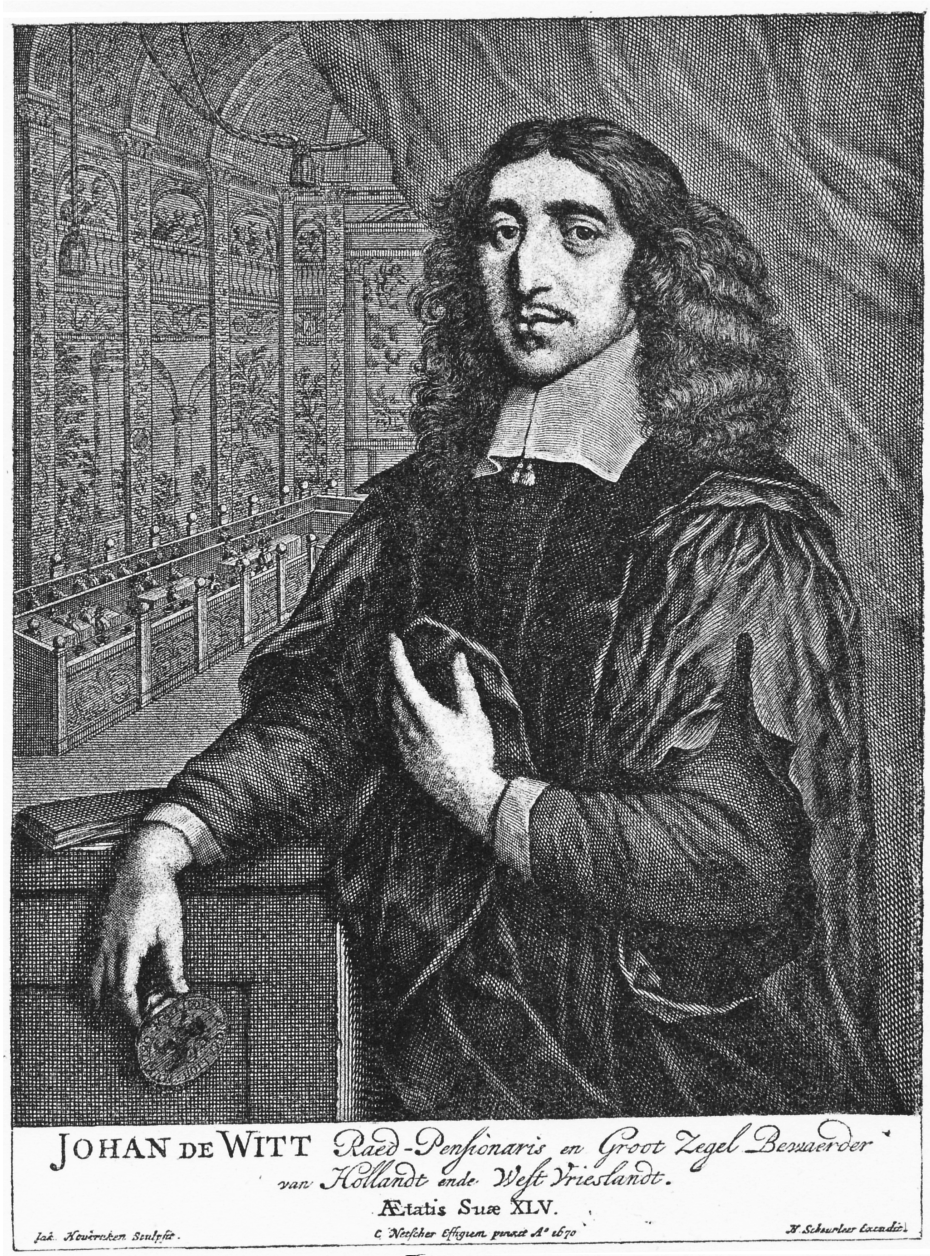
Wiskundig interessanter is het tweede systeem dat door overheden gebruikt werd om geld te lenen: de lijfrente. Jantje legde een beginkapitaal in en wees iemand aan ('het lijf'), meestal een jong kind. De overheid betaalde dan rente aan Jantje of zijn nabestaanden, of eventueel aan een andere persoon die door Jantje werd aangewezen, zolang het lijf leefde. Men kon tegen een hogere inleg ook lijfrentes sluiten op twee lijven, waarbij de rente doorliep totdat beide lijven waren overleden. Het systeem van lijfrentes kon aantrekkelijk zijn voor Jantje, omdat hij een hogere rente ontving, en ook voor de overheden, omdat op een gegeven moment de verplichtingen ophielden zonder dat het beginkapitaal hoefde te worden afgelost.

In het begin werd het verband tussen inleg en uitkering bepaald met natte-vingerwerk. Meestal was de inleg laag, met als waarschijnlijk gevolg dat de overheden op langere termijn in financiële problemen kwamen. Het was een normale zaak om met 10.000 gulden inleg (op één lijf) een jaarlijkse lijfrente van 1000 gulden te krijgen. Vanaf 1670 werd over dit onderwerp gecorrespondeerd door Christiaan Huygens (1629–1695), Johannes Hudde (1628–1704), en de eerste hoofdpersoon van dit verhaal: Johan de Witt (1625–1672), sinds 1653 raadspensionaris van Holland.

Johan de Witt

De oudste theoretische analyse van lijfrentes is Johan de Witt's pamflet *Waerdije van lijfrenten naar proportie van Los-renten* uit 1671. Omdat er oorlog dreigde, hadden de Verenigde Nederlanden veel geld nodig. Daarom werden lijfrentes uitgegeven, en De Witt wilde nagaan wat het tarief moest zijn. Zijn pamflet is in de zeventiende eeuw niet wijd verspreid, maar het was in de achttiende eeuw wel bekend onder deskundigen [3].

De Witt gaat uit van de volgende aannames. De losrente is 4 procent per jaar, en Jantje wil op het lijf van een kind dat nu precies 3 jaar is, een lijfrente sluiten die per jaar $1.000.000$ gulden oplevert. Dit bedrag moet uitbetaald worden in twee halfjaarlijkse termijnen zoals destijds gebruikelijk was. Als Jantje nu $25.000.000$ gulden zou inleggen [4], zou er tot in eeuwigheid elk jaar $1.000.000$ gulden rente kunnen worden uitbetaald. Voor de lijfrente zal Jantje dus in elk geval fors minder hoeven te betalen dan $25.000.000$ gulden. De Witt komt uit op een bedrag van $16.110.607$ gulden. Dit betekent dat Jantje voor een jaarlijkse rente-uitkering van a gulden in twee halfjaarlijkse termijnen



Figuur 1 Johan de Witt (1625–1672)

iets meer dan $16a$ gulden zou moeten inleggen. Het natte-vinger bedrag van $10a$ was dus in elk geval zeer nadelig voor de overheid.

De redenering van De Witt is als volgt. Als het kind $3\frac{1}{2}$ jaar geworden is, moet er 500.000 gulden, dat is $10.000.000$ stuivers, worden uitgekeerd. Dit leidt tot de vraag, hoeveel geld we nu op rente moeten zetten om over een half jaar $10.000.000$ stuivers te kunnen uitkeren, bij een rente van 4 procent per jaar.

Jr	I	II	Jr	I	II	Jr	I	II
1	9.615.385	9.615.385	11	6.495.808	87.604.757	21	4.388.335	140.291.574
2	9.245.562	18.860.947	12	6.245.969	93.850.726	22	4.219.553	144.511.127
3	8.889.963	27.750.910	13	6.005.739	99.856.465	23	4.057.262	148.568.389
4	8.548.041	36.298.951	14	5.774.749	105.631.214	24	3.901.213	152.469.602
5	8.219.270	44.518.221	15	5.552.643	111.183.857	25	3.751.166	156.220.768
6	7.903.144	52.421.365	16	5.339.080	116.522.937	26	3.606.890	159.827.658
7	7.599.177	60.020.542	17	5.133.731	121.656.668	27	3.468.163	163.295.821
8	7.306.901	67.327.443	18	4.936.280	126.592.948	28	3.334.772	166.630.593
9	7.025.866	74.353.309	19	4.746.423	131.339.371	29	3.206.512	169.837.105
10	6.755.640	81.108.949	20	4.563.868	135.903.239	30	3.083.185	172.920.290

Tabel 1 Stevins Tafel van Interest van 4 ten 100

Men zou kunnen zeggen: 4 procent per jaar is 2 procent per half jaar, dus het benodigde bedrag is $100/102 \times 10.000.000 = 9.803.921$ stuivers. Sinds het eind van de zestiende eeuw was al bekend dat dit antwoord fout is als men met samengestelde interest rekent, omdat $\frac{100}{102} \times \frac{100}{102}$ niet hetzelfde is als $\frac{100}{104}$. Het goede antwoord is $\sqrt{\frac{100}{104}} \times 10.000.000 = 9.805.807$ stuivers. Vier procent rente per jaar blijkt ongeveer gelijk te zijn aan $1,98$ procent rente per half jaar. Om de tweede uitkering van $10.000.000$ stuivers over één jaar te kunnen doen, moeten we nu beschikken over $100/104 \times 10.000.000 = 9.615.385$ stuivers, dat is het eerste getal in de tabel van Simon Stevin. Om het hele eerste jaar te dekken hebben we nu dus nodig: $9.805.807 + 9.615.385 = 19.421.192$ stuivers, uitgaande van de veronderstelling dat het kind op zijn of haar vierde verjaardag nog leeft. Op dezelfde manier kunnen we uitrekenen hoeveel we nu op 4 procent rente moeten uitzetten om $10.000.000$ stuivers te kunnen uitbetalen op het moment dat het kind $79\frac{1}{2}$ jaar wordt, namelijk $(\frac{100}{104})^{\frac{153}{2}} \times 10.000.000$. De Witt vindt hiervoor 497.679 stuivers.

In de eerste helft van de zeventiende eeuw was het begrip kans ontwikkeld in verband met dobbelspelen. Christiaan Huygens had hier in 1657 een standaardwerkje over geschreven, en rond 1669 introduceerde hij kansen ook op het gebied van leven en sterven [5]. De aanleiding hiervoor was het verschijnen van een primitieve sterftetafel in Londen, waarop we later terugkomen. De Witt gaat in zijn pamflet verder met deze nieuwe toepassing van kansrekening. Zijn uitleg is niet helemaal duidelijk, omdat hij geen onderscheid maakt tussen voorwaardelijke en onvoorwaardelijke kansen [6], maar zijn berekening berust in moderne termen op het volgende model. Hij neemt aan dat het kind voor zijn tachtigste verjaardag zal overlijden. Dan zal precies één van de volgende 154 gebeurtenissen optreden. 1: het kind overlijdt voordat het $3,5$ jaar oud is; 2: het kind wordt $3,5$ jaar oud, maar het overlijdt voordat het 4 jaar oud wordt; et cetera., tot gebeurtenis 154: het kind wordt $79,5$ jaar oud, maar het overlijdt voordat het 80 jaar oud wordt. De Witt kent aan elk van deze gebeurtenissen kansen toe, en hij onderscheidt daarbij vier perioden in het menselijk leven: van 3 tot 53 jaar, van 53 tot 63 jaar, van 63 tot 73 jaar, en van 73 tot 80 jaar. Als twee van de 154 gebeurtenissen in dezelfde periode liggen, hebben zij gelijke kansen. De kansen op een gebeurtenis in de achtereenvolgende perioden verhouden zich volgens De Witt als $1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$. Dit houdt in moderne termen in dat de kans op elk van de gebeurtenissen 1 tot en met 100 gelijk is aan $\frac{6}{768}$ $(=\frac{1}{128})$. De kans op elk van de gebeurtenissen van 101 tot en met 120, van 121 tot en met 140 en van 141 tot en met 154 is respectievelijk $\frac{4}{768}$, $\frac{3}{768}$, en $\frac{2}{768}$.

Bij elke gebeurtenis hoort een aantal uitkeringen, en de contante waarde van deze uitkeringen kan worden uitgerekend zoals hierboven. Bij gebeurtenis 1 is nu 0 stuivers nodig, bij gebeurtenis 2 zijn nu $9.805.807$ stuivers nodig, bij gebeurtenis 3 is dit bedrag $19.421.192$ stuivers, enzovoort. De Witt berekent nu in moderne termen de verwachtingswaarde van het beginkapitaal dat nodig is om alle uitkeringen te financieren. Dit getal is de som van de producten van de kans dat een gebeurtenis optreedt maal de contante waarde van alle uitkeringen die horen bij die gebeurtenis: $(0 + 9.805.807 + 19.421.192 + \ldots + \frac{1}{3} \cdot 479.820.563)/128 = 40.964.113.736/128 = 320.032.139$ stuivers $= 16.001.607$ gulden. De inleg voor een lijfrente op het lijf van een kind van 3 jaar oud is dus volgens De Witt iets meer dan 16 keer de jaarlijkse uitkering.

Voordat het werk van De Witt in de Staten Generaal besproken werd, waren in april 1671 al lijfrentes uitgegeven, namelijk 700.000 gulden tegen de penning 14 voor één lijf (d.w.z. voor elke 14 gulden ingelegd kapitaal een jaarlijkse uitkering van 1 gulden), en 300.000 gulden tegen de penning 17 op twee lijven. De Witt toonde in zijn document dus aan, dat de eerste mogelijkheid in elk geval een voordelige zaak was voor de lijfrenteniers, die zelf het lijf konden uitkiezen waarop de lijfrente gesloten werd. De overheid zou daarom op den duur waarschijnlijk verlies leiden. Destijds maakte dit weinig indruk. In het rampjaar 1672 was veel meer geld nodig dan met lijfrentes binnengehaald kon worden, en er werden drastischer maatregelen genomen, zoals een extra belasting. De oorlogen begonnen inderdaad, en door de verliezen aan Nederlandse zijde ontstond een hetze tegen de broers Cornelis en Johan de Witt. Op 20 augustus 1672 werden zij gruwelijk vermoord [7].

Jaar	0	6	16	26	36	46	56	66	76	86
In leven	100	64	40	25	16	10	6	3	1	0

Tabel 2 Sterftetabel uit 1662 door John Graunt

De rekenmethode van Johan de Witt kan ook worden gebruikt om de inleg uit te rekenen als het lijf ouder is dan 3 jaar, en als de rentestand anders is. Moderne schrijvers hebben gesuggereerd dat zijn aannames over de kans om in een bepaald jaar te sterven onrealistisch zijn [8], en misschien gemotiveerd door de wens om een uitkomst te krijgen die niet te veel afweek van de gangbare praktijk en daardoor politiek acceptabel was [9]. Ik denk dat deze suggestie niet waarschijnlijk is, omdat De Witt geen illusies had over de overtuigingskracht van een wiskundige redenering. Hij zegt dat "… de dagelijksche ondervindinghe openbaer maeckt, dat veele Menschen of niet genegen of niet bequaem zijn haer begrip op eenige aen een geschaeckelde, al-hoewel onfeylbare raisonnementen, soodanigh te appliceren, dat zy de kracht van de selve te rechte konnen vatten om daer door tot haer volkomen vergenoegen overtuycht te worden; en dat derhalve by haer de exempelen meer vermogen als alsulcke raisonnementen" [10] Daarom heeft hij naar eigen zeggen ook een voorbeeld doorgerekend. Deze berekening is niet bewaard, maar we kunnen een indruk krijgen uit een soortgelijke berekening door Johannes Hudde, sinds 1672 burgemeester van Amsterdam. Tussen 1586 en 1590 waren te Amsterdam lijfrentes uitgegeven door de Regering van de Verenigde Provinciën, en Hudde had uit de registers een tabel samengesteld met de leeftijden van de (1495) lijven waarop de lijfrentes gesloten werden, en de periode dat elk lijf daarna nog leefde. De tabel is bewaard in een brief van Hudde aan Christiaan Huygens van 18 augustus 1671 [11]. Hudde kon dus uitrekenen hoeveel de inleg geweest had moeten zijn om in dit geval alle uitkeringen te financieren bij een rente van 4 procent. Voor de lijven van kleine kinderen bleek de hiervoor noodzakelijke inleg gemiddeld 18 maal de jaarlijkse uitkering te zijn. De berekening moet een gigantisch karwei geweest zijn [12].

Sterftetabellen

Ook in andere landen hield men zich aan het eind van de zeventiende eeuw met theorievorming over lijfrentes bezig. Om de kans te bepalen dat een mens in een bepaald levensjaar zou komen te overlijden, gebruikten sommigen een sterftetabel (ook wel eufemistisch 'tafel van levenskracht' genoemd). Een van de eerste sterftetabellen is in 1662 samengesteld door John Graunt (1620–1674), op basis van gegevens over geboorte en sterfte die in London waren verzameld, onder andere vanwege een dreigende pestepidemie [13] (zie Tabel 2). Deze tabel was overigens bekend aan Christiaan Huygens.

In de tabel is te zien dat van 100 babies er gemiddeld 64 zes jaar oud zullen worden, 40 zestien jaar oud, et cetera. Graunts sterftetabel was grotendeels giswerk omdat in London niet werd geregistreerd op welke leeftijd mensen stierven. De leeftijden eindigen op 6 omdat men geïnteresseerd was in het aantal 'weerbare' mannen van 16 tot 56, die soldaat zouden kunnen worden.

Het samenstellen van een sterftetabel is niet eenvoudig. Men zou met een voldoend willekeurige populatie van bijvoorbeeld 1000 babies kunnen beginnen, en dan registreren hoelang elke baby leeft. Het duurt dan een eeuw totdat de sterftetabel klaar is. Daarom zocht men naar populaties die min of meer constant waren (geen immigratie en geen emigratie) en waar geen bijzondere gebeurtenissen zoals oorlogen en epidemieën plaatsvonden. Als het aantal geboortes en de leeftijd van de overledenen een paar jaar lang geregistreerd worden, kunnen de gemiddelden gebruikt worden voor een sterftetabel. In 1693 publiceerde de Engelsman Edmund Halley (1656–1742) een sterftetabel die hij op die manier had afgeleid uit bevolkingsgegevens uit de stad Wroclaw in Polen tussen 1687 en 1691. Halley begint met 1000 kinderen van één jaar oud en hij geeft bij elk volgend jaar het aantal dat nog in leven is (zie Tabel 3).

Met zo'n tabel berekende Halley de inleg voor lijfrentes op ongeveer dezelfde manier als Johan de Witt, wiens werk hij overigens niet kende. Als de lijfrente wordt afgesloten op de derde verjaardag van het lijf, is volgens Halley de kans dat dit kind op de vierde verjaardag nog leeft $\frac{760}{798}$, op de vijfde verjaardag $\frac{732}{798}$, et cetera. De berekening wordt daardoor moeizamer dan bij De Witt. Daarbij is het niet zeker dat een tabel voor Wroclaw ook gebruikt kan worden voor andere plaatsen en landen.

In 1725 vereenvoudigde Abraham de Moivre (1667–1754) de berekening door aan te nemen dat de getallen in een sterftetabel voor leeftijden boven 12 een lineaire functie van de leeftijd zijn. Dit betekent dat van een vaste beginpopulatie van lijven van twaalf jaar oud elk jaar gemiddeld hetzelfde aantal mensen zullen sterven. Bij De Witt was dit het geval voor lijven tussen 3 en 53 jaar. De berekening kan nu verder worden vereenvoudigd. We nemen aan dat de losrente $100i$ procent per jaar is (dus bij een rente van 4 procent geldt $i = 0,04$), en dat de maximumleeftijd ω is [14], en dat we een populatie van lijven hebben die nu hun $\omega - n$-de verjaardag vieren, zodat ze nu nog maximaal n jaren kunnen leven tot de maximumleeftijd.

Figuur 2 Nicolaas Struyck (1687–1769)

Om een jaarlijkse lijfrenteuitkering van a gulden te kunnen financieren moet nu een beginkapitaal beschikbaar zijn van a maal $\frac{n-1}{n}x^1 + \frac{n-2}{n}x^2 + \ldots + \frac{1}{n}x^{n-1}$ waarbij x gegeven wordt door $x = 1/(1+i)$. Deze som kan na enige algebraïsche manipulaties eenvoudiger geschreven worden [15] als a maal $\frac{1}{i}(1 - \frac{1+i}{ni}(1-(1+i)^{-n}))$. De formule is mooi maar door latere auteurs weinig toegepast omdat de sterftetabellen in de praktijk niet voldoende lineair bleken te zijn.

Nicolaas Struyck

We komen nu bij de tweede hoofdpersoon van dit verhaal. Nicolaas Struyck (1687–1769) verdiende de kost als rekenmeester en onderwijzer in wiskunde en sterrenkunde te Amsterdam. Hij had een bijzondere belangstelling voor kansrekening, was goed op de hoogte van de buitenlandse literatuur op dit gebied, en had contacten met buitenlandse wiskundigen. Hij werd gekozen tot lid van de Royal Society in Londen en de Academie des Sciences in Parijs. Hij kende de sterftetabel van Halley maar besloot om zijn eigen sterfteta-

Jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	...
In leven	1000	855	798	760	732	710	692	680	...

Tabel 3 Sterftetabel uit 1693 door Edmund Halley

Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz
5	710	20	607	35	474	50	313	65	142	80	33
6	697	21	599	36	464	51	301	66	132	81	29
7	688	22	591	37	454	52	289	67	123	82	25
8	681	23	583	38	444	53	277	68	114	83	22
9	675	24	575	39	434	54	265	69	105	84	19
10	670	25	567	40	424	55	253	70	97	85	16
11	665	26	558	41	414	56	241	71	89	86	13
12	660	27	549	42	404	57	229	72	82	87	10
13	654	28	540	43	393	58	217	73	75	88	8
14	648	29	531	44	382	59	206	74	68	89	6
15	642	30	522	45	371	60	195	75	61	90	4
16	635	31	513	46	360	61	184	76	54	91	3
17	628	32	504	47	349	62	173	77	48	92	2
18	621	33	494	48	337	63	162	78	43	93	1
19	614	34	484	49	325	64	152	79	38	94	..

Tabel 4 Tafel van de Mannelyke uit 1740 door Nicolaas Struyck

Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz
5	711	20	624	35	508	50	373	65	205	80	55
6	700	21	617	36	500	51	362	66	194	81	47
7	692	22	610	37	492	52	351	67	183	82	40
8	685	23	603	38	484	53	340	68	172	83	34
9	679	24	596	39	476	54	329	69	161	84	29
10	674	25	588	40	468	55	318	70	150	85	24
11	669	26	580	41	459	56	306	71	140	86	20
12	664	27	572	42	450	57	294	72	130	87	17
13	660	28	564	43	441	58	282	73	120	88	14
14	656	29	556	44	432	59	271	74	110	89	11
15	652	30	548	45	423	60	260	75	100	90	8
16	647	31	540	46	414	61	249	76	90	91	6
17	642	32	532	47	404	62	238	77	81	92	4
18	636	33	524	48	394	63	227	78	72	93	2
19	630	34	516	49	384	64	216	79	63	94	1

Tabel 5 Tafel van de Vrouwelyke uit 1740 door Nicolaas Struyck

bellen samen te stellen op basis van registers over lijfrentes die in 1672–1673 en 1686–1689 in Amsterdam waren uitgegeven, toen Hudde daar burgemeester was. Struyck had gegevens over 1670 lijven, en hij bekeek de gegevens over mannen en vrouwen apart. Hij ontdekte dat de levensduur van mannen en vrouwen verschilt, en dat dit verschil zo belangrijk is, dat het effect moet hebben in de berekening voor lijfrentes.

Struyck publiceerde de tabellen voor mannen en vrouwen in zijn *Aanhangsel op de Gissingen over den Staat van het Menschelyk Geslagt en de Uitreekening der Lyfrenten*, dat in 1740 verschenen is [16]. In de tabel met 876 “Vrouwsperzoonen” staat dat lijfrentes waren afgesloten op 77 lijven tussen 0 en 4 jaar, 110 tussen 5 en 9 jaar, etc. Van deze 77 meisjes tussen 0 en 4 jaar bereikten 72 de leeftijd van 5 jaar, 66 de leeftijd van 10 jaar, et cetera. Van de 110 meisjes tussen 5 en 9 jaar bereikten er 107 de leeftijd van 10 jaar, et cetera. Struyck geeft een soortgelijke tabel van 794 Mansperzoonen. Toen hij in 1738 zijn tabellen opstelde waren er nog een paar lijven in leven, en daarvoor heeft hij de sterfdatum geschat. Uit deze twee tabellen leidde hij zijn sterftetabellen voor vrouwen en mannen af (zie Tabel 4 en Tabel 5). Daarna berekende hij nieuwe tarieven voor lijfrentes op mannelijke en vrouwelijke lijven. Een uittreksel hiervan staat in Tabel 6. Hier staat in de eerste rij de leeftijd van het lijf bij het begin van de lijfrente. In de tweede rij de inleg in guldens als het lijf een vrouw is, in de derde rij de inleg voor een mannenlijf, voor een jaarlijkse uitkering van 100 gulden en een ‘gewone’ rente van 2,5 procent per jaar. Het verschil in levensverwachting tussen mannen en vrouwen was in het eind van de zeventiende eeuw in Amsterdam nog niet bekend. Struyck zegt: “’t Schynt dat de Menschen toen liever op jonge Kinderen van de mannelyke zoort lyfrenten namen, dan op de Vrouwelyke van de zelfde ouderdom; daar nogtans het laatste voor de Koopers veel voordeeliger is.”

In een eerder geschriftje, de *Uitreekening van de Lyfrenten* (1738) [17] behandelt Struyck de berekening van lijfrentes. Hij bespreekt eerst de methode van De Witt en vereenvoudigt deze door handig sommeren, zoals we hierboven hebben gezien bij De Moivre. Struyck legt de berekening van zijn eigen sterfte- en lijfrentetabellen nogal vaag uit, zonder details en voorbeelden. Het zou voor een wiskundestudent een interessant scriptieonderwerp zijn om na te gaan hoe Struyck zijn tabellen in de praktijk berekend heeft.

De vaagheid van Struyck was een welkome aanleiding voor zijn aartsvijand Willem Kersseboom (1691–1771), ook een grootheid op lijfrente-gebied, om Struyck te bekritiseren. Kersseboom publiceerde zelf een sterftetabel zonder onderscheid tussen mannen en vrouwen, die in de negentiende eeuw nog gebruikt is. Struyck reageerde niet op de kritiek, en zijn werk werd snel vergeten, maar in de twintigste eeuw is hij gerehabiliteerd [18].

Leeftijd	5–9	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	...
Vrouw	1931	1840	1733	1630	1533	1438	1328	...
Man	1823	1714	1608	1504	1401	1291	1181	...

Tabel 6 Tarieven voor lijfrentes door Nicolaas Struyck

Weduwenbeurs en woekerpolis

De meeste tijdgenoten van Struijck en Kersseboom hadden te weinig wiskundige kennis om het belang van hun werk te kunnen appreciëren. Natte-vingerwerk bleef de norm voor het berekenen van lijfrentes, en ook in andere financiële contracten die te maken hadden met levensduur. We bespreken twee amusante voorbeelden, die vermoedelijk voor de betrokkenen wat minder amusant waren.

Figuur 3 is onderdeel van een publicatie over weduwenbeurzen, waarvan er in het jaar 1749 een groot aantal werd opgericht. De weduwenbeurs van Alkmaar is een interessant voorbeeld [19]. Deze werd door 9 mannen opgericht in mei 1749, en mocht maximaal 75 leden (mannen) hebben. Het entreegeld was 20 gulden, en de vaste contributie 10 gulden per jaar. Op leeftijd werd niet gelet. Als de man zou overlijden zou de weduwe in elk geval 75 gulden pensioen krijgen in de eerste jaren. Later zou dit zelfs kunnen oplopen tot 200 gulden. Deze financiële opzet doet niet erg solide aan. Met 75 leden zijn de jaarlijkse inkomsten 750 gulden, en tien weduwen zijn daarom al genoeg om de kas te ruïneren. Latere auteurs vermelden dat als een weduwenbeurs dreigde leeg te raken, de jongere leden meestal ophielden met het betalen van contributie. Als gevolg daarvan zagen veel mensen nooit iets terug van hun geld [20].

Het fenomeen woekerpolis was ook al bekend in de achttiende eeuw, zoals blijkt uit mijn tweede voorbeeld. Onder de naam “De tijd baard roozen” werden rond 1770 contracten aangeboden door ene Jacobus Laban te Amsterdam. Men kon deelnemen door een of meer maal 10 gulden te storten. Het geld werd op rente uitgezet, en de rente werd jaarlijks verdeeld onder de deelnemers die nog in leven waren, volgens een zogenaamd Tontinesysteem (naar de Italiaanse bankier Lorenzo di Tonti, die het systeem in de zeventiende eeuw in Frankrijk invoerde). Waren er deelnemers doodgegaan, dan kreeg de rest een hogere uitkering. Om dit voor alle leeftijden aantrekkelijk te houden werden de deelnemers in klassen van ongeveer gelijke leeftijd verdeeld. Wanneer er in één klasse nog maar één deelnemer over was, werd die (tegen betaling) in een andere klasse ingedeeld, waarin veel meer werd uitgekeerd. Laban beweerde dat men met een inleg van 10 gulden misschien wel een uitkering van 1000 gulden zou kunnen krijgen. Ging men dood, dan zagen de erfgenamen niets terug van het ingelegde geld.

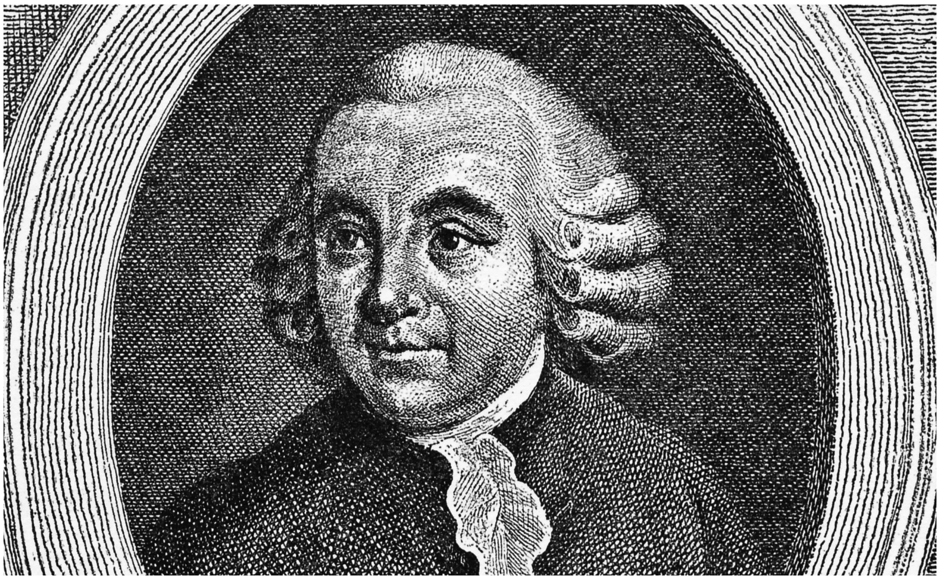
Het venijn zat hem verder in de vele 'kosten' die door Laban en consorten in rekening werden gebracht. Van de ontvangen rente werd een deel ingehouden, en verder werden er allerlei bedragen in rekening gebracht voor intekening, jaarlijkse administratiekosten, aankoop van obligaties, schrijfloon, enzovoort. Over het verdere verloop van dit initiatief is niets bekend maar het is aan te nemen dat het niet lang heeft bestaan [21].

In 1775 publiceerde Dr. A. Gallas zijn *Kortbondige en stelkonstige Verhandeling over den aart der Lyfrenten, Tontinen, Weduwenbeursen en andere Negotiatiën*. Gallas verzucht in zijn voorwoord: "het is jammer dat de [...] zo nuttige wijze van rekenen met tiendelige breuken zo weinig in zwang is; [...] niet alleen de Tafels, maar al hetgeen in deze verhandeling voorkomt, kan voor hem, die in het minste geen denkbeeld van derzelver behandeling heeft, van weinig nut zijn." Behalve decimaalbreuken waren ook logaritmen essentieel om het rekenwerk binnen de perken te houden, en ook gebruikte Dr. Gallas de 'stelkonst' (algebra), zodat zijn analyses vermoedelijk weinig effect hadden op de vele mensen in het veld die niet bekend waren met decimaalbreuken. Het duurde tot de negentiende eeuw totdat lijfrentes en soortgelijke producten in Nederland op wiskundig onderbouwde manier werden aangeboden. In 1807 werd de Hollandsche Sociëteit van Levensverzekeringen opgericht te Amsterdam [22], en de hoogleraar Jan Hendrik van Swinden (1746–1823) werd benoemd tot wiskundig adviseur. In 1830 verscheen het eerste, nog steeds goed leesbare, leerboek over de berekening van levensverzekeringen en aanverwante zaken, speciaal geschreven voor "ongeoefenden in de wiskunde". [23]

Figuur 3 Een man en vrouw komen om zich in te tekenen bij een weduwenbeurs.

Tot besluit

De wiskundige problemen die we behandeld hebben zijn tegenwoordig nog steeds actueel. Een huis kan worden aangekocht met een hypotheek, waarbij de bank een beginkapitaal verschaft en de huiseigenaar dit gedurende 30 jaar afbetaalt met een constant maandbedrag dat uit rente en aflossing bestaat. Een pensioen is een vorm van lijfrente op het lijf van de persoon zelf, waarbij de uitkering wordt uitgesteld totdat het lijf 65, 66 of 67 jaar oud is. Tegenwoordig worden geavanceerde wiskundige methoden gebruikt bij de berekening van hypotheken en pensioenen, maar de oudere methoden die we hebben behandeld geven een eerste benadering, en ze zijn hopelijk niet te hoog gegrepen voor geïnteresseerde middelbare scholieren in de bovenbouw. De geschiedenis van deze problemen kan hen duidelijk maken dat wiskunde niet alleen interessant is, maar dat er ook veel geld mee verdiend kan worden [24].



Figuur 4 Jan Hendrik van Swinden (1746–1823)

Nawoord
Dit artikel is een herziene versie van een lezing in de vakantiecursus voor wiskundeleraren met thema 'Tel Uit je Winst', georganiseerd in augustus 2009. Ik dank Jantien Dopper, Ida Stamhuis en Steven Wepster voor hun kritisch commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

Noten

1 Voor voorbeelden en historische context zie Ida Stamhuis, Levensverzekeringen 1500–1800, p. 141–156 in J. van Gerwen, M.H.D. van Leeuwen, ed., *Studies over Zekerheidsarrangementen: Risico's, risicobestrijding en verzekeringen in Nederland vanaf de Middeleeuwen*, Amsterdam en Den Haag: Nederlands Economisch Historisch Archief en Verbond van Verzekeraars, 1998.

2 Simon Brugghelinck, *Tafelen van interest, midtsgaders de constructie der selver*. Antwerpen: Christoffel Plantijn, 1582. De tekst is uitgegeven in D.J. Struik, ed., *Principal Works of Simon Stevin*, Vol. IIA, Mathematics, Amsterdam 1958, digitale versie op www.historyofscience.nl. Zie ook C.M. Waller Zeper, *De oudste interesttafels in Italië, Frankrijk en Nederland met een herdruk van Stevin's "Tafelen van Interest",* Amsterdam 1937.

3 Voor een digitale versie zie www.dbnl.org. Het pamflet is opgenomen in de verslagen van de vergaderingen van de Staten van Holland en West Friesland. De tekst is gepubliceerd in *Feest-Gave van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam …ter gelegenheid der viering van zijn honderdjarig bestaan.* Haarlem: Joh. Enschedé en zonen, 1879.

4 Dit bedrag is nodig bij een jaarlijkse betaling: de lezer wordt uitgenodigd zelf na te gaan dat voor twee halfjaarlijkse betalingen van 500.000 gulden bij een rentestand van 4 procent een beginkapitaal van 25.247.549 gulden nodig is.

5 Zie Ida Stamhuis, Christiaan Huygens correspondeert met zijn broer over levensduur. Hoe wetenschappelijke begrippen kunnen ontstaan. *De zeventiende eeuw. Cultuur in de Nederlanden in interdisciplinair perspectief* 12 (1996), pp. 161–170.

6 Zie Ida Stamhuis, Radeloos, redeloos noch reddeloos: Jan de Witt's lijfrenteberekeningen rond het rampjaar, *Nieuw Archief van Wiskunde, Fourth Series*, 17, 1999, pp. 439–452.

7 Zie verder Ida Stamhuis, De ontwikkeling van de actuariële theorie tot de zeventiende en achttiende eeuw, pp. 157–174 in: J. van Gerwen e.a., *Studies over Zekerheidsarrangementen*, zie [1]; en *Bouwstoffen voor de Geschiedenis van de Levensverzekeringen en Lijfrenten in Nederland*. Bijeengebracht en bewerkt door de Directie van de Algemeene Maatschappij van Levensverzekering en Lijfrente gevestigd te Amsterdam. 1897, pp. 14–28.

8 We kunnen dit illustreren aan het volgende voorbeeld: Stel dat het lijf de leeftijd van $52\frac{1}{2}$ jaar heeft bereikt. Nu is de kans om voor de 53e verjaardag te overlijden gelijk aan $\frac{1}{29}$, dat is $\frac{1}{128}$ (de onvoorwaardelijke kans op gebeurtenis 100) gedeeld door de totale kans $\frac{1}{128} + \frac{28}{128}$ op één van de gebeurtenissen 100 tot en met 154. Als het lijf op de 53e verjaardag nog leeft, is de kans om in het eerste halfjaar daarna te overlijden $\frac{1}{42}$. Wanneer het lijf 53 jaar wordt, zou dus een plotselinge verbetering van de gezondheid optreden.

9 Andreas Hald, *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*, New York: Wiley, 1990, p. 130.

10 Zie p. 23 van de *Feest-gave* in [3] hierboven.

11 Zie *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*, Tome septième: Correspondance 1670–1675. Amsterdam: Swets and Zeitlinger, reprint ed., 1978, tussen p. 96 en 97, digitale versie op http://gallica.bnf.fr. Om de tabel te zien kan men het beste eerst p. 96 of 97 opvragen en dan één pagina vooruit of achteruit bladeren.

12 Later is opgemerkt dat deze rekenmethode van Hudde beter is dan het gebruiken van gemiddelde gegevens over sterfte van de bevolking. Mensen die een lijfrente namen, kozen daarvoor een gezond en jong lijf, zodat ze langer rente konden trekken, en de lijven waren daarom geen gemiddelden.

13 Zie b.v. E.S. Pearson, *The History of Statistics in the 17th and 18th centuries*, p. 39.

14 De Moivre veronderstelde $\omega = 86$, dat wil zeggen dat er zo weinig mensen ouder worden dan 86 dat we hun aantal in de lijfrenteberekening kunnen verwaarlozen. Zie verder Hald [9], pp. 131–140, 508–525, en J. du Saar, De betekenis van de Moivre's werk over lijfrenten voor de ontwikkeling van de verzekeringswetenschap, *Het Verzekerings-Archief* 4 (1923), pp. 28–45.

15 Stel $f(x) = x + x^2 + \ldots + x^n$. Dan geldt $f(x) = (x - x^{n+1})/(1 - x)$. Nu is $\frac{n-1}{n}x^1 + \frac{n-2}{n}x^2 + \ldots + \frac{1}{n}x^{n-1} = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - \frac{x}{n}(1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}) = f(x) - \frac{x}{n}f'(x)$. Hieruit volgt de formule met standaard rekenwerk.

16 Ook gedrukt als pp. 362–392 van de *Inleiding tot de Algemeene Geographie, benevens eenige sterrekundige en andere verhandelingen*, Amsterdam: Tirion, 1740. Digitale versie op books.google.com. De geciteerde tabellen staan op pp. 363–368, 377.

17 Herdrukt in pp. 345–360 van de *Inleiding*, zie [16] hierboven.

18 Zijn werken zijn in het Frans vertaald in *Les Oeuvres de Nicolas Struyck (1687–1769), qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères tirées des oeuvres complètes*, traduites du Hollandais par J.A. Vollgraff. Amsterdam 1912. Daarna is Struyck met Kersseboom vergeleken in M. van Haaften, *Nicolaas Struyck en zijne sterftetafels*,'s Gravenhage 1925.

19 Zie *Bouwstoffen* [7], pp. 292–297.

20 Voor meer gegevens over weduwenbeurzen zie Sandra Bos en Ida H. Stamhuis, Begrafenis- en weduwenfondsen, en prebende sociëteiten, pp. 175–182 in *Studies over Zekerheidsarrangementen* [1].

21 Zie *Bouwstoffen* [7], pp. 336–345.

22 Deze organisatie heeft tot 1967 zelfstandig bestaan, is toen gefuseerd met een andere, en in 1969 opgegaan in de Delta Lloyd Groep.

23 Rehuel Lobatto, *Beschouwing van den aard, de voordeelen en de inrigting der Maatschappijen van Levensverzekering …bijzonderlijk opgesteld ten dienste der ongeoefenden in de Wiskunde*, Amsterdam 1830, digitale versie beschikbaar op books.google.com. Zie Ida Stamhuis, De actuariële theorie en de ontwikkeling van het beroep van actuaris in de negentiende eeuw, pp. 403–423 in *Studies over Zekerheidsarrangementen* [1].

24 Voor verdere literatuur over het onderwerp zie Ida Stamhuis, *'Cijfers en Aequaties' en 'Kennis der Staatskrachten': Statistiek in Nederland in de negentiende eeuw*, Amsterdam 1989, pp. 19–41, en Danny Beckers, *"Het despotisme der Mathesis": Opkomst van de propaedeutische functie van de wiskunde in Nederland, 1750–1850*, Hilversum 2003, pp. 130–132.