

## Samenvatting

Het oplossen van optimale stoptijdproblemen gedreven door Lévy processen is een uitdagende opgave en kent verscheidene toepassingen in de moderne theorie van de financiering. Voorbeelden zijn het vinden van de arbitrage-vrije prijs van een Amerikaanse put (call) optie en het bepalen van een optimaal faillissementsniveau voor het probleem van endogeen faillissement.

Het belangrijkste aspect van het prijzen van de Amerikaanse put (call) optie is het vinden van de kritieke waarde van het prijsproces waaronder (waarboven) de optie uitgeoefend wordt. Voor endogeen faillissement gaat het vooral om het vinden van een optimaal faillissementsniveau van een bedrijf dat een constant schuldenprofiel heeft en dat het faillissementsniveau endogeen kiest om de *equity* waarde te maximaliseren. Binnen de context van de optimale stoptijdtheorie komen de arbitrage-vrije prijs van de Amerikaanse put (call) optie en de equity waarde overeen met de waardefunctie van een optimaal stoptijdprobleem, terwijl de kritieke waarde van het prijsproces en het optimale faillissementsniveau overeenkomen met de optimale stopgrens.

In het algemeen zijn optimale stoptijdproblemen twee-dimensionaal, omdat de waardefunctie en de optimale stopgrens tegelijk gevonden dienen te worden. Hierbij kan de waardefunctie gezien worden als functie van de te vinden optimale stopgrens. Dit is een van de redenen dat het oplossen van optimale stoptijdproblemen, vanuit een analytisch oogpunt, uitdagend is.

Een belangrijke techniek die vaak gebruikt wordt bij het oplossen van optimale stoptijdproblemen gedreven door diffusies, is de vrije-randwaarde probleem formulering van de waardefunctie en de grens. Deze formulering bestaat hoofdzakelijk uit een partiële differentiaalvergelijking en (naast andere voorwaarden) de continue en gladde verbindingvoorwaarde. Voor de eerste voorwaarde dient de waardefunctie continu te zijn op de grens, terwijl voor de tweede voorwaarde op de rand  $C^1$ - gladheid van de waardefunctie vereist is. Afhankelijk van het optimale stoptijdprobleem en van het gedrag van de paden van het Lévy proces kan het gebeuren dat de waardefunctie niet voldoet aan de gladde verbindingvoorwaarde. In dit proefschrift zullen we laten zien dat dit fenomeen plaatsvindt als het Lévy proces van begrensde variatie is. Dit heeft tot gevolg dat voor dit type Lévy processen de continue verbindingvoorwaarde het enige criterium blijkt te zijn volgens dewelke de grens gekozen kan worden. Een beter begrip van de juiste keus van verbindingvoorwaarde voor het bepalen van de grens

kan een belangrijke rol spelen in de theorie.

Een groot gedeelte van dit proefschrift behandelt optimale stoptijdproblemen gedreven door Lévy processen. Het doel is om semi-expliciete oplossingen te vinden voor een bepaalde klasse van optimale stoptijdproblemen. Aan de hand van de gevonden oplossingen geven we noodzakelijke en voldoende voorwaarden waaronder continue en gladde verbinding plaatsvindt. In dit proefschrift geven we voorbeelden van verschillende gevallen.

Voor eindige expiratedatum bestuderen we de Amerikaanse put optie waarbij het prijsproces gedreven wordt door een Lévy proces van begrensde variatie. Het probleem wordt opgelost met behulp van een verandering van veranderlijke formule met lokale tijd op krommen voor Lévy processen van begrensde variatie. Gecombineerd met de Itô-Doob-Meyer decompositie van het waarde-proces van het optimale stoptijdprobleem in een martingaal en een potentiaal proces laten we zien dat de optimale stopgrens gekarakteriseerd kan worden als oplossing van een niet-lineaire integraalvergelijking. Gebruikmakend van de continue verbindingsvoorwaarde vinden we dat, onder enkele verdere voorwaarden, deze integraalvergelijking een unieke oplossing heeft. Deze uniciteit impliceert dat de waardefunctie van de Amerikaanse put optie en de bijbehorende optimale stopgrens de unieke oplossing is van een parabolisch vrije-randwaarde probleem van het integro-differentiaal type.

In het geval van oneindige expiratedatum geven we een optimale formule voor de oplossing van optimale stoptijdproblemen voor een algemene klasse van uitbetalingsfuncties en Lévy processen. De oplossing wordt gevonden door het optimale stoptijdprobleem te reduceren tot een gemiddelde probleem. De oplossing van dit probleem leidt met behulp van de Wiener-Hopf factorisatie tot een fluctuatie-identiteit voor Lévy processen. Deze identiteit relateert de oplossing van het gemiddelde probleem aan de verwachtingswaarde van de gedisconteerde uitbetalingsfunctie tot een eerste passage tijd. Op basis van de identiteit laten we zien dat, mits de oplossing van het gemiddelde probleem een zekere monotoniteitseigenschap heeft, een optimale oplossing van het optimale stoptijdprobleem gegeven kan worden in termen van een monotone functie en dat de grens gegeven wordt door een niveau waar deze functie van teken verandert. Aan de hand van deze oplossing kunnen we laten zien dat aan de gladde verbindingsvoorwaarde voldaan is dan en slechts dan als de rand van het stopgebied regulier is voor het inwendige van het stopgebied voor het Lévy proces. Een aantal problemen wordt in detail bestudeerd, in het bijzonder de polynomiale uitbetalingsfunctie en het vinden van de arbitrage-vrije prijzen van de Amerikaanse put en call opties.

Voor het probleem van endogeen faillissement laten we zien dat voor een specifieke klasse van modellen een optimaal faillissementsniveau gevonden kan worden wanneer de waarde van de activa van de firma gemodelleerd wordt door een Lévy proces zonder positieve sprongen. Aan de hand van dit proces brengen we een nieuw fenomeen aan het licht, namelijk dat afhankelijk van het gedrag van de kleine sprongen, het optimale faillissementsniveau gekozen dient te worden door middel van de continue verbind-

---

ingsvoorwaarde in plaats van de gladde verbindingsvoorwaarde, die men normaal gebruikt. Bovendien laten we zien dat de keuze van het faillissementsniveau inderdaad optimaal is overeenkomstig met de juiste keuze van verbindingsvoorwaarde.

Het merendeel van de resultaten in dit proefschrift wordt geverifieerd aan de hand van numerieke voorbeelden voor Lévy processen met eenzijdige sprongen.