Göttingen, de plek waar het gebeurt (1816-1933)

Göttingen, Göttingen? Toch niet het knusse studentenstadje in het zuiden van Noord-Duitsland? Jawel. Ooit was het DE place-to-be. Bijna iedereen die ook maar iets betekende in de wiskundige wereld van de 19e of begin 20e eeuw heeft daar een tijdje gestudeerd of gewerkt. Om de bekendste te noemen: Bessel, Betti, Bianchi, Bolyai, Brauer, Cantor, Casorati, Clebsch, Dedekind, DeRahm, Dirac, Dirichlet, Ehrenfest, Eisenstein, Fields (van de medailles), Frobenius, Gauss, Haar, Hasse, Hecke, Hilbert, Kaluza, Klein, Landau, Minkowski, Möbius, Noether, Ostrowski, Rademacher, Riemann, Riesz (van Frichet), Struik, Teichmüller, Toeplitz, Urysohn, Von Neumann, Witt, Zermelo en de gebroeders Grimm (van de sprookjes). En, niet te vergeten: het afgelopen half jaar was ik er, om te zien wat er nog van de magie van Göttingen over is. – Vincent van der Noort

Göttingen, dat er nog altijd uitziet alsof het zo uit een sprookje van Grimm is weggelopen en waar je in de mensa voor 1 euro 10 een volwaardige maaltijd kunt krijgen, lijkt zich niet heel erg bewust van zijn rijke geschiedenis als wiskundig Centrum van de Wereld. Weliswaar is er op het vroegere huis van Riemann (nu een zaak voor de betere herenmode) een bordje aangebracht dat zegt dat de wiskundige daar ooit gewoond heeft, maar als je bijvoorbeeld kijkt naar straatnamen zijn de fysici ten opzichte van de wiskundigen ver in de meerderheid. Nu is dit niet zo verwonderlijk. De overeenkomst tussen natuurkundige ontdekkingen en straatnaambordjes is duidelijk: beide dienen de mensheid tot groot nut, iets wat je van de meeste wiskunde niet kunt zeggen.
Het wiskundegebouw is echter een ander verhaal. Als je na het beklimmen van de statige bordestrappen de grote ontvangsthal (genaamd: de Hilbertruimte) binnenloopt, ademt de geest van 15 generaties genieën je tegemoet. Temeer omdat de portretten en levensbeschrijvingen van al deze grootheden door het hele gebouw verspreid aan de muur hangen. Daarom nu, exclusief in Scoop, direct vanuit Niedersachsen: de laatste roddels over 6 van Göttingens beroemdste wiskundige inwoners.

1. Der Fürst

De eerste pak 'm beet achtien jaar van je leven heb je nooit van hem gehoord. Dan ga je niets vermoedend wis- of natuurkunde studeren en plots is zijn naam overal: Gauss. De stelling van Gauss, het vlak van Gauss, de methode van Gauss, de kromme van Gauss, de wet van Gauss, het lemma van Gauss, het andere lemma van Gauss, het nog niet eerder genoemde lemma van Gauss… Nergens ben je veilig. Wie was deze man, vraag je je af, en hoe heeft hij het voor elkaar gekregen zijn naam overal aan te verbinden?
Ergens hoopte ik dat het een kwestie zou zijn van het op de juiste feestjes verschijnen of de juiste mensen omkopen, maar in het geval van Carl Friedrich Gauss (1777- 1855) moet ik na bestudering van de feiten toch toegeven dat het er waarschijnlijk mee te maken heeft dat hij gewoon het grootste wiskundige genie aller tijden is. Sommigen roemen hem als grondlegger van de verzekeringswiskude, anderen als de eerste die van getaltheorie een serieus te nemen vakgebied maakte. Hij is de uitvinder van 'generalized nonsense' als de niet-Euclidische meetkunde maar ook van huis-tuin-en-keukenwiskunde als de kleinste kwadratenmethode. Fysici danken het idee potentialen waar de hele electrodynamica om lijkt te draaien aan hem en de Georg August Universität Göttingen in zijn rol als thuisbasis van genieen. Het is terecht om van wiskunde 'voor' en 'na' Gauss te spreken. Niet alleen omdat er 'na' Gauss gewoon veel meer wiskunde wás, maar ook omdat sinds Gauss de manier waarop wiskundige bewijzen gegeven worden naar moderne maatstaven veel en veel netter is.
Waar te beginnen? Misschien bij zijn geboorte. Die vond plaats in Brunswick in 1777. Dan een kleine tijdsprong. Gauss is inmiddels 17 en komt naar Göttingen om te studeren. Geen wiskunde, maar klassieke talen. Aiaiai, stelt u zich toch eens voor. Hier dreigt het grootste wiskundige genie aller tijden voorgoed voor de mensheid verloren te gaan.

De mensheid kan wel inpakken, lijkt het, en Göttingen al helemaal. Gelukkig komt hij tijdens zijn studie (naar men fluistert door het werk van Plato) in contact met wiskundige problemen waar de Oude Grieken zich mee bezig hielden, zoals passer-en-latje-constructies. Op een ochtend wordt de zeventienjarige Gauss wakker met in zijn hoofd de constructie van een regelmatige 17-hoek. Niet alleen was dit de eerste vooruitgang op dit gebied van de wiskunde in bijna 2000 jaar, het overtuigde Gauss er ook van dat hij zijn hart toch bij de wiskunde lag. De wereld was gered.

De constructie stond niet op zichzelf. Gauss bewees in één klap de volgende stelling:

Een regelmatige n-hoek is construeerbaar met passer en latje dan en slechts dan als n te schrijven is als $n = 2^k p_1 p_2 \ldots p_l$ *met* k $p_1, \ldots, p_l$ *verschillende Fermatpriemgetallen.* Fermatgetallen zijn getallen van de vorm $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ met $n = 0, 1, 2, \ldots$ en Fermatpriemgetallen zijn Fermatgetallen die toevallig priem zijn. Fermat (Leuke man! Lees meer over hem in [1]!) claimde dat alle Fermatgetallen priem zijn. F_0 tot en met F_4 zijn dit inderdaad. Met moderne computers kunnen we ook iets grotere Fermat getallen bekijken en wat blijkt? Tussen de volgende 10.000 Fermatgetallen zit geen enkele priem De grootste priem-hoek waarvan we weten dat we hem kunnen construeren is dus de $2^{32} + 1 = 65537$-hoek, en in het wiskunde-instituut in Göttingen staat ook ergens een kistje met daarin op een heleboel papier een netjes uitgewerkte constructie van dit gedrocht. Niet afkomstig van Gauss, maar afkomstig van een man die per se AIO wilde worden bij Felix Klein. Klein zag dat eigenlijk niet zo zitten maar was op een goed moment het gezeur van de man beu en gaf hem dan maar de opdracht de constructie van de 65537-hoek netjes uit te zoeken. Het bewijs van Gauss dat dit mogelijk is, is te vinden in het voor tweedejaars goed leesbare [2].

Goed, Gauss mocht dan zich nog net op tijd tot de wiskunde bekeerd hebben, Göttingen was hier nog niet mee gered. In Göttingen was indertijd maar één hoogleraar (Kaestner) te vinden die zich met wiskunde bezighield (wiskunde was immers maar een hulpvakje voor de natuurkunde) en deze was in de ogen van Gauss geen groot licht. Naar verluidt besteedde de jonge Gauss het grootste deel van de lessen aan het tekenen van karikaturen van zijn leraar (dat kon hij kennelijk ook al). Na twee jaar verliet Gauss Göttingen zonder diploma en maakte zijn studie in zijn geboorteplaats Brunswick af, om vervolgens in Hensfeld te promoveren. Al deze tijd, en ook na zijn promotie, had hij het geluk dat hij een beurs kreeg van de Hertog van Brunswick, die kennelijk erg trots was op het feit dat zulke grote genieen in 'zijn' stadje geboren werden.

Voor de Universität Göttingen zag het er ondertussen wat minder rooskleurig uit. De natuurwetenschappelijke faculteit (die zich voornamelijk met sterrenkunde bezighield) kampte met geldtekorten en verouderd materieel. In 1803 zag het er even naar uit dat het iets beter zou gaan: een stukje grond werd aangekocht om een nieuw observatorium te bouwen. Helaas duurde het door politieke spelletjes en corruptieschandalen nog tot 1816 voordat de nieuwe sterrenwacht er eindelijk stond. In dat jaar was het vorstendommetje Hannover (waaronder Göttingen viel) door een slimme huwlijkspolitiek in handen gekomen van de niet-onbemiddelde Koning Jérôme van Westphalen. Deze stelde in een poging het prestige van zijn koninkrijkje iets op te krikken 200.000 Francs ter beschikking voor de bouw van de sterrenwacht, waardoor deze eindelijk afkwam. Maar voor echt prestige, besefte Jérôme, zijn bakstenen en koper niet genoeg. Daarom liet hij de (sinds de publicatie van zijn boek *Disquisitiones Arithmeticae* in 1801) wereldberoemde Gauss terug naar Göttingen halen om daar directeur van de sterrenwacht te worden. Dit was een gouden zet. De aanwezigheid van Gauss trok vele andere begaafde wis- en natuurkundigen aan en luidde het begin in van een tijdperk dat tot ver na de dood van Gauss en Koning Jérôme voortduurde.

Gauss bleef tot zijn dood op (voor die tijd) zeer hoge leeftijd in de sterrenwacht wonen en werken. Hij deed vele ontdekkingen op het gebied van wiskunde, natuurkunde en theoretische sterrenkunde. Ondertussen bleef hij ook trouw aan zijn eerste liefde: de klassieke talen. Hij publiceerde steevast in het Latijn (dat zijn status als 'taal der wetenschap' toch al enigszins verloren had) en bestudeerde intensief het werk van klassieke wiskundigen, in het bijzonder Archimedes, die hij erg bewonderde.

Over zijn tijdgenoten was hij in het algemeen minder te spreken. Vaak was zijn enige commentaar op nieuwe wiskundige ontdekkingen dat hij die enige tientallen jaren eerder ook al gedaan had, maar het de moeite van het publiceren niet waard vond. Met zijn norse optreden en ongenaakbare status heeft hij enige geniale jonge wiskundigen zoals Abel afgeschrikt om naar Göttingen te komen. Toch heeft Göttingen zijn grote naam vooral aan deze 'Koning aller Wiskundigen' te danken en het is dan ook terecht dat er een standbeeld van Gauss in een van de parken staat. Helaas is dit beeld echter gewijd aan een natuurkundige ontdekking. Samen met de natuurkundige Wilhelm Weber (weten we eindelijk ook waar die woont), ontwikkelde Gauss de eerste telegraafverbinding ter wereld, van de sterrenwacht naar het natuurkundegebouw (ongeveer 1 km). De eerste boodschap die ooit door een telegraaflijn is verzonden luidt 'Wissen statt meinen, sein statt scheinen' (Weten in plaats van veronderstellen, zijn in plaats van lijken) wat nu als officieuze slagzin van de universiteit Göttingen dienst doet.

2. Der Visionär

De meest getalenteerde leerling van Gauss in Göttingen was Georg Friedrich Bernhard Riemmann (1826- 1866). Riemanns genialiteit uitte zich op een andere manier dan die van Gauss. Waar Gauss duizendeneen bijdragen leverde aan ieder onderdeel van de wiskunde, had Riemann eigenlijk maar een paar goede ideeën. Deze waren echter meteen zo goed dat ze de wiskundige gemeenschap tot op dag van vandaag van de straat houden. Het bekendste voorbeeld hiervan is natuurlijk de Riemannhypothese, waarover alles te lezen is in het scoopartikel [3]. Het daaraan ten grondliggende idee: 'Hm... wat zou er gebeuren als we in Eulers functie

$$\xi(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots$$

willekeurige complexe getallen invullen in plaats van alleen gehele?' is even absurd als vruchtbaar. Hiermee bleek het opeens mogelijk allerlei dingen over gehele getallen (in het bijzonder de nogal ongrijpbare priemgetallen) te zeggen. (Zie ook [4]). Ook tegenwoordig wordt er nog veel onderzoek naar de Riemann-Zetafunctie gedaan, maar helaas 'was het meeste wat we nu weten ook al aan Riemann bekend' in de woorden van Samuel Patterson, huidig hoogleraar in Göttingen en internationaal erkend expert op het gebied van zeta-functies.

Riemann studeerde twee jaar wiskunde in Göttingen, maar vond het daar niet zo interessant. Buiten Gauss waren er eigenlijk geen wiskundigen en Gauss zelf had niet zo veel zin al te veel tijd aan eerste- en tweedejaars colleges te besteden. Daarom verhuisde Riemann naar Berlijn waar hij les kreeg van grootheden als Jacobi, Dirichlet en Eisenstein. Na zijn studie kwam hij echter terug naar Göttingen om te promoveren bij Gauss. In zijn proefschrift introduceerde hij wat we nu 'Riemann-oppervlakken' noemen. Dit was, simpel gezegd, een meetkundige of topologische manier om tegen complexe functietheorie aan te kijken, waardoor dit ondoorzichtige vakgebied opeens een stuk helderder en begrijpelijker werd. Gauss was gecharmeerd van Riemanns originele kijk op de dingen en droeg hem voor voor een vaste aanstelling in Göttingen in 1851. Gewoonte was dat iemand die zo'n post kreeg een lezing hield over wat hij zoal onderzocht had of van plan was te onderzoeken.

Aan zelfvertrouwen ontbrak het Riemann niet. Hij bereidde maarliefst drie verschillende lezingen voor en liet Gauss (net als de zoon in Festen) er een kiezen. In de lezing die Gauss koos, zette Riemann uiteen hoe men Gauss' ideeën over de meetkunde van gekromde vlakken naar willekeurig hoge dimensies kon generaliseren. Dit vormde het begin van wat nu Riemannse meetkunde heet. Aan wat Riemann toen in zijn lezing vertelde wordt nu (in het vak differentiaalmeetkunde) een heel trimester besteed. Wie dit vak gevolgd heeft, zal het niet verbazen dat al na vijf minuten niemand van de aanwezigen nog maar iets van Riemanns lezing kon volgen. Niemand, behalve Gauss, die gedurende de hele lezing met een zeer geamuseerde glimlach op zijn troon zat. Iets dat, aldus de overlevering, lang niet meer was voorgekomen.

3. Een man met een principe.

Een van de wiskundige waar Göttingen ook erg trots op is Johann Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805- 1859). Dit was ook zonder meer een groot wiskundige, maar hij heeft eigenlijk maar vier jaar van zijn leven (en wel de laatste vier) in Göttingen doorgebracht. Daar werd hij in 1855 naartoe gehaald om de leerstoel van Gauss, die toen stierf, over te nemen. Voor die tijd heeft Dirichlet aan verschillende universiteiten in Frankrijk en later Duitsland gestudeerd en gewerkt. Daar heeft hij eigenlijk al zijn grote wiskundige ontdekkingen gedaan.

Het idee waar we hem het meest dankbaar voor moeten zijn is het zogenaamde 'laadjesprincipe van Dirichlet' of 'Dirichletprincipe', dat zegt dat als je een bureau hebt met n laadjes waar je n+1 paperclips in kwijt wilt, je altijd minstens twee paperclips in hetzelfde laatje moet stoppen. Dit is natuurlijk nogal een open deur, maar je kunt dit idee gebruiken om allerlei minder voor de hand liggende

stellingen te bewijzen zoals het feit dat er in Amsterdam twee mensen rondlopen met precies hetzelfde aantal haren op hun hoofd.
Een andere stelling waarmee Dirichlet beroemd is geworden is de volgende:
Als a en b twee onderling ondeelbare getallen zijn, dan bevat de rij a, a + b, a + 2b, a+ 3b, ... oneindig veel priemgetallen.
In het bijzonder zijn er dus oneindig veel priemgetallen die eindigen op een 3. Dit is een van de sterkste uitspraken die we over de verdeling van de priemgetallen kunnen doen en hij bevestigt de hoofdvuistregel van de getaltheorie: 'de priemgetallen gedragen zich zo onregelmatig als ze zich maar kunnen veroorloven binnen de zware verantwoordelijkheid van hun taak om (dmv vermenigvuldiging) de hele, extreem regelmatige rij van natuurlijke getallen voort te brengen.'

4. Waar een Klein groot in kan zijn.

Afgaande op de objecten die naar hem vernoemd zijn: de Viergroep van Klein en de Kleinfles (zie [8]), had ik niet het idee dat Felix Klein (1849-1925) nou één van de grootste wiskundigen uit de geschiedenis was. Groot was dan ook mijn verbazing toen ik bij mijn aankomst in Göttingen de nogal uit de kluiten gewassen 'Felix Klein Sporthalle' tegen het lijf liep. Deze bleek te horen bij het Felix Klein Gymnasium, maar dat maakte de verbazing niet minder omvangrijk.
De tekst over Klein in het wiskundegebouw biedt uitkomst. Naast een groot wiskundige, schrijft deze, was Klein vooral een groot organisator. Toen hij in 1886 naar Göttingen kwam, had hij zijn grootste wiskundige ontdekkingen al achter zich liggen, maar als directeur van het Mathematisch Instituut, heeft hij veel voor Göttingen betekend. Hij wist overal geld los te krijgen en haalde vele grote wiskundigen, zoals Hilbert, naar Göttingen. Daarnaast had hij een bijzondere interesse in onderwijs. Hij wist voor elkaar te krijgen dat wiskunde een verplicht vak op school werd in Göttingen en omgeving en stichte de nog steeds aan de universiteit Göttingen verbonden lerarenopleiding. Ook liet hij een indrukwekkende collectie draadmodellen van allerhande typen krommen en vlakken aanleggen, die nog steeds te zien is.
Zijn vermogen iets zich concreets voor te stellen bij abstracte meetkundige objecten was sowieso zijn grootste kracht als wiskundige en hij weidde zijn wiskundige leven dan ook voornamelijk aan de meetkunde. In het bijzonder was hij de drijvende kracht achter het 'Erlanger Programm', een programma om de wirwar van verschillende euclidische en niet-euclidische meetkundes die sinds de tijd van Gauss was ontstaan in een allesomvattend axiomastelsel onder te brengen. In het bijzonder probeerde hij alle meetkunde te beschrijven uitgaande van een abstracte verzameling punten en een rijtje onderlinge relaties waar die punten zich aan moesten houden. Dit is natuurlijk precies de manier waarop tegenwoordig alle wiskunde geformuleerd wordt, maar in Kleins tijd was dit zeer revolutionair, en we kunnen dan ook zeggen dat Kleins Erlanger Programm een groot stempel op onze huidige manier van wiskunde bedrijven gedrukt heeft.

5. De man met de hoed

David Hilbert (1862-1943) beschouwde zichzelf als de grootste wiskundige van zijn tijd, en eigenlijk leek zijn omgeving dat volkomen met hem eens te zijn. Tekenend is het verhaal waarin een journalist hem vraagt waarom hij 'als grootste wiskundige ter wereld' nooit geprobeerd had het vermoeden van Fermat op te lossen. Zijn antwoord was dat hij dan eerst 10 jaar zou moeten uittrekken om alles te bestuderen wat er al over gezegd is, en vervolgens nog eens 10 jaar nodig zou hebben om het vermoeden te bewijzen. En in die tijd kon hij beter een hoop andere nuttige dingen doen.
Erg beroemd is zijn toespraak aan het begin van 1900 waarin hij 23 open problemen noemde die de wiskundige wereld van de 20e eeuw zouden moeten bezig houden (zie [5]). Inmiddels zijn ze op drie na allen opgelost, maar iedere keer als er weer één van de 'Hilbertproblemen' gekraakt werd gedurende de afgelopen eeuw, was dat een grote gebeurtenis die de wiskundige wereld op haar grondvesten deed sidderen. Kennelijk had Hilbert geen miljoen dollar nodig (zoals het Clay Institute, zie [6]) om een probleem tot een Groot Onopgelost Probleem te maken, maar was zijn eigen grote naam daarvoor genoeg.
De vraag waaróm Hilbert nou als zo'n groot wiskundige beschouwd werd en wordt, is niet zo makkelijk te beantwoorden. Volgens zijn onbekend gebleven leerling Otto Blumentahl komt dat omdat hij niet zo zeer veel nieuwe concepten heeft geintroduceerd (zoals Gauss en Riemann) maar daarentegen allerlei oude al bestaande concepten op een veel dieper niveau begreep en doorzag dan andere

wiskundigen en zo allerlei onverwachte dwarsverbanden binnen de wiskunde ontdekte. Het bekendste voorbeeld hiervan is waarschijnlijk de Hilbert Basis Stelling die algebra en meetkunde verbindt en tegenwoordig de basis van de Algebraische Meetkunde vormt.
Wat voor Hilbert pleit is dat hij zijn status gebruikte om andere grote wiskundigen die op minder erkenning konden rekenen, vooruit te helpen. Bekend is (bijvoorbeeld uit het scoopartikel [7]) hoe hij een van de weinigen was die Emmy Noether niet alleen als vrouw zag, maar erkende als de grote wiskundige die zij was. Een ander voorbeeld is dat hij de aanbiedingen die hij van andere universiteiten kreeg om daar te komen werken gebruikte om te onderhandelen met Göttingen. Niet over meer salaris voor hem zelf, maar over het creëren van een extra leerstoel voor Minkowski, wat hij uiteindelijk voor elkaar kreeg.

6. It was she…

Over het tragische leven van Emmy Noether (1882-1935) zal ik hier niet zoveel zeggen omdat dat al in [7] gedaan is. Daarom slechts een persoonlijke noot. Het is voor de natuurkundigen onder u waarschijnlijk moeilijk voor te stellen, maar wij wiskundejongens zijn stiekem allemaal een beetje verliefd op Emmy Noether. Wat sommige mensen met de heilige maagd hebben, hebben wij met haar. Eén van de redenen is dat er natuurlijk niet zo veel alternatief is, in de vorm van grote vrouwelijke wiskundigen. De voornaamste reden voor onze aanbidding van juist deze vrouw steekt echter in het volgende citaat van P.S. Alexandrov uit 1935 over Emmy Noether, dat te vinden is in de syllabus van Algebra 2A:
"It was she who taught us to think in terms of simple and general algebraic concepts - homomorphic mappings, groups and rings with operators, ideals – and not in terms of cumbersome algebraic computations."
Als dat waar is, dachten we (en waarom zou het niet waar zijn?) dan hebben we feitelijk ons hele levensgeluk (in elk geval dat in onze studie) aan haar te danken. Meer nog dan Gauss was zij het die Göttingen tot een soort bedevaartsoort voor mij maakte. Ik vond (en vind) het dan ook volkomen terecht dat haar portret op verschillende plaatsen meer dan levensgroot in het wiskundegebouw hangt en dat er naast de Hilbertruimte ook een Emmy Noetherruimte in dit gebouw bestaat. (Waarbij dit laatste bovendien weer een interessant licht werpt in de eeuwige discussie of Duitsers nou wel of geen gevoel voor humor hebben.) Alleen… ze is oerlelijk. Ik kan het niet anders zeggen. Van welke hoek uit ze ook gefotografeerd wordt, ze heeft geen enkele 'X-factor'. Natuurlijk doet dit niks af aan mijn bewondering voor haar als wiskudige (er zijn tenslotte wel meer lelijke wiskundigen geweest). En natuurlijk raad ik iedereen nog steeds van harte aan om een keer naar Göttingen te komen, maar een teleurstelling was het wel.

7. Het einde

Aan de bloeitijd van Göttingen kwam een einde met het aan de macht komen van Hitler in 1933. Toendertijd werkt een indrukwekkende lijst mensen in Göttingen: o.a. Emmy Noether, Richard Courant, Felix Bernstein, Edmund Landau, Gustav Herglotz en Herman Weyl. Noether, Bernstein en Courant worden echter ontslagen omdat ze van joodse afkomst zijn. Landau wordt wegens vermeende communistische sympathieën slachtoffer van een boycot door de studenten en gaat met vervroegd pensioen. Herman Weyl mag blijven, maar ziet in dat er met het vertrek van zoveel briljante wiskundigen in Göttingen niet veel meer te beleven is en verhuist naar Amerika, waar Emmy Noether en Felix Bernstein zich al bevinden. Hierdoor was het wiskunde-instituut in Göttingen niet in staat zijn rijke traditie voort te zetten en op het oude niveau terug te komen. In plaats daarvan begonnen Amerikaanse universiteiten zoals Princeton deze plek als centrum van de wiskunde in te nemen. Met Göttingen is het nooit meer helemaal goedgekomen.

Referenties

[1] Simon Singh: Fermat's last Theorem
[2] Charles Robert Hadlock: Field Theory and its Classical Problems, Carus Mathematical Monographs 19, The Mathematical Association of America, 1978, ISBN:088385032X
[3] Charles Mathy en Vincent v.d. Noort: Riemann Zeta, Scoop van mei 2002. Kijk op de scoop website: http://www.science.uva.nl/student/scoop.
[4] S. J. Patterson: An Introduction to the Theory of the Riemann Zeta-Function.
[5] http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html
[6] http://www.claymath.org/millennium/
[7] Paul Friedel: De stelling van Noether, Scoop van oktober 2003. Zie wederom de scoop website.
[8] http://www.kleinbottle.com/