Over de Elektrodynamika van Bewegende Lichamen

door **A. Einstein**

Dat de Elektrodynamika van Maxwell wanneer toegepast op bewegende lichamen — volgens de gangbare opvatting — tot asymmetrieën leidt die niet inherent zijn aan de verschijnselen, is algemeen bekend. Beschouw, bijvoorbeeld, de elektromagnetische wisselwerking tussen een magneet en een geleider. Het waargenomen verschijnsel hangt hier alleen af van de relatieve beweging van geleider en magneet, terwijl volgens de gangbare opvatting beide gevallen, waarin het ene of het andere lichaam beweegt, scherp van elkaar te onderscheiden zijn. Beweegt namelijk de magneet en de geleider niet, dan ontstaat in de omgeving van de magneet een elektrisch veld met een bepaalde hoeveelheid energie, die in de delen waar de geleider zich bevindt een elektrische stroom induceert. Beweegt daarentegen de geleider en de magneet niet, dan ontstaat in de geleider een elektro-motorische kracht, die geen energie in zich draagt, maar die — onderstellende dat de relatieve beweging in beide gevallen gelijk is — een identieke elektrische stroom oproept, zoals in het eerste geval de elektrische krachten die oproepen.

Gelijksoortige voorbeelden, alsook de mislukte pogingen de beweging van de Aarde ten opzichte van een 'licht-medium' te constateren, leiden tot het vermoeden dat het begrip van absolute rust niet alleen in de mechanika doch ook in de elektrodynamika aan geen enkele eigenschap van de verschijnselen beantwoordt, maar veeleer dat in alle referentiesystemen waarin de vergelijkingen der mechanika gelden, ook de elektrodynamische en optische wetmatigheden gelden, zoals reeds bewezen is voor grootheden tot in 1ste orde. Wij zullen dit vermoeden (dat we in het vervolg het 'RelativiteitsBeginsel' noemen) tot de status van postulaat verheffen, en bovendien zullen we een postulaat invoeren dat er schijnbaar onverenigbaar mee is, te weten dat licht zich door de lege ruimte altijd voortplant met dezelfde snelheid c, onafhankelijk van de bewegingstoestand van de lichtbron. Deze beide postulaten voldoen om een eenvoudige en consistente elektrodynamika van bewegende lichamen op te stellen, gebaseerd op de theorie van Maxwell voor lichamen in rust. De invoering van een 'licht-ether' zal overbodig blijken in zoverre de alhier te ontwikkelen theorie noch een 'ruimte in absolute rust' met bijzondere eigenschappen invoert, noch aan ieder punt in de lege ruimte waarin elektromagnetische processen zich voordoen een snelheidsvector toekent.

De hier te ontwikkelen theorie steunt — zoals ieder andere elektrodynamika — op de kinematika van starre lichamen, daar de beweringen van een dergelijke theorie relaties betreffen tussen starre lichamen (referentiesystemen met meetlatten), klokken en elektromagnetische processen. De veronachtzaming van deze omstandigheid is de wortel van de moeilijkheden die een elektrodynamika van bewegende lichamen moet overwinnen.[1]

[1]Het Lichtpostulaat was anno 1905 onomstreden. Het was algemeen bekend dat iedere golfvergelijking impliceert dat de voortplantingssnelheid van de golven onafhankelijk is van de snelheid van de bron; hieronder viel in het bijzonder de Poissonvergelijking, die o.a. volgt uit de bronvrije Maxwell-vergelijkingen (en toenmalige varianten daarvan, zoals die van Hertz). De uitbreiding van het RelativiteitsBeginsel van *mechanische* naar *elektromagnetische* (en *optische*) verschijnselen was echter zeer omstreden. Het RelativiteitsBeginsel lijkt immers strijdig met het Lichtpostulaat. De gangbare manier om de strijdigheid af te wenden was het RelativiteitsBeginsel ongeldig te verklaren voor elektromagnetische (en optische) verschijnselen, door het referentie-systeem ten opzichte waarvan de ether in rust verkeert aan te merken als voorkeurssysteem om de elektromagnetische (en optische) wetmatigheden in te formuleren (eerst gedaan door Augustin Fresnel in 1818). Dit leidde tot een parade van ethertheorieën. Einstein's revolutionaire inzicht is dat men genoemde strijdigheid evenzeer kan afwenden wanneer men doordenkt wat niemand had doordaccht ("de bron van de moeilijkheden"): de manier waarop wij de plaats en de tijd van een gebeurtenis empirisch vaststellen. Dit verschafte Einstein een *theoretische* reden om te twijfelen aan het bestaan van een ehter.

Een *empirische* reden om te twijfelen aan het bestaan van de ether zag Einstein in de uitkomsten van het experiment van Hippolyte Fizeau (1851), en misschien in die van Michelson (1881) — H.A. Lorentz besprak beide experimenten in zijn vermaarde *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern* (Leiden, 1885), dat Einstein goed kende. Van het beroemde experiment van Michelson & Morely (1887) was Einstein niet op de hoogte.

Ofschoon de mores van het wetenschappelijk publiceren anno 1905 niet te vergelijken is met die anno 2005, blijft het opmerkelijk dat 'Zur Elektrodynamik ...' geen enkele expliciete verwijzing bevat naar enig ander artikel of boek en niettemin gonst van de impliciete verwijzingen — lees de openingszinnen van de eerste twee alinea's van de inleiding.

Evenzeer opmerkelijk is dat Einstein de speciale relativiteitstheorie (de naamgeving is van Planck) nooit heeft willen zien als een omwenteling in de fysika doch als een vervolmaking van de klassieke natuurkunde. Met 'Zur Elektrodynamik ...' geeft Einstein de natuurkunde een schoonmaakbeurt, door enkele lelijke asymmetrieën weg te poetsen. [FAM]

I. Kinematisch Deel

§ 1. Definitie van Gelijktijdigheid

Men neme een referentie-systeem waarin de vergelijkingen van de Newtonse mechanika gelden.[2] We noemen dit referentie-systeem ter onderscheiding van een later in te voeren referentie-systeem en ter precisering van het spraakgebruik 'het rust-systeem'.

Bevindt een materieel punt zich in dit referentie-stelsel in rust, dan kan men zijn positie in dit stelsel bepalen met starre meetlaten door de methoden van de Euklidische meetkunde te gebruiken en uitdrukken in Cartesische co-ordinaten. Willen we de *beweging* van een materieel punt beschrijven, dan vatten we zijn co-ordinaten op als functie van de tijd. Men moet wel in ogenschouw nemen dat een dergelijke wiskundige beschrijving pas fysisch zinrijk is, wanneer men klaarheid verschaft over wat men hier met 'tijd' bedoelt.

We moeten ons vergewissen van het feit dat al onze uitspraken waarin tijd een rol speelt altijd uitspraken zijn over *gelijktijdige gebeurtenissen.* Wanneer ik bijvoorbeeld zeg 'Die trein komt hier om 7 uur aan', dan betekent dat zioets als: 'De kleine wijzer op mijn klok wijst naar 7 en de aankomst van de trein zijn gelijktijdige gebeurtenissen'.[3]

Het lijkt mogelijk alle moeilijkheden van de definitie van 'tijd' te overwinnen door 'de positie van de kleine wijzer van mijn klok' te substitueren voor 'tijd'. Een dergelijke definitie voldoet in het geval dat men alleen 'tijd' wil definiëren voor plaatsen in de nabijheid van de klok; deze definitie voldoet echter niet langer wanneer men de tijden van gebeurtenissen die zich op verschillende plaatsen voltrekken met elkaar elkaar wil verbinden, of — wat op hetzelfde neerkomt — men de tijd wil bepalen van gebeurtenissen die ver van de klok plaatsvinden.

We kunnen ons alleszins tevreden stellen de tijden van gebeurtenissen te bepalen door een waarnemer met een klok in de oorsprong van het co-ordinaten-stelsel de aankomsttijden van lichtsignalen te meten die de gebeurtenissen uitzenden. Een dergelijke bepaling heeft echter het nadeel dat zij niet onafhankelijk is van het standpunt van de waarnemer met zijn klok, zoals de ervaring ons leert. Een veel praktischer bepaling verkrijgen we door de volgende beschouwing.

Bevindt zich in punt A in de ruimte een klok, dan kan een waarnemer in A de tijd van de gebeurtenissen in de nabijheid van A bepalen door te

[2]Dat will zeggen in eerste bendadering. [AS] Dus een inertiaal-systeem. Alle referentie-systemen in dit artikel hebben een Cartesisch co-ordinaten-stelsel. [FAM]

[3]De onnauwkeurigheid die in het begrip van de gelijktijdigheid van twee gebeurtenissen die zich (bij benadering) op dezelfde plaats afspelen en waarvan we zullen moeten abstraheren, zullen we hier niet verder bespreken. [AE]

kijken naar de gelijktijdige wijzerstanden van de klok in A. Bevindt zich ook in punt B een klok — en we willen toevoegen: 'een zelfde klok als die in A' —, dan is een bepaling van de tijden van de gebeurtenissen die in de nabijheid van B mogelijk door een waarnemer in B. Het is echter zonder verdere stipulatie niet mogelijk de tijd van een gebeurtenis nabij A met die van een gebeurtenis nabij B te vergelijken; we hebben tot dusver slechts een 'A-tijd' en een 'B-tijd' gedefinieerd, maar niet een voor A en B gemeenschappelijke 'tijd'. Laatstgenoemde tijd kan men definiëren door *per definitie* vast te leggen dat de 'tijd' die het licht nodig heeft van A naar B te reizen gelijk is aan de tijd die het licht nodig heeft van B naar A te reizen. Stel dat een lichtstraal op 'A-tijd' $t_{A,1}$ uit A naar B vertrekt, en stel dat op 'B-tijd' t_B de lichtstraal te B wordt weerkaatst in de richting van A, en in A aankomt op 'A-tijd' $t_{A,2}$. De twee klokken lopen per definitie synchroon indien

$$t_B - t_{A,1} = t_{A,2} - t_B \; . \tag{1}$$

We onderstellen dat deze definitie van gelijktijdigheid vrij is van mogelijke tegenspraken, toepasbaar is op elk aantal punten, en dat de volgende betrekkingen algemeen gelden:

1. Als de klok in B synchroon loopt met de klok in A, dan loopt de klok in A synchroon met de klok in B.

2. Als de klok in A synchroon loopt met de klok in B en ook met de klok in C, dan lopen de klokken in B en C ook synchroon.

Dus met behulp van bepaalde gedachten-experimenten hebben we vastgelegd wat we bedoelen met synchroon lopende klokken die zich op verschillende plaatsen bevinden, en daardoor een definitie gegeven van 'gelijktijdig' en 'tijd'. De 'tijd' van een gebeurtenis is de tijd die de wijzers van een klok aangeven die zich in de nabijheid van die gebeurtenis in rust bevindt; deze klok loopt synchroon, en wel voor alle tijdsbepalingen synchroon, met een gespecificeerde klok in rust.[4]

Op grond van onze ervaring stipuleren we nu dat de grootheid

$$\frac{2\,\overline{AB}}{t_{A,2} - t_{A,1}} = c \; , \tag{2}$$

een universele constante is — de snelheid van het licht in de lege ruimte.[5]

[4]Einstein had 1 (symmetrie) en 2 (transitiviteit gegeven symmetrie) niet hoeven *onderstellen* omdat zijn synchronisatie-procedure garandeert dat ze gelden. Daar iedere klok synchroon loopt met zichzelf (3, reflexiviteit), is de gelijktijdigheidsrelatie een equivalentie-relatie en brengt een partitie aan in de ruimte-tijd in 3-dimensionele Euklidische ruimten van gelijktijdige gebeurtenissen. [FAM]

[5]Evenmin als vergelijking (1) een definitie of afspraak kan zijn, kan vergelijking (2) een stipulatie zijn: beide vergelijkingen volgen immers logisch uit het Lichtpostulaat

Wezenlijk is dat wij tijd gedefinieerd hebben met een rust-systeem; we noemen deze tijd 'de tijd van het rust-systeem'.

§ 2. Over de Relativiteit van Lengten en Tijden

De volgende overwegingen zijn gebaseerd op het RelativiteitsBeginsel en het beginsel van de constante lichtsnelheid, welke beide beginselen we als volgt definiëren.

1. De wetmatigheden die de toestandsveranderingen van fysische systemen regeren hangen niet af van welke van twee referentie-systemen men kiest voor de beschrijving wanneer deze systemen eenparig rechtlijnig ten opzichte van elkaar bewegen.

2. Iedere lichtstraal beweegt in een rust-stelsel met dezelfde snelheid c onafhankelijk van het feit of de lichtstraal uitgezonden is door een lichaam dat beweegt of in rust verkeert. Dus

$$\text{lichtsnelheid} = \frac{\text{afgelegde weg van het licht}}{\text{benodigde tijd}}, \tag{3}$$

waarin men 'tijd' moet opvatten in de zin van de definitie uit § 1.

Gegeven een starre staaf in rust; zij l_0 de lengte van de staaf gemeten door een starre meetlat die in rust is ten opzichte van de staaf. We denken ons in dat de staaf langs de X-as van het co-ordinaten-stelsel van het rust-systeem S eenparig rechtlijnig in beweging wordt gebracht (met snelheid v) in de positieve X-richting. We vragen thans naar de lengte van de *bewegende* staaf; voor de bepaling daarvan bedienen we ons van de volgende twee procedures.

(a) De waarnemer beweegt tezamen met de eerder genoemde meetlat met de te meten staaf mee en meet direkt de lengte van de staaf, door zijn meetlat naast de staaf te leggen, precies zoals wanneer de staaf, meetlat en waarnemer zich in rust bevinden.

en definitie (3). Synchronisatie-vergelijking (1) impliceert dat de ruimte *isotroop* is. In zijn *Philosophie der Raum und Zeit* (1949) zou Hans Reichenbach verdedigen dat $t_B = \frac{1}{2}(t_{A,1} + t_{A,2})$ (1) een speciaal geval is uit een schaar van synchronisatie-vergelijkingen: $t_B = \varepsilon(t_{A,1} + t_{A,2})$, waarin $\varepsilon \in (0,1)$. Met $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$ is de ruimte *anisotroop*; men krijgt dan een aangepaste versie van de speciale relativiteitstheorie voor iedere waarde van ε, die alle empirisch equivalent zijn aan elkaar en dus aan de speciale relativiteitstheorie. Een opmerkelijk gevolg is dat de isotropie van de ruimte-tijd niet empirisch te bepalen is en derhalve de status heeft van een *afspraak*: het is onmogelijk experimenteel vast te stellen of het licht zich in verschillende richtingen met dezelfde snelheid voortplant. In 'Causal Theories of Time and the Conventionality of Simultaneity', *Noûs* **11** (1977) 293–300, bewees D. Malament evenwel dat conventie $\varepsilon = 1/2$ de enige is die invariant is onder de symmetrie-group van de Minkowski ruimte-tijd. [FAM]

(b) Met behulp van klokken in het rust-systeem S en de synchronisatie-procedure uit § 1 bepaalt de waarnemer op welke punten in het rust-systeem de twee uiteinden van de staaf zich bevinden op een bepaald tijdstip t. De afstand tussen deze twee punten, gemeten met de reeds gebruikte meetlat, die zich in dit geval in rust bevindt, kunnen we 'de lengte van de staaf' noemen.

Volgens het RelativiteitsBeginsel moet de lengte die we volgens procedure (a) bepalen, en die we 'de lengte van de staaf in het bewegende systeem S'' zullen noemen, gelijk zijn aan de lengte l_0 van de staaf in rust. De lengte die we volgens procedure (b) bepalen zullen we 'de lengte van de bewegende staaf in het rust-systeem S' noemen. We zullen deze lengte l op grond van onze twee beginselen bepalen en we zullen zien dat ze verschilt van l_0.[6]

De algemeen gebruikte kinematika onderstelt stilzwijgend dat de lengten die beide procedures opleveren gelijk zijn, of met andere woorden, dat een star lichaam dat beweegt gedurende het tijdinterval Δt in meetkundig opzicht geheel vervangbaar is door *datzelfde* lichaam wanneer dat zich op een bepaalde positie *in rust* bevindt.

We stellen ons voor dat aan de twee uiteinden van de staaf (A en B) klokken zijn geplaatst die synchroon lopen met de klokken in het rust-systeem S, dat wil zeggen dat de tijden die ze aanwijzen op ieder moment corresponderen met 'de tijd van het rust-stelsel S' op de plaatsen waar zij zich bevinden; deze klokken lopen daardoor 'synchroon in het rust-stelsel S'.

We stellen ons bovendien voor dat met iedere klok een waarnemer mee beweegt, en dat deze waarnemers de synchronisatie-procedure van § 1 voor beide klokken uitvoeren. Stel een lichtstraal vertrekt uit A op tijdstip $t_{A,1}$, wordt terruggekaatst op tijdstip t_B en bereikt A weer op tijdstip $t_{A,2}$.[7] Betrekken we het beginsel van de constante lichtsnelheid in onze beschouwing, dan vinden we dat[8]

$$t_B - t_{A,1} = \frac{l}{c-v} \quad \text{en} \quad t_{A,2} - t_B = \frac{l}{c+v}\,, \tag{4}$$

waarin l de lengte is van de bewegende staaf — gemeten in het rust-systeem S. Waarnemers die met de staaf mee bewegen zullen dus vinden

[6]Einstein zou later zeggen dat de *geometrische* lengte (l_0) verschilt van de *kinematische* lengte (l) van de staaf. [FAM]

[7]'Tijd' betekent hier 'tijd van het rust-systeem' en ook 'de positie van de wijzers van de bewegende klok die zich bevindt op de plaats onder beschouwing'. [AE]

[8]Vergelijkingen (4) volgen uit de vergelijkingen in S van de heengaande en de bij B weerkaatste lichtstraal beschrijven: $c(t_B - t_{A,1}) = l + v(t_B - t_{A,1})$ resp. $c(t_{A,2} - t_B) = l - v(t_{A,2} - t_B)$. Men moet (4) uiteraard niet lezen alsof $v - c$ de snelheid is van de heengaande en $c + v$ van de weerkaatste lichtstraal. [FAM]

dat de twee klokken niet synchroon lopen, terwijl waarnemers in het rust-systeem verklaren dat de klokken synchroon lopen.

We zien dus dat we aan het begrip gelijktijdigheid geen *absolute* betekenis kunnen hechten, maar dat twee gebeurtenissen die gelijktijdig zijn wanneer beschouwd vanuit een zeker referentie-systeem, niet meer gelijktijdig zijn wanneer beschouwd vanuit een referentie-systeem dat relatief ten aanzien van het eerste beweegt.[9]

§ 3. Theorie van de Transformatie van de Co-ordinaten en Tijden van een Rust-Systeem naar een ander Referentie-Systeem dat eenparig rechtlijnig beweegt ten opzichte van het eerstgenoemde

We nemen twee referentie-systemen in de ruimte, S en S', i.e. twee systemen die elk bestaan uit drie onderling loodrechte, starre lijnen van materie, en vertrekken vanuit een enkel punt. De X-assen vallen samen, en hun respectieve Y- en Z-assen staan evenwijdig aan elkaar. Ieder systeem heeft een starre meetlat en een aantal klokken, en de meetlatten zijn precies hetzelfde en evenzo alle klokken.

Laat nu één van de twee referentie-systemen (S') met een constante snelheid v bewegen in de richting van de positive X-as van het andere referentie-systeem (S), dat het rust-systeem is, inclusief zijn starre coordinaat-assen, zijn starre meetlat en zijn klokken. Op ieder moment in het rust-systeem S hebben de assen van het bewegende systeem S' een bepaalde positie, en op basis van symmetrie-overwegingen mogen we onderstellen dat de beweging van S' zodanig is dat op ieder tijdstip t (deze 't' verwijst altijd naar de tijd in het rust-systeem) zijn co-ordinaat-assen altijd evenwijdig zijn met die van het rust-systeem S.

We stellen ons voor dat de ruimte van het rust-systeem S met zijn starre meetlat in rust en die van het bewegende systeem S' met zijn meebewegende starre meetlat wordt gemeten met co-ordinaten x, y, z, respectievelijk x', y', z'. Laat verder de tijd-co-ordinaat t van alle punten in het rust-systeem S waar zich klokken in rust bevinden bepaald zijn met de procedure met lichtsignalen uit § 1; laat evenzo de tijd-co-ordinaat t' van all punten in het bewegende systeem S' waar zich de meebewegende klokken bevinden bepaald zijn met de procedure met lichtsignalen uit § 1.

[9]Merk op dat Einstein deze onverwachte conclusie (de 'relativiteit van gelijktijdigheid') verbindt aan de conjunctie van het Lichtpostulaat en het RelativiteitsBeginsel middels een extreem eenvoudig gedachten-experiment, zonder eerst de Lorentz-transformaties af te leiden. Trouwens, met zoveel woorden geldt hetzelfde voor het verschijnsel *lengtekrimp*: $2l_0 = c/t_{A,2}$ (in S) en $2l = c/t'_{A,2}$ (in S') wanneer S en S' samenvallen op $t_{A,1} = 0 = t'_{A,1}$, zodat $l \neq l_0$ zodra $t_{A,2} \neq t'_{A,2}$. [FAM]

Met elk viertal waarden van x, y, z, t, die de plaats en tijd van een gebeurtenis vastleggen in het rust-stelsel S, correspondeert een viertal waarden van x', y', z', t', die de gebeurtenis vastleggen relatief ten op zichte van het bewegende systeem S', en het is onze taak het stelsel vergelijkingen te vinden dat deze grootheden met elkaar verbindt.

Eerstens is het duidelijk dat deze vergelijkingen *lineair* moeten zijn vanwege de homogeniteitseigenschappen die we aan de ruimte en de tijd toeschrijven.[10]

Stellen we dat $x_0 = x - vt$, dan is het duidelijk dat een punt in rust in het systeem S de co-ordinaten x_0, y, z toekomt die niet afhangen van de tijd.[11] We zullen eerst t' als functie van x_0, y, z en t bepalen. Daarvoor zullen we in vergelijkingen uitdrukken dat t' niet meer behelst dan wat de klokken aangeven die zich in rust bevinden in systeem S' en gesynchroniseerd zijn met de procedure uit § 1.

Stel dat een lichtstraal vertrekt vanuit de oorsprong van systeem S' op tijdstip t'_0 langs de X-as naar x_0, teruggekaatst wordt op tijdstip t'_1 naar de oorsprong en aldaar aankomt op tijdstip t'_2; dan moeten we hebben:

$$\tfrac{1}{2}\left[t'_0 + t'_2\right] \;=\; t'_1\ , \tag{5}$$

of, door de argumenten van de functie t' in te voegen en het beginsel van

[10] Uit de gangbare definitie van de homogeniteit van de ruimte en van de tijd volgt echter *niet* dat de transformaties lineair zijn, wel uit de homogeniteit van de ruimte-tijd, dat een logisch sterkere onderstelling is; cf. Roberto Torretti, *Relativity and Geometry* (Oxford: Pergamon Press, 1983), blz. 71–83. Bedenk voorts dat het denkbeeld van de *ruimte-tijd* als een *4-dimensioneel continuüm*, met *vier* (Cartesische) co-ordinaten (x, y, z, t), pas in 1908 het licht zou zien, eerst in de ogen van de wiskundige Hermann Minkowski (bij wie Einstein in 1902 aan de ETH te Zürich colleges had gevolgd), o.a. in zijn invloedrijke lezing 'Raum und Zeit', *Physikalisches Zeitschrift* **20** (1909) 104–111. Daarna zou het thans alomtegenwoordige formalisme van *vier-vectoren* verder worden ontwikkeld, met name door Arnold Sommerfeld, die ook de naam 'vier-vector' in 1910 heeft ingevoerd, in 'Zur Relativitätstheorie I: Vierdimensional Vektoralgebra, *Annalen der Physik* **32** (1910) 749–776, 'Zur Relativitätstheorie II: Vierdimensional Vektoralgebra', *Annalen der Physik* **33** (1910) 649–689. [FAM]

[11] Men kan x_0 het beste opvatten als een 'hulp-variabele'. Wanneer Einstein dadelijk synchronisatie-vergelijking (5) in S zal aanwenden, dan staat op $t = 0 = t'$ klok A in $x'_A = x_A = 0$ en klok B in $x'_B = x_0$; de 'wereldlijnen' van klokken A en B zijn in S': $x'_A(t') = 0$ resp. $x'_B(t') = x_0$, en in S: $x_A(t) = vt$ resp. $x_B(t) = x_B(0) + vt$. De onderlinge afstand van de klokken zal dan inderdaad niet van de tijd afhangen en is in beide systemen constant: $x'_B(t) - x'_A(t) = x_0$ bezien vanuit S', en $x_B(t) - x_A(t) = x_B(0)$ bezien vanuit S. Cf. A.A. Martinez, 'Kinematic subtleties in Einstein's first derivation of the Lorentz-transformations', *American Journal of Physics* **72** (2004) 790–798. [FAM]

de constante lichtsnelheid te gebruiken in het rust-systeem:

$$\tfrac{1}{2}\Big[t'(0,0,0,t) + t'\Big(0,0,0, \quad t + \frac{x_0}{c-v} + \frac{x_0}{c+v}\Big)\Big]$$
$$= t'\Big(x_0, 0, 0, t + \frac{x_0}{c-v}\Big) . \tag{6}$$

Hieruit volgt, wanneer men x_0 infinitesimaal klein kiest:

$$\tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\Big)\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial x_0} + \frac{1}{c-v}\frac{\partial t'}{\partial t} , \tag{7}$$

ofwel

$$\frac{\partial t'}{\partial x_0} + \frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial t'}{\partial t} = 0 . \tag{8}$$

We merken op dat we in plaats van de oorsprong ieder punt als vertrekpunt van de lichtstraal hadden kunnen kiezen, en vergelijking (8) is derhalve geldig voor alle waarden van x_0, y, z.[12]

Een analoge overweging — toegepast op de Y- en de Z-as —, met in gedachten dat licht zich langs deze assen voortplant met snelheid $\sqrt{c^2-v^2}$ wanneer beschreven vanuit het rust-stelsel, leidt tot

$$\frac{\partial t'}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial t'}{\partial z} = 0 . \tag{9}$$

Doordat t' is *lineaire* functie is, volgt uit deze vergelijkingen

$$t' = a(v)\Big(t - \frac{v}{c^2-v^2}\,x_0\Big) \tag{10}$$

[12]Als x_0 infinitesimaal klein is, dan staan klokken A en B infinitesimaal dicht naast elkaar en moeten dan zelf ook infinitesimaal klein zijn. De synchronisatie-vergelijking, in § 2 nadrukkelijk door Einstein bedoeld om klokken die op flinke afstand van elkaar staan gelijk te zetten, kan men dan niet langer aanwenden. Einstein doet iets wat tegen de geest en de letter van § 1 in gaat en wat tevens zijn revolutionaire uitgangspunt is, namelijk hoe de plaats en tijd van gebeurtenissen empirisch te bepalen. Infinitesimale klokken op infinitesimale afstanden van elkaar, dat heeft tittel noch iota van doen met de empirie.

Daarenboven lijkt de afleiding nu extreem beperkt, namelijk tot punten (x, y, z, t) waarvoor geldt dat $x_0 = x - vt$ infinitesimaal klein is. We willen toch ook co-ordinaten (x, y, z, t) van S transformeren naar co-ordinaten (x', y', z', t') van S' waarvoor geldt dat $x - vt$ astronomisch groot is? Einstein heeft zich evenwel vergewist van dit tweede bezwaar — dat fataal zou zijn indien correct *nisi fallor* —, en merkt daarom op dat men, in plaats van infinitesimale schommelingen in x en t rond de 'oorsprong' $(0, 0, 0, t)$ te beschouwen, dezelfde schommelingen in x en t kan beschouwen rond een *willekeurig* ruimtelijk punt p dat co-ordinaten (x_p, y_p, z_p) heeft op tijdstip t in S — ook met $x_p - vt$ astronomisch groot —, met opnieuw 'hulp-variabele' $x_0 = x - vt$. Zouden we nu een nieuw co-ordinaten-stelsel vastleggen in dezelfde referentie-systemen S en S', door ruimtelijk punt p op tijdstip $t = 0 = t'$ de ruimtelijke coordinaten $(0, 0, 0)$ van de oorsprong te geven in S en S', dan hebben we letterlijk dezelfde afleiding van Einstein terug, omdat in *dat* geval $(x_p, y_p, z_p, t) = (0, 0, 0, t)$. [FAM] waarin $a(v)$ een vooralsnog onbekende functie is en we voor het gemak hebben ondersteld dat de oorsprongen van S' samenvallen wanneer $t' = 0 = t$.

Met behulp van dit resultaat (10) kunnen we gemakkelijk de grootheden x', y', z' bepalen door in vergelijkingen uit te drukken dat licht (zoals het beginsel van de constante lichtsnelheid en het RelativiteitsBeginsel eisen) zich ook met snelheid c voortplant wanneer gemeten in het meebewegende systeem S'. Voor een lichtstraal uitgezonden op tijdstip $t' = 0$ in de richting van de positieve X'-as geldt:[13]

$$x' = ct' , \tag{11}$$

ofwel

$$x' = a(v)c\Big(t - \frac{v}{c^2 - v^2}\,x_0\Big) . \tag{12}$$

Maar ten opzichte van de oorsprong van S' beweegt de lichtstraal met snelheid $c - v$ wanneer gemeten in het rust-systeem,[14] zodat

$$\frac{x_0}{c - v} = t . \tag{13}$$

Substitueren we deze uitdrukking voor t in vergelijking (12) voor x', dan krijgen we:

$$x' = a(v)\,\frac{c^2}{c^2 - v^2}\,x_0 . \tag{14}$$

Op analoge wijze, door lichtstralen te beschouwen die zich langs de andere twee co-ordinaat-assen voortplanten, vinden we dat:

$$y' = ct' = a(v)c\Big(t - \frac{v}{c^2 - v^2}\,x_0\Big) \tag{15}$$

waarin dan

$$\frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = t \quad \text{en} \quad x_0 = 0 ; \tag{16}$$

dus

$$y' = a(v)\,\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,y \tag{17}$$

[13] W.L. Kennedy, 'On Einstein's 1905 electrodynamics paper', *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* **36** (2005) 61–65, betoogt dat Einstein hier het pad der algemeenheid verlaat door *licht* te beschouwen; de uiteindelijk verkregen transformatie-formules zouden derhalve uitsluitend voor punten op de lichtkegel gelden. Naarstig verricht Kennedy zijn raparatiewerkzaamheden. [FAM]

[14] Dit is ongelukkig onder woorden gebracht, want de lichtsnelheid is niet gelijk aan $c - v$ in S; cf. voetnoot 8. [FAM]

en evenzo

$$z' = a(v)\,\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,z\ . \tag{18}$$

Gebruiken we de uitdrukking $x - vt$ voor x_0, dan krijgen we:[15]

$$\begin{aligned} t' &= f(v)\gamma_v(t - \beta x/c)\ , \\ x' &= f(v)\gamma_v(x - vt)\ , \\ y' &= f(v)y\ , \\ z' &= f(v)z\ , \end{aligned} \tag{19}$$

waarin[16]

$$\gamma_v \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{en} \quad \beta \equiv v/c\ , \tag{20}$$

en f de vooralsnog onbekende functie is van v. Maakt men over de beginpositie van het bewegende systeem S' en het nulpunt van t' geen enkele onderstelling, dan moet men aan de rechterzijde van vergelijkingen (19) een additieve constante toevoegen.

We moeten nu aantonen dat iedere lichtstraal, gemeten in het bewegende stelsel S', zich snelheid c voortplant, zoals we ondersteld hebben dat in het rust-stelsel het geval is; we hebben evenwel nog niet het bewijs geleverd dat het beginsel van de constante lichtsnelheid en het RelativiteitsBeginsel verenigbaar zijn.

Op tijdstip $t = t' = 0$ wordt uit de samenvallende oorsprongen van beide referentie-systemen een bolgolf uitgezonden, die zich voortplant met snelheid c in het rust-stelsel S. Zij (x, y, z) een point waar deze lichtgolf aankomt; dan

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \tag{21}$$

Transformeren we deze vergelijking met behulp van onze transformatievergelijkingen (19), dan verkrijgen we na een eenvoudige berekening:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \tag{22}$$

De lichtgolf is dus zonder meer ook een bolgolf met voortplantingssnelheid c wanneer beschreven vanuit het bewegende systeem S'. Hiermee

[15]Stilzwijgend heeft Einstein $a(v)$ herschreven als $f(v)/\gamma_v$. De cruciale factor γ_v sluipt op een ondoorgrondelijke manier de afleiding binnen. Het lijkt alsof Einstein al wist waar hij uit moest komen ... [FAM]

[16]Handig voor het vervolg: $\gamma_v = 1 + \beta^2/2 + 3\beta^4/8 + 5\beta^6/16 + 35\beta^8/128 + \mathcal{O}(\beta^{10})$. Deze machtreeks convergeert doordat $|\beta| < 1$. Vrijwel alle formule's in dit artikel zijn benaderingen, gebaseerd op de eerste twee termen uit deze reeks. [FAM]

is aangetoond dat onze beide grondbeginselen met elkaar verenigbaar zijn.[17]

In de transformatievergelijkingen (19) komt nog steeds de onbekende functie f van v voor, die we thans zullen bepalen.

Daartoe voeren we een derde referentie-systeem S'' in, dat ten opzichte van S' rechtlijnig eenparig langs de X'-as beweegt, zodanig dat de oorsprong van het systeem S'' met een snelheid $-v$ beweegt langs de X'-as. Op tijdstip $t = 0$ vallen alle drie oorsprongen samen, en wanneer $t = x = y = z = 0$ zetten we de tijd-co-ordinaat t'' van stelsel S'' gelijk aan 0. We noemen de co-ordinaten gemeten in het systeem S'', x'', y'', z'', t'', en door een tweevoudige toepassing van onze transformatievergelijkingen (19) verkrijgen we

$$\begin{aligned} t'' &= f(-v)\gamma_{-v}\big(t' + \beta x'/c\big) &&= f(v)f(-v)t\ , \\ x'' &= f(-v)\gamma_{-v}\big(x' + vt'\big) &&= f(v)f(-v)x\ , \\ y'' &= f(-v)y' &&= f(v)f(-v)y\ , \\ z'' &= f(-v)z' &&= f(v)f(-v)z\ . \end{aligned} \tag{23}$$

Doordat de betrekkingen tussen x'', y'', z'' en x, y, z de tijd t niet bevatten, zijn de systemen S en S'' in rust ten op zichte van elkaar, en is het evident dat de transformatie van S naar S'' de identieke moet zijn. Uit (23) volgt dan:

$$f(v)f(-v) = 1\ . \tag{24}$$

We vragen nu naar de fysische betekenis van $f(v)$. We richten onze aandacht op het gedeelte van de Y'-as van systeem S' dat ligt tussen $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ en $x' = 0$, $y' = l$, $z' = 0$. Dit gedeelte van de Y-as is een starre staaf die loodrecht op zijn as met snelheid v beweegt ten opzichte van S. Zijn uiteinden hebben in S de volgende co-ordinaten:

$$x_1 = vt\ , \quad y_1 = \frac{l}{f(v)}\ , \quad z_1 = 0 \tag{25}$$

en

$$x_2 = vt\ , \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0\ . \tag{26}$$

De lengte van de staaf, gemeten in S, is dan $l/f(v)$; hiermee hebben we een fysische betekenis toegekend aan de functie $f(v)$. Uit symmetrieoverwegingen is het nu evident dat de lengte van een starre staaf die

[17] De Lorentz-transformaties kan men eenvoudiger afleiden uit de eis dat de vergelijking (21) in S er in S' uitziet als vergelijking (22). [AS] Maar weet men dan niet alleen hoe punten op de lichtkegel transformeren? Zie voetnoot 13. [FAM]

loodrecht op zijn as beweegt, wanneer gemeten in het rust-stelsel, alleen afhangt van de snelheid en niet van de richting en van de soort van beweging. De lengte van de bewegende staaf, wanneer gemeten in het rust-systeem, verandert niet, zodat men v en $-v$ kan verwisselen. Hieruit volgt:

$$\frac{l}{f(v)} = \frac{l}{f(-v)} , \tag{27}$$

ofwel

$$f(v) = f(-v) . \tag{28}$$

Uit relaties (24) en (28) volgt dat $f(v) = 1$, zodat we de transformatie-vergelijkingen (19) kunnen herleiden tot:[18]

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_v(t - \beta x/c) , \qquad & y' &= y , \\ x' &= \gamma_v(x - vt) , \qquad & z' &= z . \end{aligned} \tag{29}$$

§ 4. Fysische Betekenis van de verkregen Vergelijkingen betreffende Starre Lichamen en Bewegende Klokken

We beschouwen een starre bol[19] met straal R, in rust in het meebewegende systeem S', en met het middelpunt in de oorsproing van systeem S'. De vergelijking van het oppervlakte van de bol, die beweegt ten opzichte van S met snelheid v is in S':

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2 . \tag{30}$$

De vergelijking van dit oppervlak uitgedrukt in x, y, z op tijdstip $t = 0$ is

$$\frac{x^2}{\gamma_v^2} + y^2 + z^2 = R^2 . \tag{31}$$

Een star lichaam dat, wanneer gemeten in een toestand van rust, bolvormig is, heeft in een toestand van beweging — gezien vanuit het rust-systeem S — de vorm van het omwentelingslichaam van een ellips om de volgende assen:

$$R/\gamma_v, \quad R, \quad R . \tag{32}$$

[18] Einstein heeft de andere oplossing, $f(v) = -1$, weggetoverd. We merken tot slot van § 3 op dat er sinds 1905 een groot aantal verschillende afleidingen van de Lorentz-transformaties bekend is, waarvan de meeste uit verschillende premissen vertrekken; voor een grafisch overzicht, zie J.R. Lucas & P.E. Hodgson, *Spacetime & Electromagnetism* (Oxford: Oxford University Press, 1990), blz. 152. [FAM]

[19] Dat wil zeggen, een lichaam dat bolvormig is wanneer onderzocht in rust. [AE]

Wijl de Y- en Z-afmetingen van de bol (en daardoor van ieder star lichaam van willekeurige vorm) onveranderd blijven door de beweging, krimpt de X-afmeting met verhouding $\gamma_v : 1$, dat wil zeggen dat de krimp groter is naarmate de snelheid v groter is.[20] Voor $v = c$ platten alle bewegende objecten — wanneer gezien vanuit het rust-systeem — af tot vlakfiguren. Voor snelheden groter dan die van het licht worden onze beschouwingen betekenisloos; we zullen echter aanstonds vinden dat de lichtsnelheid in onze theorie de rol speelt van een oneindig grote snelheid.

Het behoeft geen toelichting dat dezelfde resultaten gelden voor starre lichamen in rust die vanuit een eenparig rechtlijnig bewegend referentie-systeem worden beschreven.[21]

We denken ons verder in dat een klok die de tijd t aanwijst wanneer die zich in rust bevindt in het rust-systeem S, en die de tijd t' aanwijst wanneer die zich in rust bevindt in het bewegende systeem S', in de oorsprong van S' wordt geplaatst en de tijd t' aanwijst. Hoe snel tikt deze klok wanneer bezien vanuit het rust-systeem S?

Tussen de grootheden x, t, en t', die op de plaats van de klok betrekking hebben, gelden de volgende vergelijkingen:

$$t' = \gamma_v\big(t - vx/c^2\big) \quad \text{en} \quad x = vt \, . \tag{33}$$

Dan geldt ook:

$$t' = \gamma_v t = t - \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right) t \, , \tag{34}$$

waaruit volgt dat de tijd die de bewegende klok aanwijst (gezien vanuit het rust-stelsel S) langzamer tikt: $1 - \sqrt{1-\beta^2}$ seconde per seconde, of — grootheden van de 4de orde en hoger verwaarlozend — $\frac{1}{2}\beta^2$ seconde achterblijft.

[20] Dit is de befaamde 'Lorentz-FitzGerald-contractie', door Einstein eerst afgeleid zonder gebruik te maken van enige elektrodynamische overwegingen. Ofschoon lengtekrimp een waarneembaar verschijnsel is, zullen wij, mensen, nooit gekrompen starre staven zien maar *gekromde* staven (wanneer ze snel genoeg bewegen), ten gevolge van de hoekafhankelijkheid van het relativistische Doppler-verschijnsel — waarvan Einstein de formule's in § 7 zal afleiden. Dit is pas ruim een halve eeuw later bekend geworden, dankzij J.T. Terrell, 'Invisibility of the Lorentz Contraction', *Physical Review* **116** (1959) 1041–1045. [FAM]

[21] Deze eigenschap heet *wederkerigheid.* Het gedrag van starre lichamen volgens de speciale relativiteitstheorie zou nog voor verrassingen zorgen, *e.g.* de Ehrenfest-paradox, in zijn 'Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie', *Physikalisches Zeitschrift* **10** (1910) 918, en de starheidscontroverse, waar Max Born, Paul Ehrenfest, Einstein, Planck, Gustav Herglotz, Waldemar von Ignatowski, Sommerfeld en Poincaré aan bijdroegen; cf. A.I. Miller, *Albert Einstein's Special Theory of Relativity* (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1981), blz. 230–242. [FAM]

Hieruit vloeit het volgende eigenaardige gevolg voort. Als op punten A en B van S klokken die zich in rust bevinden, gezien vanuit het ruststelsel, synchroon lopen, en als men de klok op A met snelheid v langs de verbindingslijn AB naar B beweegt, dan lopen de klokken niet langer synchroon wanneer de klok in B is aangekomen, maar de klok loopt achter in vergelijking met de klok die in B is blijven staan met een factor $\frac{1}{2}\beta^2\Delta t$ (tot in 4de-orde en groter), waarin Δt de reistijd is volgens de klok die is verplaatst van A naar B.

Men ziet onmiddellijk dat dit resultaat eveneens geldt wanneer de klok via een willekeurig veelhoekige lijn van A naar B beweegt, en in het bijzonder wanneer de punten A en B samenvallen.[22] Onderstellen we dat dit resultaat, bewezen voor een veelhoekige lijn, ook geldt voor een continue kromme, dan bereiken we het volgende resultaat: als men een van twee synchroon tikkende klokken in A beweegt langs een gesloten kromme met constante snelheid, en de reis duurt Δt seconden, dan blijkt deze klok ten opzichte van de andere klok, die in A is gebleven, bij aankomst achter te lopen met een bedrag $\frac{1}{2}\beta^2\Delta t$. Daaruit concluderen we dat een klok op de Aard-equator langzamer tikt, met een heel klein bedrag, dan precies dezelfde klok die op een van de Aard-polen staat onder verder gelijke omstandigheden.[23]

§ 5. De Samenstelling van Snelheden

Laat in het systeem S', dat langs de X-as beweegt van systeem S met snelheid v, een punt bewegen volgens deze vergelijkingen:

$$x'(t') = w'_x t' , \quad y'(t') = w'_y t' , \quad z'(t') = 0 , \tag{35}$$

waarin w_1 en w_2 constanten zijn.

Gezocht is de beweging van het punt beschreven vanuit systeem S. Combineert men de beweging van het punt (35) met de in § 3 ontwikkelde transformatievergelijkingen (29) voor de grootheden x, y, z, t, dan krijgt

[22] In 1911 heeft Paul Langevin ter illustratie een tweeling ingevoerd, hetgeen leidt tot de benaming *de tweeling-paradox*, in 'L'évolution de l'espace et du temps', *Scientia* **10** (1911) 31–54. De versie van de 'tweeling-paradox' waarin alleen sprake is van (drie) eenparig rechtlijnige bewegingen, roept de prangende vraag op het ontstane leeftijdverschil te verklaren in het licht van het RelativiteitsBeginsel. [FAM]

[23] Geen slingeruurwerk, dat een fysisch een systeem is waartoe de Aarde behoort. Dit geval moet men uitsluiten. [AS]

men:

$$\begin{aligned} x &= \frac{w'_x + v}{1 + \beta w'_x/c}\, t \,, \\ y &= \frac{\gamma_v w'_y}{1 + \beta w'_x/c}\, t \,, \\ z &= 0 \,. \end{aligned} \tag{36}$$

De parallelogram-wet voor de combinatie van snelheden geldt volgens onze theorie in eerste benadering.[24] We stellen:

$$w^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \tag{37}$$

$$w'^2 = w'^2_x + w'^2_y \tag{38}$$

en

$$\alpha = \arctan \frac{w'_y}{w'_x} \,; \tag{39}$$

α is dan de hoek tussen de snelheden v en w. Een eenvoudige berekening levert:

$$w = \frac{\sqrt{(v^2 + w'^2 + 2vw' \cos\alpha) - (vw' \sin\alpha/c)^2}}{1 + vw' \cos\alpha/c^2} \,. \tag{40}$$

Het is bemerkenswaard dat v en w' op symmetrische wijze in deze uitdrukking voor de resultante-snelheid w voorkomen.[25] Is ook snelheid w in de richting van de X-as (X'-as) gericht, dan krijgen we:

$$w = \frac{v + w'}{1 + \beta w'/c} \,. \tag{41}$$

Uit deze vergelijking (41) volgt dat de samenstelling van twee snelheden die kleiner dan c zijn, steeds een snelheid oplevert die ook kleiner is dan c. Zet men namelijk $v = c - \kappa$, $w = c - \lambda$, waarin κ en λ beide positief en kleiner zijn dan c, dan is:

$$w = c\,\frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \kappa\lambda/c} \;<\; c \,. \tag{42}$$

---

[24] Door voor x, y, z de uitdrukkingen uit (36) in $w_x = dx/dt$, etc., te substitueren en alleen termen met factoren β te behouden, verkrijgt men $x = (w'_x + v)t$, $y = w_y t$ (en $z = 0$). Dit is de parallellogramwet: $\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{v}$, ofwel de Galileïsche snelheidstransformatie. [FAM]

[25] Dit geldt alleen voor het onderhavige geval, waarin $\mathbf{v}$ langs de X-as is gericht. [FAM]

Voorts volgt dat de lichtsnelheid c niet veranderd kan worden door samenstelling met een snelheid kleiner dan c. Want in een dergelijk geval krijgen we:

$$w = \frac{c + w'}{1 + w'/c} = c\,. \tag{43}$$

In het geval dat v en w gelijkgericht zijn, kunnen we de uitdrukking voor u ook verkrijgen door twee transformatievergelijkingen (29) uit § 3 te combineren. Voeren we daartoe naast de in § 3 figurerende referentiesystemen S en S' nog een derde systeem S'' in, dat evenwijdig aan S' beweegt met snelheid w langs de X'-as, dan verkrijgen we vergelijkingen die de grootheden x, y, z, t relateren aan de corresponderende grootheden van S'', die slechts verschillen van de vergelijkingen (29) gevonden in § 3 in het opzicht dat de rol van v is overgenomen door de grootheid

$$\frac{v + w'}{1 + \beta w'/c}\,; \tag{44}$$

waaraan men ziet dat zulke parallelle transformaties — noodzakelijkerwijs — een groep vormen.[26]

We hebben thans de benodigde kinematische wetmatigheden uit onze twee beginselen afgeleid, en we vervolgen door ze toe te passen in de elektrodynamika.

[26] In een brief aan Lorentz uit eind-1904 tot midden-1905 bewees Henri Poincaré dat de 'Lorentz-transformaties' (Poincaré's benaming) een groep vormen; in 1906 publiceerde Poincaré dit bewijs, cf. Miller (1981), genoemd in voetnoot 21, blz. 262. Einstein bewijst (met zoveel woorden) dat de verzameling transformaties gesloten is; de andere niet-triviale groepseigenschap van associativiteit noemt Einstein niet. Het feit dat groepen geen rol van betekenis speelden in de natuurkunde anno 1905 (alleen in de kristallografie speelde de draaigroep een rol), roept de vraag op waarom Einstein het groepsbegrip met name heeft willen noemen.

Over Poincaré gesproken, hij had zowel de correcte formule voor de samenstelling van snelheden (41) als de transofmatieformules voor de ladingsdichtheid (83) en elektro-magnetische velden (48) eerder dan Einstein. Dit feit, in combinatie met enkele andere overeenkomsten, voedt de opvatting dat Poincaré de eigenlijke ontdekker is van de speciale relativiteitstheorie. Wie echter niet slechts formule's vergelijkt maar ook de omringende text leest, zal inzien dat er een begripsmatige kloof gaapt tussen (de ether-aanhanger) Poincaré en (de ether-afschaffer) Einstein die deze opvatting onhoudbaar maakt. (Formulefilie is een even betreurenswaardige intellectuele tekortkoming als formulefobie; laatstgenoemde is endemisch buiten de wiskunde en de natuurwetenschappen terwijl men formulefilie vooral aantreft onder logici en natuurkundigen.) Cf. G. Holton, 'Poincaré and Relativity', in zijn *Thematic Origins of Scientific Thought: Kepler to Einstein* (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1973) en zijn leerling A.I. Miller, 'Poincaré and Einstein: A Comparative Study', in *Imagery in Scientific Thought: Creating 20th-Century Physics* (Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1986). [FAM]

II. Electrodynamisch Deel

§ 6. Transformatie van de Vergelijkingen van Maxwell en Hertz voor de Lege Ruimte. Over de Aard van Elektro-motorische Krachten die optreden bij Beweging in een Magnetisch Veld

De vergelijkingen van Maxwell en Hertz gelden in de lege ruimte van een rust-systeem S:

$$\nabla\times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \quad \text{en} \quad \nabla\times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,, \tag{45}$$

waarin $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ het elektrische veld en $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ het magnetische veld is.[27] Wanneer we de de transformatievergelijkingen (29) uit § 3 aanwenden ten einde de elektromagnetische processen te beschrijven vanuit het systeem S' dat met snelheid v ten opzichte van S beweegt, dan krijgen we de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial y'}\big[\gamma_v\,(B_z-\beta E_y)\big] - \frac{\partial}{\partial z'}\big[\gamma_v\,(B_y+\beta E_z)\big]\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\big[\gamma_v\,(E_y-\beta B_z)\big] &= \frac{\partial B_z}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial z'}\big[\gamma_v\,(B_z-\beta E_y)\big]\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\big[\gamma_v\,(E_z+\beta B_y)\big] &= \frac{\partial}{\partial x'}\big[\gamma_v\,(B_y+\beta E_z)\big] - \frac{\partial E_x}{\partial y'}\,,
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial z'}\big[\gamma_v\,(E_y-\beta B_z)\big] - \frac{\partial}{\partial y'}\big[\gamma_v\,(E_z+\beta B_y)\big]\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\big[\gamma_v\,(B_y+\beta E_z)\big] &= \frac{\partial}{\partial x'}\big[\gamma_v\,(E_z+\beta B_y)\big] - \frac{\partial E_x}{\partial z'}\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\big[\gamma_v\,(B_z-\beta E_y)\big] &= \frac{\partial E_x}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial x'}\big[\gamma_v\,(E_y-\beta B_z)\big]\,.
\end{aligned}$$

Nu eist het RelativiteitsBeginsel dat als de vergelijkingen van Maxwell en Hertz gelden in de lege ruimte bezien vanuit systeem S, ze ook gelden in systeem S'; dat wil zeggen dat de vectoren van het elektrische en het magnetische veld — $\mathbf{E}' = (E_{x'}, E_{y'}, E_{z'})$ en $\mathbf{B}' = (B_{x'}, B_{y'}, B_{z'})$ — vanuit

[27] Einstein spreekt hier, in navolging van o.a. Hertz, van ‘krachten’ en niet van velden, en gebruikt geen vector-notatie, hoewel bijvoorbeeld Lorentz dat wel deed. Einstein noemt de overige twee Maxwell-vergelijkingen niet ($\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ en $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$), doch zal er wel gebruik van maken. [FAM]

het bewegende systeem S', die zijn gedefinieerd door hun respectieve werking op elektrische en magnetische massa's, de volgende vergelijkingen gehoorzamen:[28]

$$\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \; = \; -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'}$$

en

$$\nabla' \times \mathbf{B}(\mathbf{r}', t') \; = \; \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \, , \tag{47}$$

Beide voor systeem S' gevonden stelsels van vergelijkingen (46) en (47), dienen precies hetzelfde uit te drukken, namelijk dat beide stelsels van vergelijkingen equivalent zijn aan de vergelijkingen van Maxwell en Hertz in stelsel S. Doordat de stelsels van vergelijkingen voor de twee referentiesystemen overeenstemmen op de symbolen voor de vectoren na, volgt dat de functies die in de stelsels van vergelijkingen op overeenkomstige plaatsen staan, aan elkaar gelijk moeten zijn, met uitzondering van een factor $g(v)$, die alle functies van het ene stelsel van vergelijkingen gemeenschappelijk hebben, en die onafhankelijk is van x', y', z' en t', maar eventueel wel afhangt van v. Er gelden dus de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} E_{x'} &= g(v) E_x \, , & B_{x'} &= g(v) B_x \, , \\ E_{y'} &= g(v)\gamma_v (E_y - \beta B_z) \, , & B_{y'} &= g(v)\gamma_v (B_y + \beta E_z) \, , \\ E_{z'} &= g(v)\gamma_v (E_z + \beta B_y) \, , & B_{z'} &= g(v)\gamma_v (B_z - \beta E_y) \, . \end{aligned} \tag{48}$$

Waneer we nu dit stelsel van vergelijkingen omkeren, door deze vergelijkingen (48) op te lossen en toe te passen op de inverse transformatie (van S' naar S), die men karakteriseert door snelheid $-v$, dan volgt wanneer we in overweging nemen dat de verkregen stelsels van vergelijkingen identiek zijn dat:

$$g(v) g(-v) \; = \; 1 \, . \tag{49}$$

Voorts, uit symmetrie-overwegingen volgt dat:[29]

$$g(v) \; = \; g(-v) \, , \tag{50}$$

zodat

$$g(v) \; = \; 1 \, , \tag{51}$$

[28] Voor 'gelijkheid van vorm onder Lorentz-transformaties' zou Minkowski de uitdrukking 'Lorentz-covariantie' invoeren. [FAM]

[29] Indien, bijvoorbeeld, $E_x = E_y = E_z = 0 = B_y = B_z$, en $B_x \neq 0$, dan is het uit hoofde van symmetrie duidelijk dat als v van teken verandert, E_y ook van teken verandert. [AE]

en onze vergelijkingen (48) nemen dan de volgende vorm aan:

$$\begin{aligned}
E_{x'} &= E_x \ , & B_{x'} &= B_x \ , \\
E_{y'} &= \gamma_v(E_y - \beta B_x) \ , & B_{y'} &= \gamma_v(B_y + \beta E_z) \ , \\
E_{z'} &= \gamma_v(E_z + \beta B_y) \ , & B_{z'} &= \gamma_v(B_z - \beta E_y) \ .
\end{aligned} \tag{52}$$

Wat de interpretatie van deze vergelijkingen betreft, merken we het volgende op. Laat een elektrische punt-lading grootte 1 hebben wanneer gemeten in systeem S, i.e. laat de lading wanneer in rust in het rust-systeem S een kracht uitoefenen van 1 dyne op een evengrote elektrische lading op een afstand van 1 cm. Volgens het RelativiteitsBeginsel is deze lading ook 1 wanneer gemeten in het bewegende systeem S'. Als deze hoeveelheid elektrische lading in rust verkeert in het rust-systeem, dan is per definitie de vector $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ gelijk aan de kracht die er op werkt. Als deze hoeveelheid elektrische lading in rust verkeert in het bewegende systeen S' (minstens op het relevante tijdstip), dan is de kracht die erop werkt, gemeten in het bewegende systeem S', gelijk aan de vector $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')$. Dientengevolge laten de drie vergelijkingen in de eerste kolom van (52) zich op de volgende twee manieren onder woorden brengen.

1. Is een puntvormige elektrische eenheidslading in beweging ten opzichte van een elektromagnetisch veld, dan werkt er op de lading, benevens een elektrische kracht, een 'elektro-motorische kracht' die, wanneer we termen verwaarlozen met factoren van v/c van 2de-orde of hoger, gelijk is aan het vector-product van de snelheid van de lading en de magnetische kracht, gedeeld door de lichtsnelheid. (Oude uitdrukkingswijze.)

2. Is een puntvormige elektrische eenheidslading in beweging ten opzichte van een elektromagnetisch veld, dan werkt er een kracht op die gelijk is aan de elektrische kracht die aanwezig is in de nabijheid van de lading, en die we kunnen bepalen door een transformatie van het veld naar een referentie-systeem dat in rust verkeert ten opzichte van de lading. (Nieuwe uitdrukkingswijze.)

De analogie geldt eveneens voor 'magneto-motorische krachten'. We zien dat in onze theorie de elektro-motorische kracht slechts de rol van een hulpbegrip speelt, die zijn invoering dankt aan de omstandigheid dat elektrische en magnetische krachten niet onafhankelijk van de beweging-toestand van een referentie-systeem bestaan.[30]

Verder is het duidelijk dat de in de inleiding genoemde asymmetrie verdwijnt die optreedt wanneer we de stromen beschouwen veroorzaakt

[30] Bijna altijd (en zeker hier) kan men 'elektro-motorische kracht' en 'magneto-motorische kracht' identificeren met de termen van wat thans beter bekend is als de *Lorentz-kracht*: $\mathbf{F}_\mathrm{L} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}/c)$. [FAM]

door de relatieve beweging van een magneet en een geleider. Daarenboven zijn vragen naar de 'grond' van elektrodynamische elektro-motorische krachten (unipolaire machines) zonder grond.

§ 7. Theorie van de Doppler-verschuiving en van Stellaire Aberratie

In het systeem S, ver verwijderd van de oorsprong van het co-ordinatenstelsel, staat een bron van elektromagnetische golven, die we in het gedeelte van de ruimte waar de oorsprong van de co-ordinaten zich bevinden voldoende nauwkeurig kunnen benaderen door de volgende vergelijkingen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{E}_0 \sin\varphi(\mathbf{r},t) \quad \text{en} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{B}_0 \sin\varphi(\mathbf{r},t)\;, \tag{53}$$

waarin

$$\varphi(\mathbf{r},t) \;=\; \omega\Big(t - \frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\Big)\,. \tag{54}$$

Hierin bepalen de constante vectoren $\mathbf{E}_0$ en $\mathbf{B}_0$ de amplitudo van de golven, en $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ is de golfnormaalvector.[31]

We willen weten wat de hoedanigheid van deze golven is wanneer een waarnemer ze onderzoekt die zich in rust bevindt in het bewegende systeem S'. Wenden we de transformatievergelijkingen (52) voor de elektrische en magnetische velden aan, en de transformatievergelijkingen (29) voor de co-ordinaten en de tijd, dan krijgen we onmiddellijk:

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}',t') &= E_{0x}\sin\varphi'(\mathbf{r}',t')\;,\\ E_y(\mathbf{r}',t') &= \gamma_v(E_{0y} - \beta B_{0z})\sin\varphi'(\mathbf{r}',t')\;,\\ E_z(\mathbf{r}',t') &= \gamma_v(E_{0z} + \beta B_{0y})\sin\varphi'(\mathbf{r}',t')\;, \end{aligned} \tag{55}$$

en

$$\begin{aligned} B_x(\mathbf{r}',t') &= B_{0x}\sin\varphi'(\mathbf{r}',t')\;,\\ B_y(\mathbf{r}',t') &= \gamma_v(B_{0y} + \beta E_{0z})\sin\varphi'(\mathbf{r}',t')\;,\\ B_z(\mathbf{r}',t') &= \gamma_v(B_{0z} - \beta E_{0y})\sin\varphi'(\mathbf{r}',t')\;, \end{aligned} \tag{56}$$

waarin

$$\varphi'(\mathbf{r}',t') \;=\; \omega'\Big(t' - \frac{1}{c}\mathbf{n}'\cdot\mathbf{r}'\Big)\;,$$

[31] Einstein werkte met de *richtingscosinussen* van $\mathbf{n}$, dat zijn de cosinussen van de hoeken die $\mathbf{n}$ maakt met de drie Cartesische co-ordinaat-assen; doordat $|\mathbf{n}| = 1$, vallen ze samen met de Cartesische componenten van $\mathbf{n}$. In termen van de *golfvector* $\mathbf{k}$: $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, waarin $k \equiv |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$; bedenk dat $\omega \equiv 2\pi\nu$, en $\nu\lambda = c = k\omega$, zodat men de fase in bekende vorm kan schrijven: $\varphi(\mathbf{r},t) = \omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ (54). [FAM]

en waarin

$$\omega' \;=\; \omega\gamma_v(1-\beta n_x)\ , \tag{57}$$

en

$$\begin{aligned} n_{x'} &= (n_x-\beta)/(1-\beta n_x)\ , \\ n_{y'} &= n_y/\gamma_v(1-\beta n_x)\ , \\ n_{z'} &= n_z/\gamma_v(1-\beta n_x)\ . \end{aligned} \tag{58}$$

Uit de vergelijking voor ω' (57) volgt dat wanneer een waarnemer met snelheid v beweegt ten opzichte van een oneindig verre bron van licht met frequentie ν, zodanig dat de verbindingslijn lichtbron–waarnemer een hoek φ maakt met de snelheid van de waarnemer in het referentiesysteem waarin de bron zich in rust bevindt, de frequentie ν' van het licht dat de waarnemer ziet gegeven is door deze vergelijking:

$$\nu' \;=\; \nu\gamma_v(1-\beta\cos\varphi)\ . \tag{59}$$

Dit is de Doppler-verschuiving voor willekeurige snelheden. Indien $\varphi=0$, dan neemt deze vergelijking de volgende doorzichtige vorm aan:[32]

$$\nu' \;=\; \nu\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\ . \tag{60}$$

We zien dat — in tegenstelling tot de gangbare opvatting — voor $v=-c$, $\nu'=\infty$ is.

Noemen we de hoek tussen de golfvector (voortplantingsrichting) in het meebewegende systeem S' en de verbindingslijn lichtbron–waarnemer φ', dan neemt de vergelijking voor φ' de volgende vorm aan:

$$\cos\varphi' \;=\; \frac{\cos\varphi-\beta}{1-\beta\cos\varphi}\ . \tag{61}$$

Deze vergelijking drukt de aberratie-wet in haar meest algemene vorm uit. Wanneer $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, dan wordt deze vergelijking eenvoudig:

$$\cos\varphi' \;=\; -\beta\ . \tag{62}$$

We moeten nog wel de amplitudo van de golven vinden zoals die er uitziet in het bewegende systeem S'. Noemen we de amplitudo van

[32] Doorzichtig vorm? De 'klassieke' Doppler-verschuiving voor een bewegende waarnemer t.o.v. de bron is $\nu_\mathrm{k}=\nu(1+\beta)$, zodat de 'relativistische Doppler-verschuiving', $\nu'=\gamma_v(1-\beta)\nu\approx(1+\frac{1}{2}\beta^2)(1-\beta)\nu$, bij benadering een extra term oplevert die 2de-orde in β is: $\nu'\approx\nu_\mathrm{k}+\frac{1}{2}\beta^2\nu$. Kijkt de waarnemer loodrecht op zijn bewegingsrichting naar de lichtbron ($\varphi=90^\circ$), dan krijgt men een transversale Doppler-verschuiving ($\nu'=\gamma_v\nu$), hetgeen een typerend relativistisch verschijnsel is. [FAM]

het electrische of magnetische veld in het rust-systeem A, en die in het bewegende systeem A', dan krijgen we:

$$A'^2 = A^2\gamma_v^2\big(1-\beta\cos\varphi\big)^2 \, , \tag{63}$$

welke vergelijking, voor $\varphi = 0$, vereenvoudigt tot

$$A'^2 = A^2\,\frac{1-\beta}{1+\beta} \, . \tag{64}$$

Uit deze vergelijkingen volgt dat voor een waarnemer die met snelheid c een lichtgolf nadert, deze lichtgolf oneindig intens is.

§ 8. Transformatie van de Energie van Lichtstralen. Theorie van Stralingsdruk uitgeoefend op Volmaakte Spiegels

Aangezien $A^2/8\pi$ gelijk is aan de lichtenergie per eenheid van volume, moeten we $A'^2/8\pi$, volgens het RelativiteitsBeginsel, beschouwen als de lichtenergie in het bewegende systeem. Dus A'^2/A^2 is dan de verhouding van de energie 'gemeten in beweging' en 'gemeten in rust' van een gegeven lichtgolf, wanneer het volume van de lichtgolf gelijk is, gemeten in S of in S'. Maar dit is niet het geval. Er passeert geen energie door oppervlakte-elementen van een bolvormig oppervlak dat beweegt met de lichtsnelheid:

$$(x-n_xct)^2+(y-n_yct)^2+(z-n_zct)^2 = R^2 \; ; \tag{65}$$

we mogen derhalve zeggen, dat dit oppervlak de lichtgolf permanent omsluit. We vragen thans naar de hoeveelheid energie die dit oppervlak omsluit, gezien vanuit systeem S', in vergelijking met de energie van de lichtgolf gezien vanuit systeem S. Het bolvormige oppervlak — gezien vanuit het bewegende systeem S' — is een ellipsoïde, waarvan de vergelijking op $t'=0$ is:

$$\gamma_v(x'-n_x\beta x')^2+(y'-n_y\gamma_v\beta x')^2+(z'-n_z\gamma_v\beta x')^2 = R^2 \, . \tag{66}$$

Zij Θ het volume van de bol, en Θ' dat van de ellipsoïde, dan leert een eenvoudige berekening dat:[33]

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{1}{\gamma_v}\,(1-\beta\cos\varphi) \, . \tag{67}$$

Noemen we de in het rust-systeem gemeten hoeveelheid lichtenergie E, en die in het bewegende systeem E', dan volgt:

$$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2\Theta'/8\pi}{A^2\Theta/8\pi} = \gamma_v(1-\beta\cos\varphi) \, , \tag{68}$$

[33] Bedenk dat $n_x = \cos\varphi$. Deze eenvoudige berekening behelst deling van het volume van de ellipsoïde, $\Theta' = \frac{4}{3}\pi\gamma^{-1}(1-\beta\cos\varphi)^{-1}R^3$, door dat van de bol, $\Theta = \frac{4}{3}\pi R^3$. [FAM]

en deze formule reduceert, wanneer $\varphi = 0$, tot:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \, . \tag{69}$$

Het is opmerkelijk dat de energie (68) en de frequentie (59) van het licht op dezelfde manier afhangen van de bewegingstoestand van de waarnemer.[34]

Laat in het co-ordinaat-vlak $x' = 0$ een volmaakte spiegel staan, die de vlakke golven beschouwd in § 7 volledig weerkaatst. We zoeken een uitdrukking voor de druk van het licht uitgeoefend op de spiegel, en de richting, frequentie en intensiteit van het weerkaatste licht. Stel dat het opvallende licht wordt gekarakteriseerd door de grootheden A, $\cos\varphi$ en ν (in het systeem S). Gezien vanuit S' zijn de corresponderende grootheden:

$$\begin{aligned} A' &= \gamma_v A(1 - \beta\cos\varphi) \, , \\ \cos\varphi' &= (\cos\varphi - \beta)/(1 - \beta\cos\varphi) \, , \\ \nu' &= \nu\,\gamma_v(1 - \beta\cos\varphi) \, . \end{aligned} \tag{70}$$

Voor het weerkaatste licht krijgen we, wanneer we het proces vanuit systeem S' beschouwen:

$$A'_{\mathrm{w}} = A' \, , \quad \cos\varphi'_{\mathrm{w}} = -\cos\varphi' \, , \quad \nu'_{\mathrm{w}} = \nu' \, . \tag{71}$$

Uiteindelijk krijgen we voor het weerkaatste licht, door terug te transformeren naar het rust-systeem S:

$$A_{\mathrm{w}} = A'_{\mathrm{w}}\gamma_v(1 + \beta\cos\varphi'_{\mathrm{w}}) = A\gamma_v(1 - 2\beta\cos\varphi + \beta^2) \, , \tag{72}$$

en

$$\cos\varphi_{\mathrm{w}} = \frac{\cos\varphi'_{\mathrm{w}} + \beta}{1 + \beta\cos\varphi'_{\mathrm{w}}} = -\frac{(1+\beta^2)\cos\varphi - 2\beta}{1 - 2\beta\cos\varphi + \beta^2} \, , \tag{73}$$

en[35]

$$\nu_{\mathrm{w}} = \nu'_{\mathrm{w}}\gamma_v(1 + \beta\cos\varphi'_{\mathrm{w}}) = \nu\,\gamma_v^2\big(1 - 2\beta\cos\varphi + \beta^2\big) \, . \tag{74}$$

[34]Einstein maakt hier hoogstwaarschijnlijk een toespeling op zijn lichtquantum-hypothese ($E = n\nu$), drie maanden eerder verschenen in *Annalen der Physik*. In feite heeft Einstein hier bewezen, zonder enige onderstelling te maken over de aard van het licht (benevens het Lichtpostulaat), dat het quotiënt van de energiedichtheid van licht en de frequentie Lorentz-invariant is, ofwel, $E = h\nu$ is een Lorentz-covariante wetmatigheid. [FAM]

[35]In het oorspronkelijke artikel staat $(1-\beta)^{-2}$ in plaats van $(1-\beta^2)^{-2}$ $(= \gamma_v^2)$; in een overdruk uit 1913 heeft Einstein dit gecorrigeerd. [JS, FAM].

De stralingsenergie (gemeten in het rust-systeem) die per tijdseenheid door op oppervlakte-eenheid van de spiegel valt, is kennelijk $A^2(c\cos\varphi - v)/8\pi$. De energie die het oppervlakte-eenheid per tijdseenheid verlaat is $A_\mathrm{w}^2(-c\cos\varphi_\mathrm{w} + v)/8\pi$.[36] Volgens de wet van behoud van energie is het verschil tussen deze twee uitdrukkingen gelijk aan de arbeid die de lichtdruk verricht per tijdseenheid. Stellen we deze arbeid gelijk aan het product $P_\nu v$, waarin P_ν de lichtdruk is, dan krijgt men:

$$P_\nu \;=\; 2\,\frac{A^2}{8\pi}\,\gamma_v(\cos\varphi - \beta)^2\;. \tag{75}$$

In eerste benadering krijgt men, in overeenstemming met experimenten en met andere theorieën:[37]

$$P_\nu \;=\; 2\,\frac{A^2}{8\pi}\,\cos^2\varphi\;. \tag{76}$$

Met de hier aangewende methode kan men alle problemen van de optika der bewegende lichamen oplossen. Wezenlijk is dat men de elektrische en magnetische kracht van het licht, die door een bewegend lichaam wordt beïnvloed, dient te transformeren naar het referentie-systeem waarin het bewegende lichaam in rust verkeert. Op deze manier voert men alle problemen betreffende de optica van bewegende lichamen terug tot problemen betreffende de optica van lichamen in rust.

§ 9. Transformatie van de Vergelijkingen van Maxwell en Hertz met Convectiestromen

We beginnen met de vergelijkingen[38]

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \tag{77}$$

en

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{u}\right)\;, \tag{78}$$

[36]De afleiding van deze twee uitdrukkingen laat Einstein over aan de lezer. Hint: gebruik de vector van Poynting, $\mathbf{S} \equiv (c/4\pi)(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$, die voor vlakke golven gelijk is aan $(c/4\pi)E^2$, zodat het tijdgemiddelde over een enkele oscillatie gelijk is aan $(c/4\pi)A^2$. [FAM]

[37]Formule (76) voor de stralingsdruk was eerst afgeleid door Maxwell in zijn befaamde *Treatise on Electricity and Magnetism* (Oxford, 1873). [FAM]

[38]Dit zijn niet de 'Maxwell-Hertz-vergelijkingen' maar de 'Maxwell-Lorentz-vergelijkingen' — volgens Hertz bestond er bijvoorbeeld ook een magnetische dichtheid $\mathfrak{m}$, analoog aan de ladingsdichtheid ρ, zodat $\nabla\cdot\mathbf{B} = 4\pi\mathfrak{m}$. [FAM]

waarin

$$\rho(\mathbf{r},t) \;=\; \nabla\boldsymbol{\cdot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \tag{79}$$

de elektrische ladingsdichtheid is, en $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ de snelheidsvector van de ladingsdichtheid. Denkt men zich in dat elektrische ladingen immer gekoppeld zijn aan kleine starre lichamen (ionen, elektronen), dan vormen deze vergelijkingen de grondslag van de elektrodynamika en optika van bewegende lichamen volgens Lorentz.

Transformeert men deze vergelijkingen, die in systeem S gelden, met behulp van de transformatievergelijkingen (29) en (52), naar stelsel S', dan krijgt men de volgende vergelijkingen

$$\nabla'\times\,\mathbf{E}(\mathbf{r}',t') \;=\; -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}',t')}{\partial t'} \tag{80}$$

en

$$\nabla'\times\,\mathbf{B}(\mathbf{r}',t') \;=\; \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r}',t')}{\partial t'} + \rho(\mathbf{r}',t')\mathbf{u}'\right)\;, \tag{81}$$

waarin $\mathbf{u}' = (u_{x'}, u_{y'}, u_{z'})$ en

$$\begin{aligned} u_{x'} &= \frac{u_x - v}{1-\beta u_x/c}\;, \\ u_{y'} &= \frac{u_y}{\gamma_v(1-\beta u_x/c)}\;, \\ u_{z'} &= \frac{u_z}{\gamma_v(1-\beta u_x/c)}\;, \end{aligned} \tag{82}$$

en

$$\rho(\mathbf{r}',t') \;=\; \nabla'\boldsymbol{\cdot}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}',t') \;=\; \gamma_v\big(1-\beta u_x/c\big)\,\rho(\mathbf{r},t)\;. \tag{83}$$

Aangezien — dit volgt uit de samenstelling van snelheden (41) — de vector $\mathbf{u}'$ niets anders is dan de snelheid van de elektrische lading gemeten in systeem S', hebben we bewezen dat, op basis van onze kinematische beginselen, de grondslagen van de elektrodynamika van bewegende lichamen van Lorentz in overeenstemming zijn met het RelativiteitsBeginsel.

Het mag kort opgemerkt worden dat onze vergelijkingen de volgende belangrijke wetmatigheid impliceert: als een elektrisch geladen lichaam beweegt, zonder dat zijn lading verandert wanneer bezien vanuit een meebewegend systeem, dan blijft zijn lading — bezien vanuit het rustsysteem — constant.[39]

[39]Het bewijs dat de totale hoeveelheid elektrische lading een Lorentz-invariant is, laat Einstein over aan de ijverige lezer.

§ 10. Dynamika van een (langzaam versnellend) Elektron

In een elektromagnetisch veld beweegt een puntvormig deeltje met elektrische lading q (vanaf nu 'elektron' genaam); we onderstellen het volgende voor zijn bewegingsvergelijking.

Bevindt, ten eerste, het elektron zich in rust gedurende een bepaald tijdinterval, dan beweegt het in daaropvolgende momenten volgens deze vergelijkingen:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \;=\; q\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\;, \tag{84}$$

waarin $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de co-ordinaten van het elektron zijn en m zijn massa, in het geval de beweging langzaam is.[41] Het elektron beweegt, ten tweede, gedurende een bepaald tijdinterval met snelheid v. We zoeken de bewegingswet van het elektron in de onmiddellijk daaropvolgende momenten.

Zonder beperking der algemeenheid mogen en zullen we onderstellen dat het elektron, op het moment dat onze beschouwing aanvangt, in de oorsprong van het referentie-systeem S is, en beweegt met snelheid v langs de X-as. Het is dan evident dat op het gegeven moment

Opmerking. Einstein heeft in Deel II tot nu toe een indrukwekkende lijst gevolgen afgeleid van zijn Lichtpostulaat en RelativiteitsBeginsel in combinatie met de Maxwell-vergelijkingen, die alle in beginsel empirisch getoetst kunnen worden. Dit betreft de elektrodynamika van bewegende *macroscopische* lichamen; in de laatste paragraaf zal Einstein zijn aandacht richten op *microscopische* lichamen. Wat schittert door afwezigheid is de formule van Fresnel voor de lichtsnelheid in bewegende media, $c_v = c/n + (1 - 1/n^2)v$, waarin n de brekingsindex van het medium is waarin het licht zich voortplant, en v de snelheid van het medium), die in overeenstemming was met de uitkomsten van het experiment van Fizeau (cf. voetnoot [40]). Fresnel interpreteerde de tweede term, $(1 - 1/n^2)v$, als een maat voor de extra hoeveelheid ether die een lichaam meesleept wanneer met snelheid v door de ether bewegend. Lorentz zou in zijn vermaarde *Versuch* (1985) de formule van Fresnel afleiden op basis van een microfysische beschouwing over de opbouw van materie in termen van kleinste ladingsdragers (door Lorentz *elektronen* gedoopt), hun elektrodynamische wisselwerking met de ether en zijn krimp-hypothese — dit maakt Lorentz tot de allereerste elementaire-deeltjesfysicus in de moderne betekenis van dit woord. Einstein had de formule van Fresnel als direct gevolg kunnen krijgen van zijn formule voor de samenstelling van snelheden (40), zoals eerst laten zien door Max von Laue, 'Die Mitfürung des Lichtes durch bewegte Körper nach dem Relativitätsprinzip', *Annalen der Physik* **23** (1907) 989–990, dus zonder enige onderstelling te maken aangaande de opbouw van de materie, de aard van het licht of het bestaan van een ether. [FAM]

[41] Ten overvloede: zou het elektron een flinke versnelling hebben, dan zou het gaan stralen en ten gevolge van dat 'interne' stralingsveld een kracht ondervinden, zodat men de totale kracht niet langer gelijk mag stellen aan de 'externe' kracht die het elektron ondervindt in het 'externe' elektrische veld $\mathbf{E}$, hetgeen in vergelijking (84) gebeurt. [FAM]

($t = 0$) het elektron in rust is relatief ten opzichte van een meebewegend referentie-systeem S'. Met deze onderstelling, in combinatie met het RelativiteitsBeginsel, is het duidelijk dat in de onmiddellijk opvolgende momenten (kleine waarden van t) het elektron, bezien vanuit het meebewegende systeem S', beweegt volgens deze vergelijkingen:[42]

$$m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') , \tag{85}$$

waarin $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ verwijst naar systeem S'. Leggen we verder vast dat $t = x = y = z = 0$ wanneer $t' = x' = y' = z' = 0$, dan geleden de transformatievergelijkingen (29) en (52), zodat geldt:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_v(x - vt) , & y' &= y , \\ t' &= \gamma_v(t - \beta x/c) , & z' &= z . \end{aligned} \tag{86}$$

en

$$E_{x'} = E_x , \quad E_{y'} = \gamma_v(E_y - \beta B_z) , \quad E_{z'} = \gamma_v(E_z + \beta B_y) . \tag{87}$$

Met behulp van deze vergelijkingen transformeren we de bewegingsvergelijkingen (85) van systeem S' naar system S, en vinden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{q}{m}\gamma_v^{-3} E_x , \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{q}{m}\gamma_v^{-1}(E_y - \beta B_z) , \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{q}{m}\gamma_v^{-1}(E_z + \beta B_y) \end{aligned} \tag{88}$$

In overeenstemming met de gangbare opvatting vragen we nu naar de 'longitudinale' en de 'transversale' massa van het bewegende elektron. We schrijven vergelijkingen (88) in de volgende vorm:

$$\begin{aligned} m\gamma_v^3\frac{d^2x}{dt^2} &= qE_x = qE_{x'} , \\ m\gamma_v^2\frac{d^2y}{dt^2} &= q\gamma_v(E_y - \beta B_z) = qE'_y , \\ m\gamma_v^2\frac{d^2z}{dt^2} &= q\gamma_v(E_z + \beta B_y) = qE'_z , \end{aligned} \tag{89}$$

en merken terstond op dat $qE_{x'}$, $qE_{y'}$, $qE_{z'}$ de componenten zijn van de elektro-motorische kracht $q\mathbf{E}$ die op het elektron werkt, en dat inderdaad

[42]Einstein in gezelschap van alle toenmalige natuurkundigen uit van de universele geldigheid van de bewegingswet van Newton. [FAM]

zijn wanneer bezien vanuit het referentie-systeem S' dat met het elektron meebeweegt. (Deze kracht kan men meten, bijvoorbeeld, door een veerbalans in rust in S'). Noemen we nu deze kracht eenvoudig 'de kracht die op elektron werkt', handhaven we de vergelijking

$$\text{massa} \times \text{versnelling} = \text{kracht} , \tag{90}$$

en gaan we er vanuit dat de versnellingen in het rust-systeem S worden gemeten, dan leiden we uit bovenstaande vergelijkingen de volgende af:[43]

$$\begin{aligned} \text{longitudinale massa} &= \gamma_v^3 m , \\ \text{transversale massa} &= \gamma_v^2 m . \end{aligned} \tag{91}$$

Vanzelfsprekend zou men met een andere definitie van kracht en versnelling andere waarden voor de massa hebben gevonden; hier ziet men aan dat men bij de vergelijking van verschillende theorieën voor de beweging van het elektron uiterst behoedzaam te werk moet gaan.[44]

Wij merken op dat deze resultaten voor de massa ook voor materiële punten geldt; want van een materieel punt kan men een elektron maken (in onze betekenis van het woord) door er een *willekeurig kleine* hoeveelheid elektrische lading op aan te brengen.

We zullen nu de kinetische energie van het elektron bepalen. Beweegt een elektron vanuit de oorsprong van een referentie-systeem S met beginsnelheid 0 over de X-as onder de invloed van een elektrostatisch veld E_x,

[43]De begrippen 'longitudinale' en 'transversale' massa waren ingevoerd door J.J. Thompson, doch waren ook prominent aanwezig in die van Lorentz en Max Abraham, die een andere elektronen-theorie van Lorentz voorstond. Verscheidene natuurkundigen, onder wie Walter Kaufmann, voerden experimenten uit om deze massa's te bepalen. De rol van deze twee massa-begrippen, die men niet los kan zien van het idee dat massa een elektromagnetisch verschijnsel is, zou spoedig uitgespeeld raken. Ze vloeien evenwel op een natuurlijke wijze voort uit formuleringen van de speciale relativiteitstheorie met een snelheidsafhankelijke 'relativistische massa' ($m_{\mathrm{r}} \equiv \gamma_v m$), een begrip dat Einstein aanvankelijk ook gebruikte maar waar hij uiteindelijk afstand van heeft gedaan. Thans weten de *cognoscenti* dat de invoering van dit begrip de conceptuele structuur van de speciale relativiteitstheorie niet verheldert doch slechts nodeloos compliceert; cf. L.B. Okun, 'The Concept of Mass', *Soviet Physics Uspensky* **32** (1989) 629–638. [FAM]

[44]Profetische woorden. In 1906 liet Max Planck zien dat niet Einstein's definitie van kracht maar een andere leidt tot $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, waarin $\mathbf{p} \equiv \gamma_v m\mathbf{v}$ de relativistische lineaire impuls is. De bewegingsvergelijking van Newton verkrijgt men als 0de-orde benadering van deze 'speciaal-relativistische' bewegingsvergelijking ($\gamma_v \approx 1$). Ook voerde Planck de speciaal-relativistische Lagrangeaan in: $L = -\gamma_v mc^2+$constante. Een jaar later stelde Plank een volledige speciaal-relativistische mechanika voor puntdeeltjes op, en een speciaal-relativistische thermodynamika; zijn mechanika is de standaard gebleven, zij het in de latere herformulering met vier-vectoren. M. Plack, 'Dat Prinzip der Relativität und die Grundgleichungen der Mechanik', *Verhandlungen des Deutsches Physikalisches Gesellschaft* **4** (1906) 136–141, 'Zur Dynamik der bewegter Systeme', *Berliner Berichte* **13** (1907) 542–570. [FAM]

dan is het duidelijk dat de energie die onttrokken is aan het elektrostatische veld gelijk is aan de verrichte arbeid $\int qE_x\,dx$. Daar het elektron langzaam versnelt, en daardoor geen energie verliest in de vorm van straling, moet de energie onttrokken aan het elektrostatische veld gelijk zijn aan de bewegingsenergie E_{kin} van het elektron. Met in gedachten dat gedurende het gehele proces van beweging de eerste vergelijking uit (88) van toepassing is, krijgen we

$$E_{\mathrm{kin}} = \int qE_x\,dx = m\int_0^v \gamma_v^3 v\,dv = mc^2(\gamma_v - 1)\,. \qquad (92)$$

E_{kin} wordt dus voor $v = c$ oneindig groot. Snelheden groter dan die van het licht hebben — gelijk in onze eerdere resultaten — geen bestaansmogelijkheid.[45]

Ook deze uitdrukking (92) voor de kinetische energie is, in het licht van bovengevoerde redenering, van toepassing op zwaardere massa's.

We zullen thans de eigenschappen opsommen van de beweging van een elektron die volgen uit het stelsel van vergelijkingen (88) en die experimenteel toegankelijk zijn.

1. Uit de tweede vergelijking van stelsel (88) volgt dat een elektrostatische kracht E_y en een magnetische kracht B_z een even sterke afbuigende werking op een elektron dat beweegt met snelheid v indien $E_y = \beta B_z$. Men ziet ook in dat onze theorie het mogelijk maakt de snelheid van het elektron te bepalen uit de verhouding van de magnetisch veroorzaakte afbuiging a_{m} en de elektrisch veroorzaakte afbuiging a_{e}, voor een willekeurige snelheid, via:

$$\frac{a_{\mathrm{m}}}{a_{\mathrm{e}}} = \frac{v}{c}\,. \qquad (93)$$

Deze betrekking is toegankelijk voor experimentele toetsing, daar men de snelheid v van het elektron ook direct kan bepalen, bijvoorbeeld door middel van snel trillende elektrische en magnetische velden.

[45]Zoals we nu weten sluit de speciale relativiteitstheorie *tachyonen* niet uit — materiedeeltjes die in ieder inertiaal-systeem sneller dan het licht bewegen (de term is van Gerald Feinberg). Er zijn geen empirische aanwijzingen voor het bestaan van tachyonische materie; er zijn wel quantum-theoretische overwegingen tegen het bestaan van stabiele tachyonische materie. Zeker in 1910 wist Einstein trouwens dat de tijd-volgorde van gebeurtenissen die tachyonen uitwisselen niet Lorentz-invariant is: "Met hyperlichtsnelheden zouden we naar het verleden kunnen telegraferen", tekende A. Sommerfeld uit zijn mond op, 'Zur Relativitätstheorie II: Vierdimensional Vektoralgebra', *Annalen der Physik* **33** (1910) 649–689.

We merken ook op dat men in formule (92) een vooruitwijzing kan zien naar het befaamde rustenergie-begrip, $E_0 = mc^2$. We kunnen formule (92) immers herschrijven als: $\gamma_v mc^2 = mc^2 + E_{\mathrm{kin}}$. Zodra men $\gamma_v mc^2$ opvat als de totale energie van het elektron, dan reduceert deze energie tot mc^2 wanneer het elektron stil ligt en is derhalve niet kinetisch van aard. [FAM]

2. Uit de afleiding van de kinetische energie van het elektron (92) volgt dat de volgende betrekking tussen het doorgelopen potentiaalverschil ΔV en de verkregen snelheid v van het elektron geldt:

$$\Delta V = \int E_x \, dx = \frac{mc^2}{q} (\gamma_v - 1) \,. \tag{94}$$

3. We berekenen de krommingstraal R_k van de baan van het elektron wanneer een magnetisch veld B_z loodrecht op de snelheidsrichting op het elektron werkt (als de enige afbuigende kracht). Uit de tweede vergelijking van het stelsel (88) vinden we:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R_\mathrm{k}} = \frac{q}{m} \beta \gamma_v B_z \,, \tag{95}$$

ofwel

$$R_\mathrm{k} = \frac{mvc}{q} \gamma_v \frac{1}{B_z} \,. \tag{96}$$

Deze drie betrekkingen zijn de volledige uitdrukking van de wetmatigheden die de beweging van het elektron volgens de alhier opgestelde theorie bestieren.

Tot slot wil ik opmerken dat bij het werken aan de hier behandelde problemen mijn vriend en collega M. Besso mij trouw terzijde heeft gestaan; en ik wil hem bedanken voor menige waardevolle suggestie.

Bern, Juni 1905.

(Ontvangen 30 Juni 1905.)

Is de Traagheid van een Lichaam van zijn Energie-Inhoud afhankelijk?

door **A. Einstein**

De resultaten van een onlangs in deze Annalen van mij gepubliceerde elektrodynamisch onderzoek[1] leiden tot een zeer interessant gevolg, dat hier afgeleid zal worden. Dat onderzoek grondde ik op de vergelijkingen van Maxwell en Hertz voor de lege ruimte, benevens de uitdrukking van Maxwell voor elektromagnetische energie in de ruimte, en bovendien op het volgende beginsel: de wetmatigheden die de toestandsveranderingen van fysische systemen regeren hangen niet af van welke van twee referentiesystemen men kiest voor de beschrijving wanneer deze systemen eenparig rechtlijnig ten opzichte van elkaar bewegen (RelativiteitsBeginsel).

Op basis van deze fundamenten leidde ik onder andere het volgende resultaat af (*loc. cit.*, § 8). Stel een trein van vlakke lichtgolven, beschreven in een referentie-systeem S met co-ordinaten (x, y, z), heeft energie E_c; de stralingsrichting (golfvector) maakt een hoek φ met de X-as van het systeem S. Voert men een nieuw referentie-systeem S' in met co-ordinaten (x', y', z') dat eenparig rechtlijnig beweegt ten opzichte van S met snelheid v langs de X-as, dan bezit genoemde trein van lichtgolven — gemeten in S — energie:

$$E'_c \;=\; \gamma_v(1 - \beta\cos\varphi)E_c\ , \tag{1}$$

waarin c de lichtsnelheid is.[2] Van dit resultaat zullen we in het vervolg gebruik maken.

In systeem S met co-ordinaten x, y, z, bevindt zich zich een lichaam in rust, waarvan de energie — bezien vanuit S — gelijk is aan E_{v}. Ten opzichte van het bewegende systeem S' met co-ordinaten x', y', z', is de energie van het lichaam gelijk aan E'_{v}. Dit lichaam zendt een trein vlakke lichtgolven uit in een richting die een hoek φ maakt met de positieve X-as, met een energie (gemeten in S) gelijk aan $\frac{1}{2}E_c$, en gelijktijdig een even grote trein vlakke lichtgolven in tegengestelde richting. Hierbij blijft het lichaam in rust in S. Voor dit proces moet de wet van behoud van energie gelden en wel (volgens het RelativiteitsBeginsel) in beide

[1] A. Einstein, 'Zur Elektrodynamik bewegter Körper', A. Einstein, *Annalen der Physik* **17** (1905) 891–921 [AE] — zie dit document, vergelijking (68). [FAM]

[2] En $\gamma_v \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ en $\beta \equiv v/c$. [FAM]

referentie-systemen. Noemen we de hoeveelheid energie van het lichaam na uitzending van het licht bezien vanuit S en S' respectievelijk E_n en E'_n, dan krijgen we met behulp van betrekking (1):

$$\begin{aligned} E_\mathrm{v} &= E_\mathrm{n} + \left(\tfrac{1}{2}E_c + \tfrac{1}{2}E_c\right) \\ E'_\mathrm{v} &= E'_\mathrm{n} + \left(\tfrac{1}{2}\gamma_v(1-\beta\cos\varphi)E_c + \tfrac{1}{2}\gamma_v(1+\beta\cos\varphi)E_c\right) \\ &= E'_\mathrm{n} + \gamma_v E_c \end{aligned} \tag{2}$$

Door het verschil te nemen krijgt men uit deze vergelijkingen:

$$(E'_\mathrm{v} - E_\mathrm{v}) - (E'_\mathrm{n} - E_\mathrm{n}) = E_c(\gamma_v - 1)\ . \tag{3}$$

De beide in deze uitdrukking voorkomende verschillen van de vorm $E'-E$ hebben een eenvoudige fysische betekenis. E' en E zijn de hoeveelheden energie van hetzelfde lichaam, bezien vanuit twee ten opzichte van elkaar bewegende referentie-systemen S en S', waarbij het lichaam ten opzichte van S in rust verkeert. Het is ook duidelijk dat het verschil $E' - E$ van de kinetische energie E_kin van het lichaam bezien vanuit systeem S' kan verschillen door een additieve constante C, die van de keus van de willekeurige additieve constante van de energiewaarden E' en E afhangt. We mogen derhalve stellen dat:

$$E'_\mathrm{v} - E_\mathrm{v} = E'_\mathrm{kin,v} + C\ , \tag{4}$$

$$E'_\mathrm{n} - E_\mathrm{n} = E'_\mathrm{kin,n} + C\ , \tag{5}$$

omdat C gedurende de uitzending van het licht niet verandert. We verkijgen dan uit (3):

$$E'_\mathrm{kin,v} - E'_\mathrm{kin,n} = E_c(\gamma_v - 1)\ . \tag{6}$$

De kinetische energie van het lichaam bezien vanuit S' neem ten gevolge van de uitzending van het licht af, en wel met een bedrag dat niet afhangt van de eigenschappen van het lichaam. Het verschil $E'_\mathrm{kin,v} - E'_\mathrm{kin,n}$ hangt op dezelfde manier van de snelheid af als de kinetische energie van het elektron (*loc. cit.*, § 10).

Met verwaarlozing van grootheden van de 4de-orde en hogere orden mogen we stellen dat:[3]

$$E'_\mathrm{kin,v} - E'_\mathrm{kin,n} = \tfrac{1}{2}\,\frac{E_c}{c^2}\,v^2\ . \tag{7}$$

[3]Einstein gebruikte de Newtoniaanse limiet voor de kinetische energie van het lichaam ten einde de verandering in de massa te bepalen. [JS] Met $E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ krijgt men direct uit (7): $m_\mathrm{v} = m_\mathrm{n} + E_c/c^2$, zodat $m_\mathrm{n} < m_\mathrm{v}$. Voor langzaam bewegende elektronen had Einstein een exact resultaat kunnen afleiden, namelijk door vergelijking (92) uit 'Zur Elektrodynamik ...' te combineren met bovenstaande vergelijking (6), hetgeen resulteert in: $E'_\mathrm{kin,v} - E'_\mathrm{kin,n} = (\gamma_v - 1)(m_\mathrm{v} - m_\mathrm{n})c^2$. [FAM]

Uit deze vergelijking volgt onmiddellijk: zendt een lichaam een hoeveelheid energie E_c uit in de vorm van straling, dan vermindert zijn massa met een bedrag E_c/c^2. Hierbij is het kennelijk niet essentieel dat de aan het lichaam onttrokken energie geheel in de vorm van straling weggaat, zodat we tot het volgende algemene gevolg mogen besluiten: de massa van een lichaam is een maat voor zijn energie-inhoud; verandert de energie met een bedrag E_c, dan verandert de massa met een bedrag $E_c/c^2 = E_c/9 \cdot 10^{20}$, wanneer men de energie in erg en de massa in grammen uitdrukt.

Het is niet uitgesloten dit experimenteel te toetsen aan de hand van lichamen waarvan de energie-inhoud in hoge mate veranderlijk is (bijvoorbeeld Radium-zouten). Wanneer de theorie met de feiten in overeenstemming is, dan brengt straling traagheid over tussen lichamen die uitzenden en ontvangen.[4]

Bern, September 1905.

(Ontvangen 27 September 1905.)

[4]Niet in dit artikel treft men aan 'de beroemdste formule van de natuurkunde': $E = mc^2$. Het dichtst in de buurt komt een herschrijving van (7): $E_c = (m_\text{v} - m_\text{n})c^2$. Wat Einstein aantoont is dat *de verandering in energie* (ΔE) *door het uitzenden of ontvangen van elektromagnetische straling door een object gepaard gaat met een verandering in de traagheid van dat object* (met een bedrag $\Delta E/c^2$). Nergens zet Einstein in dit artikel de denkstap naar het begrip *rustenergie*, $E_0 = mc^2$, die men aan iedere hoeveelheid materie met massa m kan toeschrijven; zonder deze denkstap te zetten blijft de 'equivalentie' van materie (massa) en energie buiten bereik. In 1906 en 1907, en zelfs nog in 1935 en weer in 1946, kwam Einstein met andere redeneringen voor de volledige 'equivalentie' van massa en energie, doch nimmer bereikte hij de verlangde universaliteit. Cf. F. Floris, 'Einstein's 1935 Derivation of $E = mc^2$', *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* **29** (1998) 223–243, en verwijzingen daarin naar andere afleidingen van $E = mc^2$. [FAM]

Verantwoording

Dit pdf-document bevat Nederlandse vertalingen van Einstein's 'Zur Elektrodynamik bewegter Körper', *Annalen der Physik* **17** (1905) 891–921 en 'Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?', *Annalen der Physik* **18** (1905) 639–641, de twee artikelen die de speciale relativiteitstheorie (SRT) grondvesten. De vertaling wijkt af van een strikt letterlijke vertaling op de volgende punten.

- De meeste van de symbolen gebruikt door Einstein zijn vervangen door wat tegenwoordig standaard is: c voor de lichtsnelheid (Einstein: V); E voor energie (Einstein: L); x', y', z', t' (Einstein: ξ, η, ζ, τ) voor de Cartesische co-ordinaten van een referentie-systeem S' dat eenparig rechtlijnig beweegt ten opzichte van S, dat Cartesische co-ordinaten x, y, z, t heeft; E_x, E_y, E_z voor de Cartesische componenten van een elektrisch veld $\mathbf{E}$ (Einstein: X, Y, Z); etc.

- Vrijwel alle formule's zijn genummerd en soms zijn er verwijzingen naar deze nummers toegevoegd terwille van de leesbaarheid (zodat, bijvoorbeeld, β niet drie keer gedefinieerd hoeft te worden, zoals bij Einstein het geval is).

- We hebben diverse formule's vereenvoudigd door consequent $\gamma_v \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ en $\beta \equiv v/c$ te gebruiken — Einstein's β is de hedendaagse (en onze) γ_v.

- We hebben Einstein's *Ko-ordinaten System* vertaald door 'referentie-systeem', ten einde de verwarring te voorkomen tussen wiskundige co-ordinaat-stelsels en fysische referentie-systemen.

- *Enkele* keren is de alinea-verdeling van Einstein — of van de zetter van *Annalen der Physik* — gerationaliseerd.

We merken op dat Einstein Gaussische (cm-gram-seconde) eenheden gebruikt, in navolging van Maxwell en Hertz; wij hebben de formules niet omgezet in SI-eenheden.

In de doorlopend genummerde voetnoten staat aan het eind tussen vierkante haken van wie de voetnoot afkomstig is (zie onderstaande bronnen): Albert Einstein [AE], Arnold Sommerfeld [AS], A.I. Miller [AIM], John Stachel [JS], F.A. Muller [FAM].

We willen noemen: A.I. Miller, *Albert Einstein's Special Theory of Relativity* (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1981, xix+446 blz., met uitgebreid register). In deze monografie analyseert Miller beide artikelen in dit document vrijwel regel voor regel tegen de achtergrond van de ontwikkeling van de natuurkunde anno 1905. Analyserende ideeëngeschiedenis van niveau; qua volledigheid ongeëvenaard, ofschoon niet geheel foutloos (de uiteenzetting in §6.1 van Einstein's afleiding van de Lorentz-transformaties is geheel verkeerd begrepen). Miller vat zijn visie op hoe Einstein tot de speciale relativiteitstheorie gekomen is samen in 'The Special Theory of Relativity: Einstein's Response to the Physics of 1905', te vinden in: *Albert Einstein: Historical and Cultural Perspectives* G. Holton & Y. Elkana (eds.) (Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1982), blz. 3–26. Wie minder tijd vrij wil maken dan nodig om Miller's boek door te werken, kan zijn toevlucht nemen tot R. Rynasiewicz, 'The optics and electrodynamics of 'Zur Elektrodynamik der bewegten Körper'', *Annalen der Physik* **14** Supplement (2005) 38–57.

Ten slotte: op- en aanmerkingen zijn van harte welkom.

Dr F.A. Muller
Instituut voor de Geschiedenis en Grondslagen der Natuurwetenschappen
Universiteit Utrecht
Princetonplein 5
3584 CC Utrecht

e-post: f.a.muller@phys.uu.nl