

Samenvatting in het Nederlands

Dit is een proefschrift in de wiskundige logica. Logica bestudeert formele systemen met het doel meer te weten te komen over het wiskundige redeneren. Hoe gaat dat in zijn werk?

Een wiskundige formuleert stellingen en probeert daar vervolgens een bewijs voor te geven. Dergelijke bewijzen zijn aan nauw omschreven regels gebonden en in feite laten de toegestane redeneerstappen zich zuiver formeel beschrijven. In andere woorden: of een redeneerstap geldig is hangt niet af van het onderwerp van de redenering, maar alleen van haar vorm (zoals Aristoteles zich al realiseerde). Wiskundige logica bestudeert de vormen van correct redeneren op een wiskundige manier.

Toch is het geen sinecure om een raamwerk te formuleren waarbinnen alle bestaande wiskunde past. Niet alleen moet de logica worden vastgelegd, er moet ook een conceptuele taal ontwikkeld worden waarin over uiteenlopende wiskundige entiteiten gesproken kan worden (van getallen en driehoeken tot C^∞ -variëteiten en niet-abelse groepen). En dan het liefst nog op een handzame en inzichtelijke manier.

De verzamelingenleer van Cantor biedt een dergelijke taal. Het aantal typen entiteiten is beperkt (er zijn alleen verzamelingen), het aantal relaties ook (alles is gedefinieerd in termen van de elementrelatie), er is een klein aantal axioma's die overwegend intuïtief zeer aansprekend zijn en alle bekende wiskundige entiteiten laten zich opvatten als verzamelingen. De manier waarop allerlei wiskundige objecten zich laten coderen als verzamelingen is niet altijd vrij van een zekere kunstmatigheid of willekeurigheid, maar dit stoort de meeste wiskundigen niet. Van belang is dat een dergelijke verzamelingstheoretische reductie van de wiskunde in principe mogelijk is en dat stellingen over de verzamelingenleer hiermee ook iets zeggen over de wiskunde in het algemeen.

Het formuleren van de verzamelingenleer als een adequate logische theorie zonder tegenstrijdigheden kende zijn moeilijkheden, maar een periode van ontwikkeling leverde uiteindelijk Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer, inclusief het keuzeaxioma, op dat aan de gestelde eisen lijkt te voldoen: het is een zuiver formeel te beschrijven systeem, dat niet lijdt aan de bekende kinderziektes en waarin zich (nagenoeg) alle wiskunde laat formaliseren. Tegenwoordig beroepen veel wiskundigen zich op deze klassieke theorie als het logische fundament voor hun redeneringen en schikken zich in haar oordeel waar het de correctheid daarvan aangaat.

Toch bestudeert dit proefschrift niet zozeer de klassieke verzamelingenleer, maar eerder zijn alternatieven. Alternatieven kunnen in twee richtingen gezocht worden: deze theorie onderschrijft het bestaan van entiteiten terwijl zij zich daar niet over uit zou moeten laten of zij ontkent het bestaan van entiteiten waar ze die mogelijkheid open zou moeten laten. Beide richtingen komen in dit proefschrift aan de orde.

Om met het eerste soort alternatief te beginnen: sommige axioma's (en zelfs de onderliggende logica) van Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer met keuze zijn het

onderwerp geworden van filosofische kritiek, omdat ze het bestaan impliceren van objecten die als problematisch worden gezien. Twee groepen van critici zijn voor dit proefschrift van belang, te weten constructivisten en predicativisten. Zonder dit al te veel te willen uitleggen, wil ik de bezwaren van beide groepen toch kort noemen: de bezwaren van de constructivisten gelden objecten waarvoor slechts een niet-constructief bewijs bestaat en de bezwaren van predicativisten gelden machtsverzamelingen en verzamelingen gevormd door comprehensie voor willekeurige formules. Van belang is dat beide groepen zich niet beperkten tot het leveren van kritiek, maar ze ook de noodzaak voelden om in de vorm van een formeel systeem exact te beschrijven hoe wiskunde eruit ziet die wel overeenkomt met hun filosofische opvattingen.

Constructieve Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer is zo'n exact omschreven systeem waarbinnen wiskunde bedreven kan worden die tegemoet komt aan de bezwaren die door constructivisten en predicativisten naar voren zijn gebracht. Deze constructieve theorie is daarmee een verzwakte vorm van de klassieke versie van de verzamelingenleer van Zermelo en Fraenkel, waar bepaalde axioma's geschrapt zijn en mogelijk vervangen door een voor constructivisten en predicativisten acceptabele versie. Zij is voor het eerst geformuleerd door Peter Aczel in 1978 en staat recent weer opnieuw in de belangstelling door het werk van diverse bewijstheoretici.

Dit proefschrift kiest een andere, meer model-theoretische, benadering voor het bestuderen van Aczels constructieve verzamelingenleer en leunt daarbij sterk op categorieëentheorie. Het laat zien dat er binnen categorieën objecten bestaan die zich gedragen als "alternatieve wiskundige universa". Vanuit het perspectief van de gewone wiskundige gelden niet alle wiskundige en logische wetten binnen zo'n universum, maar de regels van een zwakke verzamelingenleer als constructieve Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer gelden dan bijvoorbeeld wel. Zo'n alternatieve wiskundige wereld waarin redeneringen binnen constructieve Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer wel betrouwbaar zijn, maar argumenten die daarbuiten vallen mogelijk niet, heten modellen voor constructieve Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer. In dit proefschrift wordt deze constructieve verzamelingenleer bestudeerd door zijn modellen onder de loep te nemen.

Zo mondt het eerste gedeelte van het proefschrift, na een analyse van categorieën waarbinnen dergelijke universa kunnen bestaan, uit in een bespreking van recente modellen van Aczels theorie gegeven door Streicher en Lubarsky. Ik laat in de eerste plaats zien dat ze hetzelfde zijn, maar verder bewijs ik dat dit alternatieve universum een object is binnen een categorie (de zogenaamde effectieve topos). Dit gebruik ik vervolgens om aan te tonen dat binnen dit model principes gelden die vanuit een gebruikelijk wiskundig perspectief zoals dat van de klassieke verzamelingenleer onjuist zijn. Het is alsof binnen dit universum niet alleen niet al onze natuurwetten gelden, maar er andere wetten gelden, die in tegenspraak zijn met de onze. Dit was tot op zekere hoogte bekend, maar wordt in dit proefschrift systematisch onderzocht en bewezen.

Maar om op de kwestie van de alternatieven voor de klassieke verzamelingenleer terug te komen: constructieve Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer is een beperkte

vorm daarvan, omdat het zich niet vastlegt op het bestaan van objecten waarvan de existentie binnen de klassieke theorie bewezen kan worden. Het is aan de andere kant ook mogelijk de wereld van de klassieke Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer uit te breiden met objecten waarvan het bestaan binnen deze theorie weerlegd kan worden. Een voorbeeld hiervan wordt bestudeerd in de tweede helft van het proefschrift. Daar worden modellen onderzocht voor een verzamelingenleer waarbinnen niet-welgefundeerde verzamelingen bestaan. Traditioneel sluit het zogenaamde funderingsaxioma (of regulariteitsaxioma) de existentie van deze objecten uit, omdat deze beweert dat alle verzamelingen welgefundeerd zijn, maar deze kan zonder problemen vervangen worden door het anti-funderingsaxioma zodat naast de welgefundeerde er ook niet-welgefundeerde verzamelingen bestaan. Dergelijke niet-welgefundeerde verzamelingen scheppen de mogelijkheid circulaire verschijnselen verzamelingtheoretisch te beschrijven, waarvan het belang vooral in de informatica ligt. Het laatste hoofdstuk verruimt een bestaande methode om modellen te bouwen waarbinnen niet-welgefundeerde verzamelingen bestaan door deze in een abstracte categorische context te plaatsen en legt uit hoe deze in diverse situaties kan worden toegepast.

