INSTRUMENTACIÓN CORPOREIZADA: COMBINANDO DIFERENTES PUNTOS DE VISTA SOBRE EL USO DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

Paul Drijvers
p.drijvers@uu.nl

Universidad de Utrecht, Los países bajos

Resumen

El potencial de la tecnología digital para la educación matemática ha sido ampliamente investigado en las últimas décadas. Aun así, queda mucho por saber acerca de cómo usar las herramientas para fomentar el aprendizaje de las matemáticas. Para abordar esta cuestión, primero considero las funcionalidades didácticas de la tecnología digital en la educación matemática y los modestos efectos generales del uso de estas herramientas para el aprendizaje. Luego, para encontrar posibles explicaciones de estos hallazgos, abordo tres enfoques relevantes: (1) un enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) sobre el uso de herramientas, (2) un enfoque instrumental para el uso de herramientas y (3) un enfoque corporeizado sobre la cognición. Como conclusión, afirmo que las tres lentes comparten un enfoque en el significado matemático. Mientras que el enfoque de la EMR proporciona pautas generales importantes, un enfoque integrador para el uso de herramientas, que denomino instrumentación corporeizada*, y que incluye la alineación cuidadosa de las experiencias corporeizadas e instrumentales, parece prometedor para generar actividades de aprendizaje poderosas.*

Palabras clave: *tecnología digital, instrumentación corporeizada, Corporeización, enfoque instrumental, educación matemática, educación matemática realista.*

Una introducción al uso de herramientas

Desde el origen de la humanidad, los hombres han utilizado herramientas para ampliar su alcance y llevar a cabo tareas de manera más fácil y eficiente. Con el tiempo se ha desarrollado una amplia gama de herramientas. Las más básicas, como un hacha de piedra para cortar madera, permitieron a sus usuarios ir más allá de sus limitaciones físicas para lograr objetivos específicos. Las herramientas no siempre fueron diseñadas como tales. En algunos casos, las personas, o los animales, dado que el uso de herramientas no se limita a la especie humana, se apropiaron de los objetos para una tarea específica y de esta manera "convirtieron los objetos en herramientas". Por ejemplo, uno podría usar una rama de árbol para golpear a alguien más fuerte de lo que uno podría hacerlo con las manos descubiertas, pero la rama no creció del árbol para facilitar la paliza.

[1] Drijvers, P. (2020). Instrumentación corporeizada: combina diferentes puntos de vista sobre el uso de la tecnología digital en la educación matemática. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), Actas del Undécimo Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática (pp. 8-28). Utrecht, Los países bajos: Grupo Freudenthal e Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht y ERME (Asociación Europea para la Investigación en Educación Matemática, en español).

Con el tiempo, las herramientas se han vuelto más sofisticadas y son diseñadas para llevar a cabo tareas cognitivas. Piense, por ejemplo, en tablillas de arcilla para plasmar cálculos (Proust, 2012). Escribir cálculos supone formas de representar números y operaciones, que son nociones matemáticas bastante abstractas; estas representaciones en sí ya pueden considerarse herramientas (Monaghan, Trouche y Borwein, 2016). Desde las tablillas de arcilla, muchas otras herramientas para las matemáticas se han diseñado y utilizado a lo largo de los siglos. Los artefactos físicos como el ábaco y las brújulas respectivamente facilitaron los cálculos y las construcciones geométricas.

Gradualmente, surgieron nuevos tipos de herramientas, como las herramientas mecánicas (piense en la Pascalina de Pascal (Maschietto y Soury-Lavergne, 2013)) y las herramientas digitales. Hoy en día, la tecnología digital, como calculadoras, tabletas (aunque ya no de arcilla), teléfonos inteligentes y relojes inteligentes, da acceso a una amplia gama de características matemáticas, incluidos sofisticados motores de álgebra computacional y paquetes estadísticos. En muchos casos, las matemáticas integradas en los últimos tipos de software tienen un carácter de caja negra no transparente. Además de esto, el papel de las matemáticas bajo el capó de las herramientas avanzadas, tales como motores de búsqueda, herramientas de navegación y tarjetas de crédito, por mencionar solo algunos ejemplos, se está volviendo cada vez más invisible.

A medida que la educación prepara para la vida privada y profesional futura, el desarrollo y la disponibilidad generalizada de herramientas matemáticas sofisticadas afecta la educación matemática. Estas herramientas transforman la actividad matemática (Hoyles, 2018). Sin embargo, aún se desconoce mucho sobre cómo explotar el potencial de estas poderosas tecnologías para el aprendizaje de las matemáticas. A pesar de la gran cantidad de literatura disponible (para ver resúmenes, ver Ball et al., 2018; Hoyles y Lagrange, 2010; Trgalová, Clark-Wilson y Weigand, 2018), la comunidad de educación matemática todavía está luchando por la integración de la tecnología digital tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. La pregunta sobre cómo el uso de la tecnología digital puede fomentar el aprendizaje de las matemáticas y qué lentes teóricos pueden guiarnos está esperando ser respondida.

Para abordar esta pregunta, primero cubriré globalmente las funcionalidades didácticas de la tecnología digital en la educación matemática y los modestos efectos generales del uso de estas herramientas para el aprendizaje. Para considerar posibles explicaciones de estos hallazgos, luego abordaré tres enfoques teóricos relevantes con más detalle: (1) un enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) sobre el uso de herramientas, (2) un enfoque instrumental para el uso de herramientas y (3) un enfoque corporeizado sobre la cognición. Finalmente, afirmaré que estas tres lentes comparten un enfoque en el significado matemático. Mientras que el enfoque de la EMR proporciona pautas generales importantes, un enfoque integrador para el uso de herramientas, que denominaré instrumentación corporeizada, y que incluye la cuidadosa alineación de las experiencias corporeizadas e instrumentales, parece prometedor para generar actividades de aprendizaje poderosas.

HERRAMIENTAS DIGITALES EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Una taxonomía de las herramientas digitales

En las últimas décadas, se ha desarrollado una miríada de herramientas digitales para la educación matemática. Estas herramientas muestran una amplia variedad con respecto al enfoque matemático, la funcionalidad didáctica, la facilidad de uso y otras características. Todas, sin embargo, vienen con posibilidades y limitaciones, con oportunidades y restricciones. Permítanme tratar de esbozar una visión general del panorama fragmentado de la tecnología digital en la educación matemática. Una primera dimensión, por supuesto, es la funcionalidad matemática de la herramienta. Una categorización de la funcionalidad matemática de una herramienta puede estar cerca de una categorización del campo de las matemáticas en sí. Las herramientas digitales pueden realizar trabajos algebraicos, tareas gráficas, análisis estadísticos, procedimientos de cálculo y trabajos geométricos. Los dominios tradicionales de las matemáticas escolares (por ejemplo, número, razón, álgebra, geometría, cálculo, estadística) pueden servir para clasificar globalmente la funcionalidad matemática de las herramientas digitales para la educación matemática. No hace falta decir que una herramienta digital específica puede cubrir un rango de estos dominios y, como tal, servir a más de una funcionalidad matemática, pero esta categorización matemática todavía parece funcionar.

Un poco más complicada es una taxonomía de la funcionalidad didáctica de una herramienta digital, más aún, ya que esto no es solo una cuestión de la herramienta en sí, sino que también depende en gran medida del tipo de tareas y de la forma en que el uso está integrado y orquestado en los procesos de enseñanza y aprendizaje. A pesar de esta limitación evidente, creo que el modelo muy global presentado en la Figura 1 (Drijvers, Boon y Van Reeuwijk, 2011; Drijvers, 2018b) puede ayudar a los maestros y educadores a preparar su enseñanza con tecnología y ser explícitos acerca de sus objetivos principales y las opciones correspondientes con respecto a la herramienta a utilizar. La primera funcionalidad didáctica en la Figura 1 es "hacer matemáticas". Esta funcionalidad no se dirige al corazón de la actividad matemática en sí misma, sino que se refiere a externalizar parte del trabajo para aliviar la mente del alumno. De esta manera, se puede ahorrar energía para el asunto principal; una división del trabajo entre estudiante y máquina, por así decirlo. A continuación, la Figura 1 muestra dos tipos de funcionalidad didáctica que se centran en el aprendizaje. Con respecto al aprendizaje mediante la práctica de habilidades matemáticas, las herramientas digitales pueden ofrecer variación y aleatorización de tareas, y retroalimentación automatizada e inteligente. Como tal, las herramientas digitales forman un entorno personal en el que uno puede cometer errores de forma segura y aprender de ellos. Finalmente, el uso de herramientas para el desarrollo de conceptos implica el uso de una herramienta digital para explorar fenómenos que invitan al desarrollo conceptual. Ésta es probablemente la funcionalidad didáctica más desafiante y sutil para explotar, ya que el desarrollo de conceptos puede considerarse un objetivo de aprendizaje de orden superior.

Por supuesto, las categorías en esta taxonomía de funcionalidad didáctica no son mutuamente excluyentes; en muchos casos, la funcionalidad didáctica de "conceptos en desarrollo" se basa en la función de externalización para hacer matemáticas. Además, la función didáctica de una herramienta digital es solo una característica de la herramienta en menor medida que la funcionalidad matemática; también depende del tipo de tareas y la actividad del estudiante, y el entorno educativo. Dicho esto, el modelo puede ayudar a identificar algunos roles principales de la tecnología digital en el aprendizaje de las matemáticas.

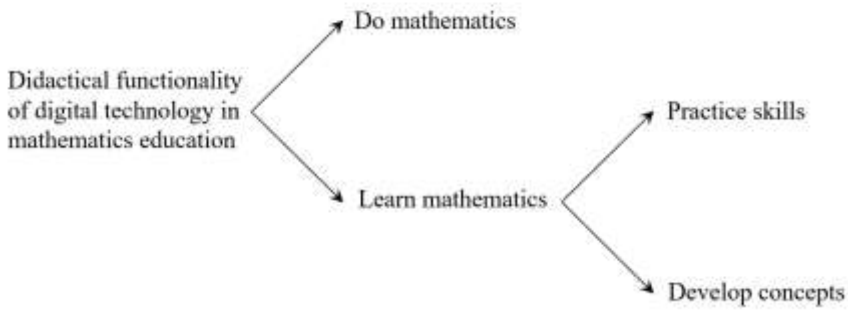


Figura 1. Funcionalidad didáctica de la tecnología digital en educación matemática

(Drijvers, Boon y Van Reeuwijk, 2011; Drijvers, 2018b)

Los beneficios del uso de herramientas

Después de este bosquejo global del panorama matemático y didáctico, uno podría preguntarse sobre los beneficios del uso de la tecnología digital en la educación matemática. ¿Cuánta evidencia hay para los logros de aprendizaje? Recientemente, la OCDE no fue muy optimista sobre esta evidencia: "A pesar de las considerables inversiones en computadoras, conexiones a Internet y software para uso educativo, hay poca evidencia sólida de que un mayor uso de la computadora entre los estudiantes conduzca a mejores puntajes en matemáticas y comprensión lectora". (OCDE, 2015, p. 145)

Para seguir investigando esto, repasé algunos estudios en este dominio (Drijvers, 2018a). Al hacerlo, una fuente principal fue un metaanálisis de segundo orden llevado a cabo por Young (2017), quien, curiosamente, tomó como punto de partida la tipología de funcionalidad didáctica que se muestra en la Figura 1. Incluyendo 19 meta estudios, Young encuentra un efecto positivo significativo del uso de la tecnología en la educación matemática con un tamaño de efecto promedio pequeño a moderado de 0,38 (Cohen, 1988). En su cálculo, la *d* de Cohen y la *g* de Hedges se consideran comparables. Este promedio varía ligeramente sobre las tres funciones didácticas diferentes: 0,47 para el papel de "hacer matemáticas", 0,42 para el papel de "practicar habilidades" y 0,36 para el papel de "desarrollar conceptos". Esto no me sorprende, ya que la última funcionalidad generalmente requiere más reflexión del estudiante que las otras dos. Sin embargo, para los estudios en los que se combinan las diferentes funcionalidades didácticas, el tamaño del efecto promedio es menor, es decir, 0.21.

Un hallazgo interesante de Young (ibíd.) es que el tamaño del efecto promedio reportado parece disminuir con la calidad creciente de los metaanálisis incluidos. La calidad aquí se refiere tanto al metaanálisis en sí como a la calidad de los estudios incluidos en él. Por ejemplo, los tres estudios mencionados en la Tabla 1 son los únicos calificados como de alta calidad y muestran tamaños de efecto relativamente bajos. Una mirada más detallada a estos estudios también revela que los tamaños del efecto reportados en los diferentes informes de investigación no aumentan significativamente con el tiempo, mientras que uno podría esperar que las herramientas tecnológicas estén mejorando junto con la capacidad de los maestros para explotarlas en la enseñanza. Una posible explicación podría ser que un posible desarrollo positivo con el tiempo se compensa con otros factores, tales como diseños y métodos de estudio más rigurosos y tamaños de muestra más grandes.

Tabla 1:

Tamaños de efectos informados en tres estudios de meta-revisión de alta calidad

Estudio	Número de tamaños del efecto	Tamaño del efecto promedio	Conclusión global según los autores
Li y Ma, 2010	85	*d* = 0.28 (ponderado)	Efectos positivos significativos moderados
Cheung y Slavin, 2013	74	*d* = 0.16	Un efecto positivo, aunque modesto.
Steenbergen-Hu y Cooper, 2013	61	*g* rango 0.01 – 0.09	Sin efecto negativo y quizás un pequeño efecto positivo

Fuente: basados en Drijvers, 2018a

Por supuesto, este enfoque de *zoom out* sufre limitaciones importantes. Los estudios se basan en investigaciones anteriores, por lo que la imagen podría haber cambiado desde entonces. Además, los estudios solo incluyen estudios experimentales y cuantitativos y descuidan la investigación cualitativa o basada en el diseño. Y, finalmente, las descripciones generales como éstas no distinguen los niveles educativos, los tipos de tecnología utilizados y otros factores educativos que pueden ser decisivos.

Aun así, sería demasiado fácil ignorar los hallazgos anteriores debido a estas limitaciones. Los tamaños del efecto no son abrumadores y la cita de la OCDE al principio de esta sección parece apropiada. ¿Por qué la integración de la tecnología digital en la educación matemática no es el éxito que uno podría haber esperado? En mi opinión, la pregunta "¿funcionan las TIC en la educación matemática?" es demasiado amplia. Si reemplazáramos "TIC" por "libro de texto", por ejemplo, a nadie le sorprendería obtener una respuesta como "solo depende de la calidad del libro de texto". De manera similar, explotar todo el potencial de las herramientas digitales en la educación matemática es un tema complejo que requiere conocimientos más detallados sobre los procesos de aprendizaje que juegan un papel, en el contenido matemático orientado, y en las formas en que la actividad matemática se ve afectada por el uso de la herramienta. Por lo tanto, ahora me acercaré a tres puntos de vista teóricos y más matizados sobre el uso de herramientas digitales en la educación matemática, que pueden ofrecer principios y marcos para abordar mejor la sutileza del tema.

Un enfoque de la Educación Matemática Realista

Aunque la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) se aplica a la educación matemática en general, también podría arrojar algo de luz sobre los posibles beneficios del uso de la tecnología digital en la educación matemática. Permítanme explicar primero algunas características generales de la EMR. La EMR es una teoría de instrucción para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se desarrolló en Holanda. Un punto de partida fue el enfoque de Freudenthal (1973) sobre las matemáticas como una actividad humana, es decir, los estudiantes deberían experimentar las matemáticas como significativas, auténticas, con sentido y reales. La siguiente cita subraya que la palabra "realista" no debe entenderse como "mundo real":

> Aunque las situaciones "realistas" en el sentido de las situaciones del "mundo real" son importantes en la EMR, "realista" tiene una connotación más amplia aquí. Significa que a los estudiantes se les ofrecen situaciones problemáticas que pueden imaginar. Esta interpretación de "realista" se remonta a la expresión holandesa "zich REALISEren", que significa "imaginar". Es este énfasis en hacer algo real en tu mente lo que le dio a la EMR su nombre. Por lo tanto, en la EMR, los problemas que se presentan a los estudiantes pueden provenir del mundo real, pero también del mundo de fantasía de los cuentos de hadas o del mundo formal de las matemáticas, siempre que los problemas sean experimentalmente reales en la mente del estudiante. (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014, p. 521).

Este punto de partida se elabora en algunos conceptos clave, incluidos el principio de actividad, la matematización y la fenomenología didáctica. Permítanme explicar brevemente cada uno de estos tres.

- El *principio de actividad* se vincula con la visión de las matemáticas como una actividad humana y destaca que los estudiantes deberían tener la oportunidad de explorar y reinventar las matemáticas, y de esta manera desarrollar sus conocimientos matemáticos.
- En línea con esto, la *matematización* se refiere a la actividad de hacer matemáticas. Treffers (1987) distingue la matematización horizontal y vertical. La matematización horizontal se refiere a la realidad matematizante y al proceso de formulación de una descripción matemática, que implica la transferencia entre diferentes dominios. La matematización vertical se refiere a la matematización de las matemáticas y al proceso de reorganización dentro del sistema matemático, que involucra la génesis de objetos matemáticos y las relaciones entre ellos.
- Una *fenomenología didáctica* es un análisis de "cómo los objetos de pensamiento matemático pueden ayudar a organizar y estructurar los fenómenos" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014, p. 175). Identifica fenómenos que ruegan organizarse con los medios matemáticos específicos que son el tema del aprendizaje y, como tal, pueden "mostrarle al maestro los lugares donde el alumno podría entrar en el proceso de aprendizaje de la humanidad" (Freudenthal, 1983, p. ix). Invita al desarrollo de las matemáticas en juego y le da sentido. Como se dijo antes, estos fenómenos pueden

provenir de diferentes "mundos" siempre que sean experimentalmente reales para los estudiantes (Gravemeijer y Doorman, 1999). Tal análisis, por un lado, pide un análisis exhaustivo del tema matemático y, por otro lado, una visión clara del público objetivo de la enseñanza.

¿Cómo es que estos principios de la EMR informan el uso de la tecnología digital en la educación matemática? Primero, la interpretación de la palabra "realista" en el sentido de experimentalmente real sugiere que los estudiantes deberían experimentar la actividad con la tecnología digital como significativa. En línea con Ainley, Pratt y Hansen (2006), los estudiantes pueden percibir una actividad como significativa si son conscientes de su propósito y su utilidad, donde el propósito se refiere a la actividad que conduce a un "resultado significativo para el alumno, en términos de un producto real o virtual, o la solución de un problema interesante" (p. 29), y utilidad se refiere a "las formas en que esas ideas matemáticas son útiles" (p. 30). Espero que un cierto nivel de transparencia de la herramienta fomente el significado en términos de propósito y utilidad experimentados.

Segundo, el principio de actividad y el enfoque de la actividad humana sugieren que la herramienta digital debería ofrecer a los estudiantes oportunidades para explorar y ser un actor en lugar de un usuario pasivo. Pienso que un grado de propiedad y la sensación de tener el control puedan dar lugar a aquello. Desde la perspectiva de la matematización, tener el control también incluye la oportunidad de expresarse matemáticamente de forma fácil con la cantidad de libertad que uno también tiene al hacer matemáticas en papel y lápiz. Esto requiere una base matemática sólida para la herramienta en uso.

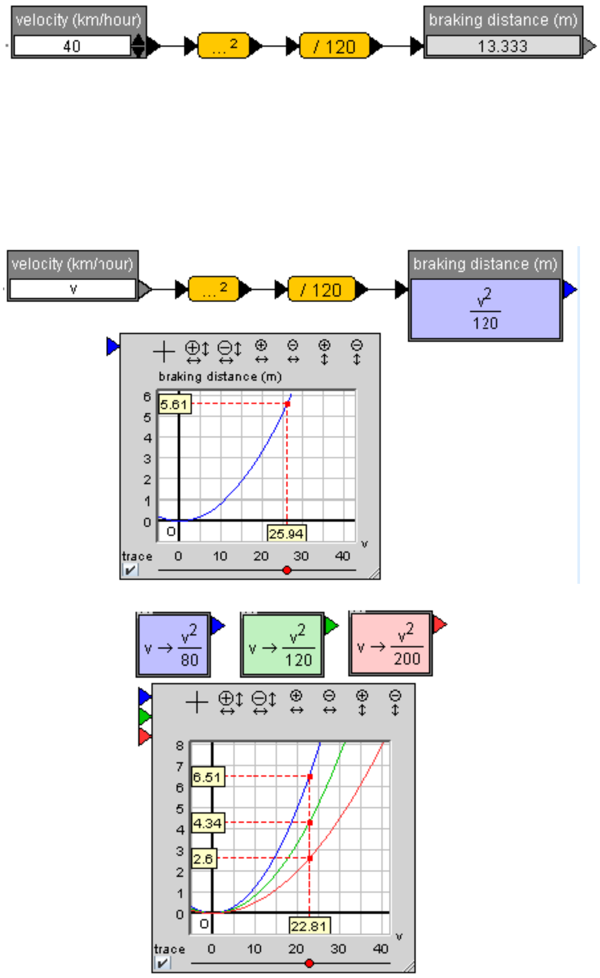
Tercero, y para finalizar, tomar una perspectiva didáctica de la fenomenología me lleva a esperar que los fenómenos puedan cambiar en un aula rica en tecnología: el entorno digital en sí mismo puede ser un fenómeno significativo para estudiar. Por ejemplo, si los estudiantes usan regularmente herramientas digitales como calculadoras gráficas o software para geometría dinámica, estos entornos realmente se convierten en parte del ambiente del aula y, como tales, pueden provocar fenómenos inspiradores que invitan a una mayor investigación. Además, como muchos estudiantes hoy en día están familiarizados con los juegos y las herramientas, los entornos digitales pueden ser bastante naturales y auténticos para ellos, lo que ofrece oportunidades para realizar mejor este principio de la EMR.

Permítanme ilustrar estos principios a través del ejemplo de una serie de lecciones en línea sobre cadenas de flechas y funciones para estudiantes del octavo grado (estudiantes de 14 años), implementados en el Entorno[2] de Matemática Digital del Instituto Freudenthal (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon y Reed, 2012; Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer, 2010). En esta serie de lecciones, los estudiantes primero exploran cadenas de operaciones en contextos significativos. Como ejemplo, descubren cómo las distancias de frenado de los diferentes tipos de vehículos, la distancia necesaria para detenerse en caso de emergencia, dependen de su velocidad. Luego, representan el encadenamiento al pararse uno al lado del otro, creando una cadena de entrada/salida en la que cada estudiante es responsable de realizar una de las operaciones, para prepararse para el trabajo en el entorno digital.

La Figura 2 muestra algunas instantáneas del trabajo en el entorno digital que sigue. La primera fila muestra cómo los estudiantes pueden encadenar operaciones para calcular la distancia de frenado en metros de un scooter con una velocidad inicial de 40 km / hora. Por supuesto, después de su experiencia previa con series de cálculos numéricos, el estudiante debe experimentar la construcción de estas cadenas como una forma significativa de organizar estos cálculos. En la segunda fila, la distancia de frenado se investiga como función de la velocidad inicial y se agrega un gráfico. En la tercera fila, estas funciones de distancia de frenado se comparan para scooters, automóviles y camiones. Debido a que la ventana se llenó demasiado, el usuario ha contraído las cadenas de funciones en cuadros individuales, lo que permite una buena comparación de los tres gráficos.

Incluso si estas actividades se describen solo brevemente, se pueden reconocer algunos principios de la EMR. En cuanto al principio de realidad, a los estudiantes se les presentaron cadenas de flechas para organizar los cálculos en actividades que incluyan a toda la clase y en papel y bolígrafo, por lo que se han convertido en formas significativas de capturar cálculos. El carácter abierto del entorno, con una gran ventana vacía como sala de exploración para los estudiantes, está destinado a proporcionar a los estudiantes los medios para construir, cambiar y organizar libremente cadenas de flechas y tener el control de lo que está sucediendo. La matematización horizontal se aborda mediante la tarea de modelar las cadenas de flechas para el caso de las distancias de frenado, y la matematización vertical entra en juego tan pronto como se comparan las tres funciones cuadráticas y sus relaciones, independientemente de la situación inicial del problema de la distancia de frenado. La opción de contraer cadenas de funciones en cuadros está pensada para admitir una vista de objeto en función. Una lente de fenomenología didáctica llevó a los diseñadores a considerar el contexto de la distancia de frenado como un fenómeno que se puede organizar muy bien a través de funciones matemáticas y cadenas de flechas.

Para resumir, el ejemplo ilustra cómo los principios generales de la EMR se pueden aplicar a la situación específica del uso de herramientas digitales de una manera significativa, y como tal proporcionan pautas y criterios para el uso sensato de herramientas. De esta manera, la lente de la EMR puede ofrecer una visión matizada sobre el uso de la tecnología digital en la educación matemática, incluso si no está destinada a este caso particular.



A function as an input-output assignment: braking distance as a function of velocity

Una función como una asignación de entrada-salida: distancia de frenado como función de la velocidad

Investigation of the co-variation of velocity and braking distance through tracing the graph

Investigación de la covariación de la velocidad y la distancia de frenado a través del trazado del gráfico

Investigation of a family of functions, representing braking distances for three different vehicles

Investigación de una familia de funciones que representan distancias de frenado para tres vehículos diferentes.

Figura 2. Instantáneas del material Function and Arrow Chains (de Drijvers, Boon, Doorman, Bokhove y Tacoma, 2013). Ver https://youtu.be/OMDjC5yVlr0 para una animación.

Un enfoque instrumental

Además de las pautas generales ofrecidas por la EMR, se necesita una visión más detallada sobre la interacción entre las matemáticas y el uso de herramientas. Una primera visión un tanto ingenua sobre las herramientas digitales y su uso en la educación matemática podría ser que las herramientas son solo asistentes matemáticas "objetivas" que nos ayudan a realizar tareas, a "hacer el trabajo": usarlas reduce la resolución de tareas matemáticas a tan solo presionar botones y, como tal, simplifica nuestras vidas. Sin embargo, las cosas no son tan sencillas. Las herramientas no son tan neutrales como uno podría esperar, pero vienen con posibilidades y limitaciones, con oportunidades y obstáculos, y como tales guían las prácticas matemáticas del usuario:

> Las herramientas son importantes: se interponen entre el usuario y el fenómeno a modelar, y dan forma a las estructuras de actividad. (Hoyles & Noss, 2003, p. 341)

Por ejemplo, dibujar un círculo con compás es bastante diferente de dibujarlo en un entorno de geometría dinámica como GeoGebra. En el primer caso, uno realmente experimenta un movimiento circular, después de decidir sobre el centro y el radio. En el último caso, la atención se centra en establecer el centro y el radio, pero al agrandar el radio, el círculo crece y el movimiento circular ya no es necesario. Diferentes herramientas conducen a diferentes técnicas y, como tal, a diferentes puntos de vista sobre el mismo concepto matemático subyacente.

De hecho, en línea con Vygotsky (1978), las herramientas median entre la actividad humana y el medio ambiente. Como consecuencia, el uso de herramientas digitales para aprender y hacer matemáticas no es solo una cuestión de transformar directamente el pensamiento matemático en comandos de herramientas. Por un lado, el usuario da forma a las técnicas para usar la herramienta, pero, por otro lado, la herramienta da forma y transforma la práctica matemática del usuario. Estas consideraciones dieron lugar al desarrollo de un nuevo enfoque teórico, llamado enfoque instrumental para el uso de herramientas. La clave de este enfoque son las nociones de artefacto, instrumento, génesis instrumental, esquema y técnica. Permítanme explicar brevemente estas nociones.

Un punto de partida en los enfoques instrumentales es la distinción entre artefacto e instrumento (Rabardel, 2002; Vérillon y Rabardel, 1995). El artefacto es el objeto que se utiliza como herramienta. En nuestro caso, las calculadoras gráficas o el software de geometría dinámica son artefactos, incluso si también queremos mirar con más detalle, y considerar la ventana de gráficos en GeoGebra como un artefacto, o la opción Solucionador en una calculadora gráfica. Un instrumento consiste en un artefacto y "uno o más esquemas de utilización asociados" (Verillon y Rabardel, 1995, p. 87). Entonces, además del artefacto, el instrumento también involucra los esquemas que el usuario desarrolla y aplica mientras usa el artefacto para una clase específica de situaciones de actividad instrumentada, en nuestro caso a menudo involucrando un tipo de tareas matemáticas. Para resumir esto a una "fórmula" algo simplificada: Instrumento = Artefacto + Esquema. El proceso de un artefacto que se convierte en parte de un instrumento se llama génesis instrumental (Artigue, 2002; Trouche & Drijvers, 2010).

¿Cuáles son estos esquemas, clave en la génesis instrumental? Basado en el trabajo de Piaget (1985) y otros, un esquema se considera una forma más o menos estable de manejar situaciones o tareas específicas. Vergnaud afirma que "la organización secuencial de la actividad para una determinada situación es la referencia primitiva y prototípica para el concepto de esquema" (Vergnaud, 2009, p.84). Refiriéndose al esquema de contar en particular, Vergnaud (1987, p.47) habla de "una secuencia funcional y organizada de acciones gobernadas por reglas, una totalidad dinámica cuya eficiencia requiere habilidades sensoriomotoras y competencias cognitivas". Luego, Vergnaud (2009) prefiere hablar de esquemas perceptivo-gestuales en lugar de esquemas sensoriomotores, como ir más allá del nivel puramente biológico y resaltar la estrecha relación entre percepción y gesto, por un lado, y conceptualización por el otro. De acuerdo con estas ideas, el término esquema sensoriomotor en el resto de este texto debe interpretarse en este sentido más amplio.

El desarrollo del esquema implica el desarrollo entrelazado de habilidades sensoriomotoras y cognición. Cuando vemos un esquema aquí como parte de un instrumento, hablamos de un esquema de instrumentación. Artigue (2002) destaca el valor pragmático y epistémico de los esquemas: el valor pragmático en el sentido de su potencial productivo para "hacer las cosas", y el valor epistémico en el sentido de contribuir al significado y la comprensión de las matemáticas involucradas.

Las partes observables de un esquema de instrumentación, las interacciones concretas entre usuario y artefacto, se denominan técnicas instrumentadas. Las técnicas instrumentadas son secuencias más o menos estables de interacciones técnicas entre el usuario y el artefacto con un objetivo particular. Como tal, un esquema de instrumentación consiste en una o más técnicas instrumentadas observables, que se guían por las oportunidades y limitaciones que ofrece el artefacto, y por el conocimiento de los estudiantes. Mientras tanto, las técnicas también pueden contribuir al desarrollo de este conocimiento. Como tal, las técnicas pueden verse como acciones que reflejan el conocimiento de los estudiantes. Y, aún más importante, las técnicas y el conocimiento pueden coexistir. Es esta coexistencia la que forma el corazón de la génesis instrumental y que refleja el potencial educativo principal de usar el artefacto en una situación dada.

En el enfoque instrumental, un esquema depende del sujeto, el artefacto y la tarea. Tres comentarios deben hacerse aquí. Primero, esto implica que llevar a cabo una tarea similar con diferentes artefactos puede conducir a diferentes esquemas. El caso de las brújulas descrito anteriormente muestra que tendrán lugar diferentes génesis instrumentales. Es interesante utilizar diferentes artefactos para tareas similares y confrontar y comparar los diferentes esquemas que surgen (Maschietto y Soury-Lavergne, 2013). Como consecuencia, las prácticas matemáticas se transforman mediante el uso de artefactos digitales (Hoyles, 2018). En segundo lugar, la génesis instrumental no es solo un proceso individual, sino que forma parte de los procesos de aprendizaje social y la institucionalización dentro del contexto educativo específico. A través de la orquestación instrumental de los docentes (Trouche, 2004), se cuida una génesis instrumental colectiva para asegurar la convergencia hacia instrumentos y conocimientos matemáticos compartidos. De hecho, los maestros están involucrados en una génesis instrumental doble, incluido su desarrollo personal de esquemas, por un lado, y esquemas para usar en la enseñanza de sus alumnos por el otro. Tercero, algunos artefactos son más adecuados para tipos específicos de génesis instrumental que otros. Haspekian (2014) introdujo la noción de distancia instrumental para enfatizar el cambio en la práctica matemática que puede surgir como resultado de algún tipo de uso de herramientas. Si la distancia, por un lado, entre las prácticas matemáticas regulares o específicas y, por el otro, las técnicas invitadas por el artefacto son demasiado grandes, la génesis instrumental podría no ser productiva para el proceso de aprendizaje.

La importancia de esta visión instrumental para el uso de herramientas matemáticas en la educación matemática radica no solo en el reconocimiento de la sutileza y la complejidad del tema, sino también en las pautas concretas que ofrece para un uso fructífero: como maestros y diseñadores educativos, nosotros debemos establecer actividades para los estudiantes y elegir artefactos apropiados que juntos conduzcan a procesos de génesis instrumental en los que el conocimiento matemático objetivo se desarrolle de una manera significativa y natural. Un desajuste entre la tarea, las posibilidades del artefacto y el conocimiento matemático en juego no será efectivo. Esbozar estos tres elementos es el juego a jugar; incluye ser explícito sobre la génesis instrumental y el desarrollo del esquema al que se dirige.

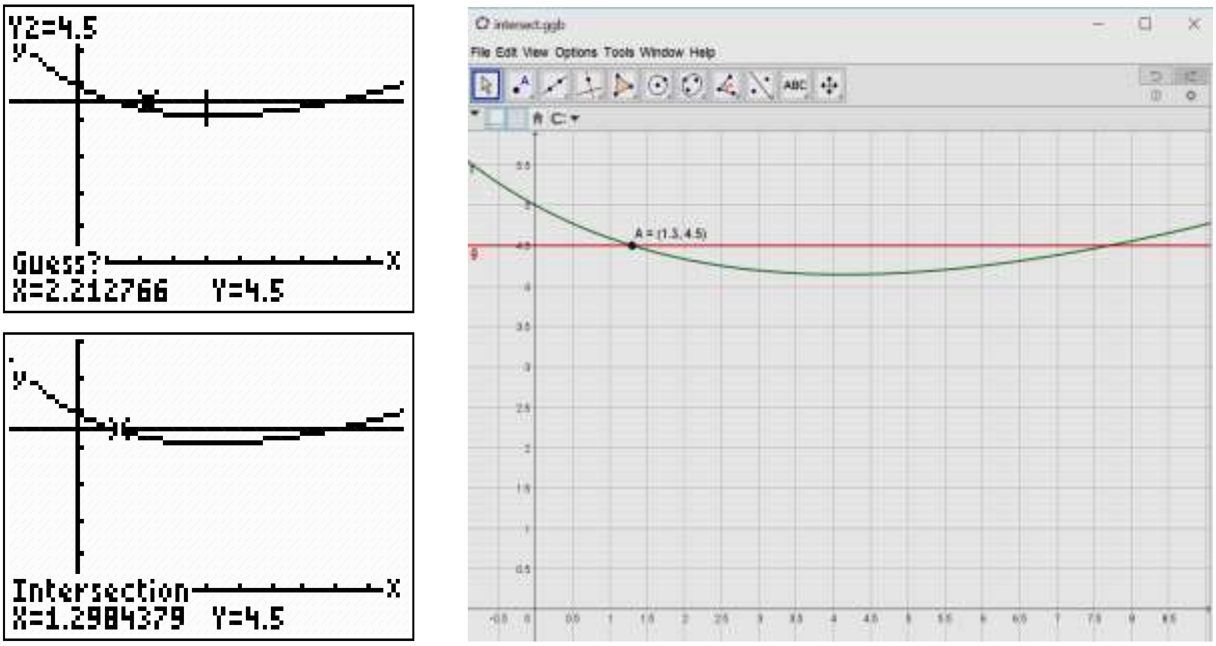


Figura 3. Intersección de gráficos para resolver ecuaciones con dos herramientas diferentes

Como ejemplo de desarrollo de este esquema, la Figura 3 muestra dos formas en que una ecuación se puede resolver gráficamente a través de un procedimiento de Intersect, una usando una calculadora gráfica (pantallas a la izquierda) y otra usando GeoGebra (pantalla a la derecha). Esta ecuación, $\frac{x^2+100}{2x+20} = 4.5$, apareció en una situación de problema realista en una pregunta de examen nacional en Holanda, en la que los estudiantes usaron una calculadora gráfica. Técnicamente hablando, el procedimiento se reduce a ingresar el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación por separado como funciones en la herramienta gráfica. A continuación, se debe establecer una ventana de visualización para que los dos gráficos muestren un punto de intersección. Luego se llama al procedimiento de intersección mediante la selección de los dos gráficos. Esto conducirá a las coordenadas de dicho punto de intersección. Finalmente, su primera coordenada es una solución de la ecuación. Dicho de esta manera, la técnica suena muy directa y procedimental.

Sin embargo, hay varios elementos conceptuales involucrados. Primero, el estudiante debe ser consciente de la relación entre las soluciones de una ecuación y los puntos de intersección gráfica. En segundo lugar, al establecer las dimensiones de la ventana de visualización, el estudiante debe tener una idea de dónde se pueden encontrar los puntos de intersección, lo que requiere un cierto razonamiento (o un comportamiento de prueba y error). Tercero, el resultado consiste no en uno sino en dos valores numéricos, y una solución es un valor numérico aproximado. Cuarto, y para finalizar, el procedimiento conduce a una única solución; el procedimiento debe repetirse para ecuaciones con múltiples soluciones, que pueden ser visibles en la ventana de visualización actual, pero también pueden existir fuera de sus límites. Nuevamente, se necesita algún razonamiento para considerar la opción de otros puntos de intersección fuera de la vista actual. Eventualmente, esta técnica se puede complementar haciendo zoom in en los puntos de intersección, haciendo zoom out para obtener una visión general o generando tablas de valores de funciones.

Es este entrelazamiento de elementos técnicos y conceptuales lo que me hace hablar de un esquema de instrumentación Intersect. El desarrollo de este esquema impacta en la visión de los estudiantes sobre la resolución de ecuaciones de una manera sutil y algo implícita. Resolver una ecuación ya no es una cuestión de manipulación algebraica exacta mientras se mantiene la equivalencia, sino que se reemplaza por una vista gráfica funcional que conduce a valores aproximados. Como tal, el uso de la herramienta afecta el contenido matemático. El esquema Intersect, por lo tanto, integra técnicas e ideas matemáticas, y esto es exactamente de lo que se trata la génesis instrumental.

Los esquemas de instrumentación que los estudiantes desarrollan dependen de la herramienta digital en uso. En la Figura 3, la parte izquierda muestra dos pantallas de una calculadora gráfica, aquí un modelo de Texas Instruments (Drijvers y Barzel, 2012). El lado derecho muestra una pantalla similar en GeoGebra, que ofrece una pantalla más grande y una resolución más alta. Las técnicas también son ligeramente diferentes: GeoGebra no solicita un valor inicial, sino que inmediatamente presenta un punto. Esto hace que el procedimiento sea más eficiente, pero también hace que sea más difícil encontrar las coordenadas del segundo punto de intersección. Además, la demostración de las coordenadas depende de la configuración en GeoGebra. Las dos herramientas, una vez más, en la configuración predeterminada, proporcionan los resultados con una precisión diferente.

Para resumir, este ejemplo ilustra la interacción entre las técnicas para usar una herramienta digital y el conocimiento matemático relacionado involucrado; una interacción que afecta fundamentalmente a las matemáticas, pero mientras tanto es sutil para estudiar. El ejemplo muestra, para reformular la cita de Hoyles y Noss (2003) anteriormente en esta sección, que las herramientas y técnicas no son neutrales, pero pueden resaltar o incluso requerir puntos de vista matemáticos específicos sobre la tarea en juego. Como consecuencia, el uso de herramientas es menos simple de lo que parece. Las vistas instrumentales son útiles para tomar conciencia de esta complejidad e identificar la interacción entre artefactos y tareas, entre técnicas y esquemas. Reconocer la génesis instrumental como un camino hacia el aprendizaje de las matemáticas, y probablemente también de diferentes matemáticas, es un paso importante para fomentar el aprendizaje al usar herramientas digitales.

Un enfoque corporeizado de la cognición

El enfoque instrumental para el uso de herramientas ha resultado valioso para comprender la interacción entre lo técnico y lo conceptual cuando los alumnos usan artefactos. Hasta ahora, sin embargo, se centró principalmente en las matemáticas de nivel superior, como las corrientes preuniversitarias, y en herramientas digitales sofisticadas, como el álgebra computacional y los sistemas de geometría dinámica. Tal vez sea debido a estos focos que las matemáticas se abordan como una actividad cerebral, y que los cimientos corporales de la cognición tienden a descuidarse. Para hacer justicia a este último aspecto, ahora considero un enfoque corporeizado de la cognición como un tercer lente para mirar el uso de la tecnología digital en la educación matemática.

Un punto de partida general aquí es que el cuerpo y la mente no pueden separarse y que una visión dualista de ellos es inapropiada. La cognición no se considera un asunto exclusivamente mental, sino que se basa en experiencias corporales que tienen lugar en la interacción con el mundo físico y social (por ejemplo, ver Radford, 2009; Lakoff y Núñez, 2000; de Freitas y Sinclair, 2014; Ferrara y Sinclair, 2016). La corporeización "es la hipótesis sorprendentemente radical de que el cerebro no es el único recurso cognitivo que tenemos disponible para resolver problemas" (Wilson y Golonka, 2013, p.1). Dicho de otra manera, Alibali y Nathan (2012) afirman:

> Según esta perspectiva, las estructuras y los procesos cognitivos y lingüísticos, incluidas las formas básicas de pensamiento, las representaciones del conocimiento y los métodos de organización y expresión de la información, están influenciados y limitados por las particularidades de los sistemas de percepción humana y los cuerpos humanos. En pocas palabras, la cognición está formada por las posibilidades y limitaciones del cuerpo humano. (p. 250)

También para el caso de las matemáticas, a menudo considerado un tema muy abstracto y mental, se reconoce cada vez más que la cognición está enraizada en actividades sensoriomotoras, y los objetos matemáticos se basan en esquemas sensoriomotores. Dos números especiales, 57(3) y 70(2), de la revista científica *Educational Studies in Mathematics*, dedicados a la corporeización en la educación matemática, dan testimonio del creciente interés de la investigación en educación matemática en esta perspectiva. Muchos enfoques corporeizados toman "las cuatro E" de la cognición[3] (encarnada o corporeizada, extendida, embebida y enactiva) como punto de partida. En estos términos, las opiniones iniciales sobre el uso de herramientas en este documento resaltan el papel de las herramientas para extender el cuerpo; ahora el centro de atención se desplaza hacia las otras E y hacia la tecnología digital que brinda oportunidades para crear experiencias corporeizadas en particular.

A primera vista, podría parecer que existe una tensión entre este enfoque corporeizado sobre la cognición y el uso de la tecnología digital en la educación matemática. Las herramientas digitales tales como hojas de cálculo, software de álgebra computacional y sistemas de geometría dinámica incorporan una cantidad impresionante de conocimiento matemático. Como estas herramientas no son transparentes, parecen "ocultar este conocimiento bajo el capó", lo que puede crear una distancia entre el usuario y las matemáticas utilizadas. Y, lo que es más importante, las formas de interactuar con estas herramientas no han sido hasta ahora "basadas en el cuerpo", ya que la interacción se realizó principalmente a través de las pulsaciones del teclado en el pasado más remoto, y a través de los movimientos del mouse en el pasado más reciente. Los desarrollos tecnológicos recientes, sin embargo, abren nuevos horizontes para hacer justicia a la multimodalidad del conocimiento matemático. Tal vez en parte debido a la necesidad de experiencias corporeizadas, se han desarrollado interfaces de usuario mejoradas (piense en tecnología de pantalla multitáctil, reconocimiento de escritura, sensores de movimiento y realidad virtual y aumentada), que ofrecen nuevas oportunidades para investigar un enfoque corporeizado para el uso de herramientas. Por ejemplo, algunos investigadores estudiaron a estudiantes que "grafican a pie" usando un sensor de movimiento, y de esta manera crean experiencias corporeizadas de distancia, velocidad y aceleración que cambian con el tiempo (Duijzer, Van den Heuvel-Panhuizen, Veldhuis, Doorman y Leseman, 2019; Robutti, 2006).

En línea con la tradición didáctica de ingeniería dentro de mi instituto (Margolinas & Drijvers, 2015), el trabajo realizado en este campo por mis colegas y por mi dentro de mi instituto sigue un enfoque de diseño corporeizado (Abrahamson, 2009; Abrahamson, Shayan, Bakker y Van der Schaaf, 2016). Utilizamos "géneros de diseño" (Abrahamson, 2014; Bakker, Shvarts y Abrahamson, 2019) en las actividades en entornos digitales. En estas actividades, los estudiantes pueden participar en experiencias corporeizadas y desarrollar cognición matemática. Permítanme ilustrar este enfoque de diseño corporeizado con dos ejemplos.

Como primer ejemplo, la Figura 4 muestra una tarea diseñada por Shvarts (2018) en el Entorno de Matemática Digital. La pantalla izquierda muestra una línea base fija y un pequeño punto negro fijo. El punto gris más grande se proyecta sobre la línea base. Los tres puntos juntos definen un triángulo, que en la pantalla izquierda es rojo. La alumna puede mover el gran punto gris con su dedo, y el triángulo cambia en consecuencia. De repente, el triángulo se vuelve verde (pantalla derecha). El triángulo se vuelve verde cuando es isósceles, de lo contrario es rojo. Como consecuencia, el triángulo es verde si el punto gris móvil se encuentra en la parábola que tiene la línea base como directriz y el punto fijo como foco. Sin embargo, esta parábola de puntos discontinuos no se muestra a la alumna, pero se incluye aquí para el lector.

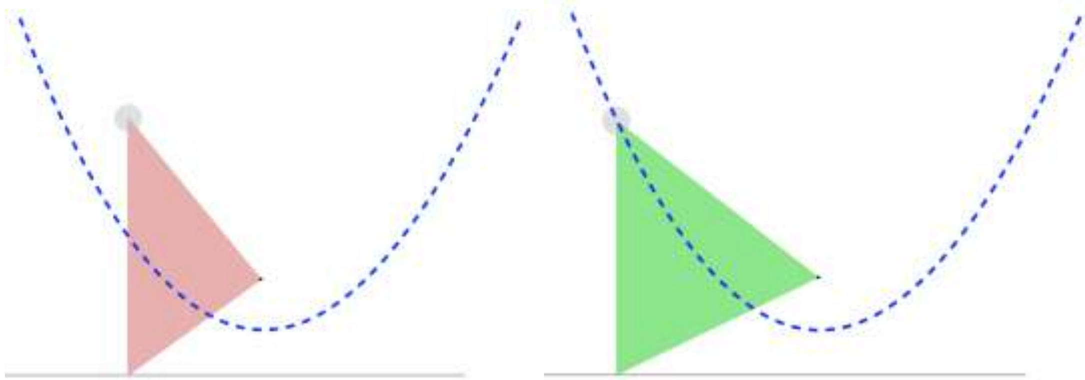


Figura 4. La tarea de la parábola (Shvarts, 2018; Shvarts & Abrahamson, 2019). Ver https://youtu.be/JHiHlFdUGtw para una animación.

La tarea, ahora, es mover constantemente el punto gris para que el triángulo permanezca verde. Cuando los estudiantes adquieren fluidez en sus movimientos, se les pregunta sobre la regla que determina el color del triángulo. La tarea es desafiante desde diferentes perspectivas. Desde una perspectiva de corporeización, la coordinación sensoriomotora es bastante compleja, ya que la dirección de movimiento debe verificarse constantemente con la orientación de la base del triángulo. Los datos de seguimiento ocular muestran muchos movimientos oculares que saltan entre el punto gris móvil y el punto medio de la base, a lo largo de la mediana del triángulo (Shvarts y Abrahamson, 2019). Estos saltos iterativos revelan los "anclas atencionales" más importantes (Duijzer, Shayan, Bakker, van der Schaaf y

Abrahamson, 2017). Desde una perspectiva matemática, la propiedad que hace que el triángulo sea verde es ser isósceles. Como un vértice del triángulo se fija a un punto y otro atraviesa una línea, esta tarea proporciona a los estudiantes experiencias sensoriomotoras que en el aprendizaje del futuro podrían alimentar la noción de parábola. En un nivel matemático más alto, y esto va más allá de cómo se presenta el ejemplo aquí, uno podría elaborar esta actividad hacia la reflexión sobre el locus del punto gris para el caso de que el triángulo permanezca verde (Shvarts, 2018). Como el triángulo es isósceles, y uno de los lados es perpendicular a la línea de base (directriz), podemos reconocer la propiedad de una cónica: las distancias al foco y la directriz permanecen iguales, por lo que el locus es una parábola. Este ejemplo muestra cómo las experiencias sensoriomotoras pueden llamar la atención de los estudiantes sobre la noción de que un triángulo es isósceles como preparación para la noción de parábola. Por supuesto, se deben tomar muchas decisiones de diseño, como cómo formular la tarea, qué soporte ofrecer (mostramos coordenadas o una cuadrícula), cómo secuenciar diferentes variaciones en esta tarea, cómo fomentar la noción de parábola, etcétera. El efecto de aprendizaje de tales tareas puede depender en gran medida de estas sutiles decisiones de diseño, pero va más allá del alcance del presente ejemplo. El diseño digital es un fenómeno relativamente nuevo, que exige mucho a los diseñadores (Leung y Baccaglini-Frank, 2017).

El segundo ejemplo se refiere al reconocimiento de escritura a mano. Escribir matemáticas a mano, ya sea en una pizarra vieja y polvorienta o en una tableta, implica movimientos de la mano y gestos que pueden proporcionar una experiencia sensoriomotora a los estudiantes. Por lo tanto, el Entorno de Matemática Digital ahora tiene un módulo de reconocimiento de escritura a mano, que permite la integración de la experiencia humana de los movimientos de la mano al escribir, y la inteligencia del software para interpretar la escritura y evaluar la precisión matemática en aras de la retroalimentación.

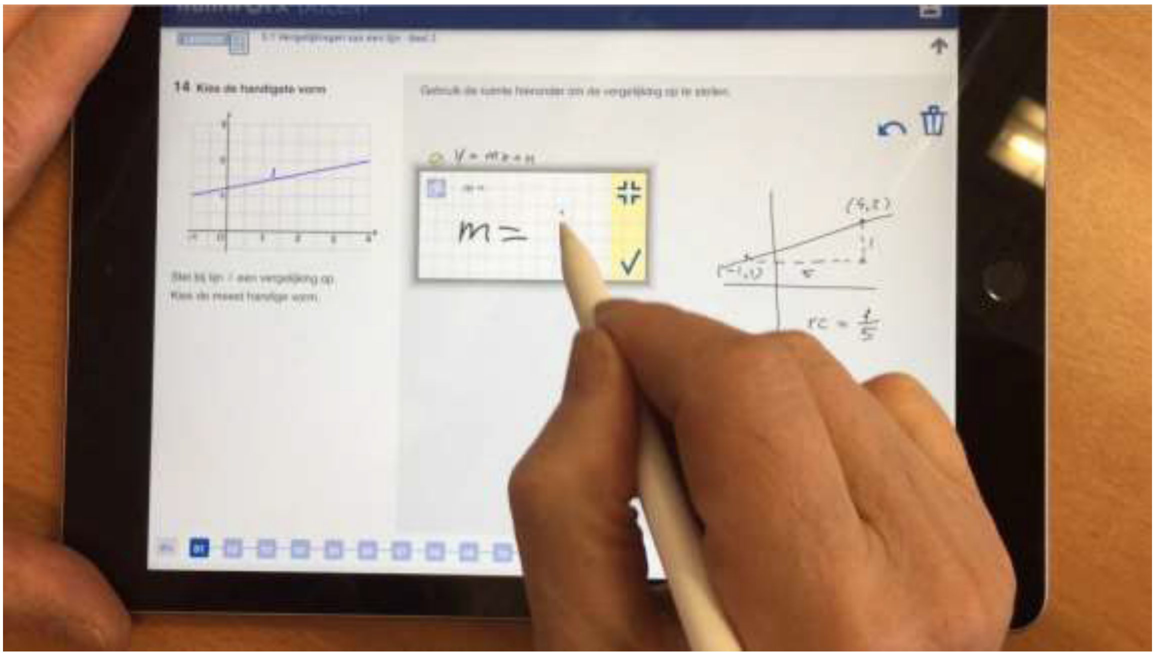


Figura 5. Reconocimiento de escritura a mano en el Entorno de Matemática Digital. Ver https://youtu.be/YKtrr1IxWaA para una animación.

Para resumir, los dos ejemplos ilustran cómo un enfoque de diseño corporeizado puede conducir a tareas en las que las experiencias sensoriomotoras forman la base de la cognición matemática, un punto de vista que no está explícitamente presente en los dos enfoques presentados anteriormente.

Instrumentación corporeizada

Los puntos de vista instrumentales y corporeizados sobre el uso de herramientas digitales en la educación matemática pueden parecer bastante diferentes. Por un lado, los enfoques instrumentales en muchos casos se centran en el desarrollo de esquemas mentales individuales, incluso si se reconoce la génesis instrumental colectiva, en las matemáticas convencionales de alto nivel y en herramientas digitales sofisticadas. Los enfoques corporeizados, por otro lado, se centran en esquemas sensoriomotores, en experiencias corporeizadas, en ideas de matemáticas básicas y hacen uso de herramientas de software dedicadas. La convergencia a la cognición y técnicas matemáticas convencionales a veces recibe menos atención. Sin embargo, desde la perspectiva de la teoría de redes (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014), parece interesante comparar, contrastar, combinar y coordinar estos diferentes puntos de vista.

La afirmación que quiero hacer aquí es que, a pesar de estas diferencias aparentes, los enfoques corporeizados e instrumentales resaltan la complejidad de la interacción usuario-herramienta, comparten algunas bases teóricas similares y pueden coordinarse y alinearse de manera significativa. En línea con los investigadores que en el pasado exploraron la interfaz entre los enfoques corporeizados e instrumentales (por ejemplo, Artigue, Cazes, Haspekian, Khanfour-Armale y Lagrange, 2013; Arzarello, Paola, Robutti y Sabena, 2009; Maschietto y Bartolini -Bussi, 2009), defiendo un enfoque de instrumentación corporeizada para conciliar la naturaleza corporeizada de los esquemas de instrumentación y la naturaleza instrumental de los esquemas sensoriomotores. Como tal, un enfoque de instrumentación corporeizada explora la coexistencia de esquemas sensoriomotores, técnicas de herramientas y cognición matemática, y ofrece un diseño heurístico para actividades TIC que alinean los fundamentos corporales de cognición y la necesidad de génesis instrumental.

En cuanto a la base teórica compartida, los enfoques corporeizados e instrumentales comparten una base teórica en ideas de Vygotsky (1978) sobre el uso de herramientas y de Piaget (1985) sobre esquemas, y ambos enfoques reconocen la sutileza de la mediación de herramientas en una actividad matemática significativa. Mientras tanto, los dos enfoques pueden ser complementarios, en el sentido de que los enfoques corporeizados hasta ahora no han enfatizado demasiado la convergencia de las técnicas de herramientas y las nociones matemáticas convencionales, mientras que los enfoques instrumentales han tendido a descuidar la visión sensoriomotora de los esquemas y la naturaleza corporeizada de la cognición.

Con respecto a la coordinación y alineación de los dos enfoques, puedo imaginar trayectorias productivas de aprendizaje en conceptos matemáticos fundamentales, en los que el desarrollo de esquemas sensoriomotores puede ir de la mano, o incluso ser parte de la génesis instrumental. Tal trayectoria podría conducir a esquemas en los que las experiencias corporeizadas todavía forman la base, y a través de un proceso de abstracción reflexiva (Abrahamson, Shayan, Bakker y van der Schaaf, 2016) conducen a una génesis instrumental. De esta manera, los enfoques corporeizados e instrumentales pueden estar alineados: el proceso de génesis instrumental es fomentado por actividades corporeizadas. A medida que los estudiantes avanzan en una trayectoria de aprendizaje, las técnicas de herramienta y el conocimiento matemático emergen de un proceso de génesis instrumental, y la base corporeizada puede moverse más a un segundo plano. Garantizar la coordinación entre el desarrollo de esquemas sensoriomotores y la génesis instrumental podría ser un diseño fuerte heurístico para tareas ricas en tecnología en la enseñanza de matemáticas.

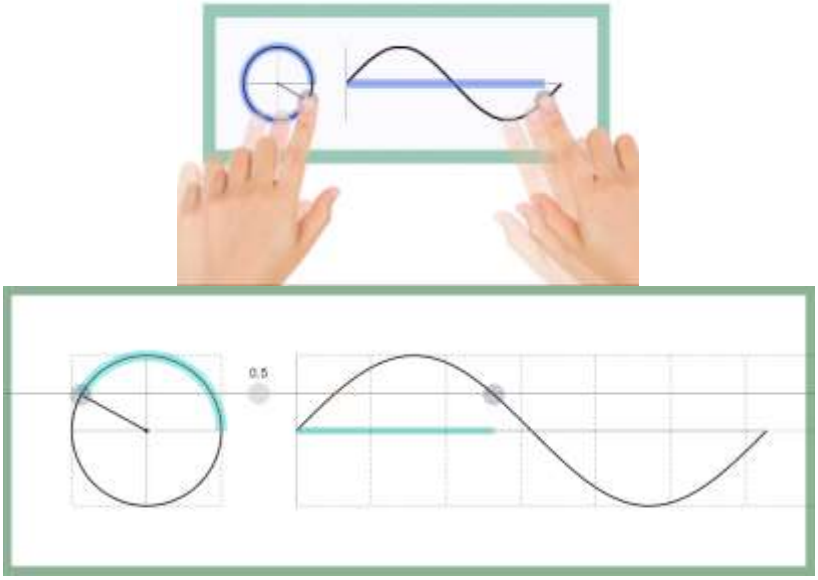


Figura 6. Tareas MIT-T (Alberto, Bakker, Walker-van Aalst, Boon y Drijvers, 2019). Ver https://youtu.be/1eOU4XyyHmg para una animación.

Permítanme ilustrar este enfoque de instrumentación corporeizada en un ejemplo final. La pantalla izquierda de la Figura 6 muestra la llamada App Inventor (MIT-T, por sus siglas en inglés), cuya abreviatura significa Entrenador de Imágenes Matemáticas – Trigonometría (Mathematics Imagery Trainer – Trigonometry, en inglés) (Alberto, Bakker, Walker-van Aalst, Boon y Drijvers, 2019). Muestra un círculo unitario y un gráfico senoidal con un punto móvil en cada uno de ellos. Como primera tarea, los estudiantes usan la pantalla multitáctil para mover simultáneamente los dos puntos y, de forma similar al caso en el ejemplo de parábola presentado anteriormente, para explorar cuándo el marco alrededor de los gráficos se vuelve verde. Éste es el caso si se logra una coincidencia correcta entre el seno de un ángulo en el círculo unitario y el valor de la función del seno en un punto en el eje horizontal, si es que los dos puntos están a la misma altura. La actividad de "mantener el marco verde" claramente invita a una adecuada coordinación sensoriomotora de mantener dos puntos a la misma altura y se espera que induzca un "sentimiento" para la coordinación de los dos movimientos. Como fue el caso de la tarea de parábola (Fig. 4), esto puede llevar a muchas actividades de seguimiento, donde cada una de las cuales requiere decisiones de diseño y arreglos sutiles de tareas y herramientas. Como posible punto final de dicha secuencia, la pantalla de la derecha de la Figura 6 muestra la herramienta adicional de una línea horizontal, que puede moverse hacia arriba y hacia abajo a través del gran punto gris central con la etiqueta de su altura, 0.5, implementando así la coordinación que acaba de ser representada. Ahora, tanto el círculo unitario como el gráfico senoidal pueden usarse para resolver la ecuación sen a = 0.5: en el círculo unitario, uno puede mover el punto para encontrar la intersección del círculo y la línea, y de manera similar en el gráfico. Por supuesto, estas dos técnicas también deben coordinarse: si los dos puntos de intersección no coinciden, el marco de retroalimentación no se volverá verde. En una fase posterior, es posible que uno desee soltar el círculo unitario y centrarse en el gráfico senoidal. En esa etapa, la tarea de hecho se reduce a resolver gráficamente ecuaciones de la forma $f(x) = c$, que es exactamente el ejemplo que se muestra al final de la sección de enfoque instrumental (ver Figura 3).

Para resumir, este ejemplo ilustra cómo los enfoques corporeizados e instrumentales pueden coordinarse y alinearse en una trayectoria de aprendizaje. En este diseño, las experiencias corporeizadas mediadas por herramientas digitales se preparan para la génesis instrumental. Por supuesto, se necesita investigar más para decidir si tales alineaciones conducirían a tamaños de efecto más altos que los informados anteriormente. Hablando en general, tanto las bases teóricas comunes de enfoques corporeizados como instrumentales, y su complementariedad, hacen que explorar su potencial alineación, como se expresa en la noción de instrumentación corporeizada, sea una empresa muy interesante.

Conclusiones

En este artículo, primero describí una taxonomía para la funcionalidad didáctica de la tecnología digital en la educación matemática. Esta taxonomía guió un metanálisis de segundo orden, cuyos resultados sugieren que los tamaños del efecto de las intervenciones ricas en tecnología son significativamente positivos, pero de pequeños a moderados. Esto llevó a la idea de mirar con más detalle tres enfoques sobre el uso de herramientas en la educación matemática. Como primer lente, la teoría de la Educación Matemática Realista destaca que los estudiantes deben experimentar las matemáticas como significativas. Aplicado al uso de herramientas, esto implica que las herramientas deben ser transparentes y proporcionar a los estudiantes formas auténticas de expresarse matemáticamente. Con un enfoque más específico en el uso de la herramienta, la segunda lente de la instrumentación enfatiza el entrelazamiento de las técnicas para usar la herramienta y el conocimiento matemático involucrado. Las técnicas y el significado matemático coexisten en procesos de génesis instrumental. La tercera lente de la cognición corporeizada afirma que las actividades sensoriomotoras forman la base de la cognición y, más que los otros dos enfoques, destaca la necesidad de enraizar el conocimiento matemático en las experiencias corporales.

Un principio rector clave compartido por los tres enfoques es el significado matemático, incluso si cada enfoque enfatiza diferentes aspectos del mismo: la EMR destaca la idea de que las matemáticas son "experimentalmente reales", la teoría de la instrumentación apunta al significado matemático incorporado en las técnicas para usar herramientas, y los puntos de vista corporeizados ven los esquemas sensoriomotores como la base del significado matemático. Este énfasis en el significado tiene sentido: si no logramos incorporar la tecnología digital en las prácticas matemáticas de los estudiantes de una manera que consideren significativa, es una empresa inútil.

Como conclusión, en mi opinión, los tres puntos de vista tienen mucho que ofrecer para la educación matemática rica en tecnología. El punto de vista de la EMR proporciona algunas pautas generales importantes, que pueden informar enfoques instrumentales y corporeizados. En cuanto a la interacción entre los puntos de vista corporeizados e instrumentales, creo firmemente que los dos pueden coordinarse y alinearse en un llamado enfoque de instrumentación corporeizada. Las experiencias corporeizadas y representadas, tan presentes en el enfoque de cognición corporeizada, pueden formar la base para el aprendizaje. Como tales, estas experiencias son las bases sobre las cuales se puede construir la génesis instrumental; una génesis instrumental basada en el cuerpo durante la cual las técnicas de herramientas y la cognición matemática coexisten.

Por supuesto, este argumento para un enfoque de instrumentación corporeizada necesita una mayor elaboración en varios aspectos. Primero, la lente de la EMR puede revelar posibles tensiones entre su principio de realidad y el foco del enfoque instrumental sobre las técnicas de herramientas. De manera similar, la alineación de los esquemas sensoriomotores y las técnicas de herramientas es sutil, incluso si los ejemplos en las Figuras 4, 5 y 6 proporcionan algunos enfoques posibles. Además, hasta ahora falta un cuerpo de evidencia empírica para los efectos positivos de un enfoque de instrumentación tan corporeizado. A pesar de estas limitaciones, creo que las tres lentes hacen justicia a tres elementos principales en el "paisaje" de la educación matemática: el mundo que nos rodea, nuestra interacción corporal con éste y las herramientas que utilizamos para facilitar esta interacción. Como tal, sugiero que la instrumentación corporeizada, vista como un enfoque integrado corporeizado e instrumental en el que coexisten los esquemas sensoriomotores, las técnicas de herramienta y la cognición matemática, merece prioridad en la agenda de investigación de aquellos interesados en el uso de tecnología digital en la educación matemática.

Agradecimiento

Agradezco a Rosa Alberto, Arthur Bakker, Peter Boon, Alison Clark-Wilson, Michiel Doorman, Anna Shvarts y Luc Trouche, así como a los revisores del Congreso de la Asociación Europea para la Investigación en Educación Matemática del Comité del Programa Internacional (CERME IPC, por sus siglas en inglés), por sus comentarios en versiones anteriores de esta contribución.

References

Abrahamson, D. (2009). Embodied design: Constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics, 70*(1), 27–47.

Abrahamson, D. (2014). Building educational activities for understanding: An elaboration on the embodied-design framework and its epistemic grounds. *International Journal of Child-Computer Interaction, 2*(1), 1–16.

Abrahamson, D., Shayan, S., Bakker, A., & van der Schaaf, M. (2016). Eye-tracking Piaget: capturing the emergence of attentional anchors in the coordination of proportional motor action. *Human Development, 58*(4–5), 218–244.

Ainley, J, Pratt, D., & Hansen, A., (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23–38.

Alberto, R. A., Bakker, A., Walker-van Aalst, O., Boon, P., & Drijvers, P. (2019). *Networking theories with design research: An embodied instrumentation case study in trigonometry*. Paper presented at the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, the Netherlands, 6-10 February, 2019.

Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2012): Embodiment in mathematics teaching and learning: Evidence from learners' and teachers' gestures*. Journal of the Learning Sciences, 21*, 247–286.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245–274.

Artigue, M., Cazes, C., Haspekian, M., Khanfour-Armale, R., & Lagrange, J.-B. (2013). *Gestes, cognition incarnée et artefacts : une analyse bibliographique pour une nouvelle dimension dans les travaux didactiques au LDAR*. [Gesture, embodied cognition and artefacts: a literature analysis for a new dimension in the didactical work at LDAR.] Paris, France: LDAR.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 97–109.

Bakker A., Shvarts A., Abrahamson D. (2019). *Generativity in Design Research: The Case of Developing a Genre of Action-Based Mathematics Learning Activities*. Paper presented at the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education [TWG 17: Theoretical Perspectives and Approaches in Mathematics Education], Utrecht, February 6–10, 2019.

Ball, L., Drijvers, P., Ladel, S., Siller, H.-S., Tabach, M., & Vale, C. (Eds.) (2018). *Uses of technology in primary and secondary mathematics education; Tools, topics and trends*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Cheung, A. C. K., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: a meta-analysis. *Educational Research Review, 9*, 88–113.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. New York, NY: Routledge.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body*. New York, NY: Cambridge University Press.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243–1267.

Drijvers, P. (2018a). Empirical evidence for benefit? Reviewing quantitative research on the use of digital tools in mathematics education. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Eds.), *Uses of technology in primary and secondary mathematics education; Tools, topics and trends* (pp. 161–178). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Drijvers, P. (2018b). Tools and taxonomies: a response to Hoyles. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 229–235.

Drijvers, P., & Barzel, B. (2012). Equations with technology: different tools, different views. *Mathematics Teaching, 228*, 14–19.

Drijvers, P., Boon, P., Doorman, M., Bokhove, C., & Tacoma, S. (2013). Digital design: RME principles for designing online tasks. In C. Margolinas (Ed*.), Proceedings of ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (pp. 55–62). Clermont-Ferrand, France: ICMI.

Drijvers, P., Boon, P., & Van Reeuwijk, M. (2011). Algebra and technology. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 179–202). Rotterdam: Sense.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213–234.

Duijzer, A.C.G., Shayan, S., Bakker, A., van der Schaaf, M. F. & Abrahamson, D. (2017). Touchscreen tablets: coordinating action and perception for mathematical cognition. *Frontiers in Psychology, 8*, 1–19.

Duijzer, C., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Doorman, M., & Leseman, P. (2019). Embodied learning environments for graphing motion: a systematic literature review. *Educational Psychology Review*, *31*(3), 597 – 629.

Ferrara, F., & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics, 92*, 1–19.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K. P. E., & Doorman, L. M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1–3), 111–129.

Haspekian, M. (2014). Teachers' instrumental genesis when integrating spreadsheet software. In A., Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair, N. (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 241–276). New York, NY: Springer.

Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 209–228.

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.) (2010). *Mathematics education and technology: rethinking the terrain*. New York, NY: Springer.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 323–349). Dordrecht: Kluwer.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. Basic Books.

Leung, A., & Baccaglini-Frank, A. (Eds.) (2017). *Digital technologies in designing mathematics education tasks*. Potential and pitfalls. New York, NY: Springer.

Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review, 22*, 215–243.

Margolinas, C., & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM–Mathematics Education, 47*(6), 893–903.

Maschietto, M., & Bartolini-Bussi, M. (2009). Working with artefacts: Gestures, drawings and speech in the construction of the mathematical meaning of the visual pyramid. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 143–157.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM–Mathematics Education, 45*(7), 959–971.

Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. (2016). *Tools and mathematics*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

OECD (2015). *Students, computers and learning. Making the connection*. Paris, France: OECD Publishing. http://www.oecd.org/edu/students-computers-and-learning-9789264239555-en.htm.

Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Proust, C. (2012). Masters' writings and students' writings: school material in Mesopotamia. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources. Mathematical curriculum materials and teacher development* (pp. 161–179). New York, NY: Springer.

Rabardel, P. (2002). *People and technology – A cognitive approach to contemporary instruments*. http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 111–126.

Robutti, O. (2006). Motion, technology, gesture in interpreting graphs. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 13*(3), 117–126.

Shvarts, A. (2018). A dual eye-tracking study of objectification as student–tutor joint activity appropriation, In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 171–178). Umeå, Sweden: PME.

Shvarts, A., & Abrahamson, D. (2019). Dual-eye-tracking Vygotsky: A microgenetic account of a teaching/learning collaboration in an embodied-interaction technological tutorial for mathematics. *Learning, Culture and Social Interaction, 22,* 100316**.**

Steenbergen-Hu, S., & Cooper, H. (2013). A meta-analysis of the effectiveness of intelligent tutoring systems on K–12 students' mathematical learning. *Journal of Educational Psychology, 105*(4), 970–987.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Trgalová, J., Clark-Wilson, A., & Weigand, H.-G. (2018). Technology and resources in mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven, *Developing Research in Mathematics Education. Twenty Years of Communication and Collaboration in Europe* (pp. 142–161). New York, NY: Routledge.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281–307.

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology: Flashback into the future. *ZDM – Mathematics Education, 42*(7), 667–681.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Didactical phenomenology. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 174–176). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521–525). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Vergnaud, G. (1987). About constructivism, a reaction to Hermine Sinclair's and Jeremy Kilpatrick's papers. In J. Bergerson, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol 1* (pp. 73–80). Montréal, Canada: University of Montréal.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*, 83–94.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77–101.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wilson, A. D., & Golonka, S. (2013). Embodied Cognition is not what you think it is. *Frontiers in psychology, 4*(58).

Young, J. (2017). Technology-enhanced mathematics instruction: A second-order meta-analysis of 30 years of research. *Educational Research Review, 22*, 19–33.