Hoe groot is ℝ?

Ik was laatst op een feestje in Nijmegen (nou ja het is alweer twee jaar geleden, maar als wiskundige kun je niet genoeg gelegenheden aangrijpen om te suggereren dat je regelmatige op feesten in Nijmegen komt) en daar sprak ik een jongen (ok ik geef toe: een natuurkundige, het moet niet meteen té hip worden natuurlijk) die mij vroeg of het waar was dat een van de heilige gralen van de wiskunde het vinden van een verzameling is die groter is dan ℕ, maar kleiner dan ℝ. Omdat iedereen op feestjes natuurlijk regelmatig vragen van het type 'Dat oneindig, hoeveel is dat nou eigenlijk' moet beantwoorden, nu een speciale aflevering van 'Scoop vult de gaten in onze kennis' over dit intrigerende onderwerp. — Vincent van der Noort

Getallen, wat zijn dat nou eigenlijk?

Bijna iedereen die tijdens zijn leven met verschillende soorten getallen (positief, negatief, reëel, complex, geheel, gebroken, eindig, oneindig) in aanraking is gekomen, heeft daarbij een mening ontwikkeld over welke getallen nou wel en welke niet 'echt' bestaan. Ik zal mijn eigen mening hierover verder voor me houden, maar over een ding is iedereen het eens: de natuurlijke getallen (0, 1, 2, 3, …) bestaan echt en zullen dat altijd blijven doen (nou ja, behalve nul dan misschien).

Er zijn grofweg drie manieren om tegen deze sympathieke wezentjes aan te kijken: als aantallen (van sinaasappels), als dingen met een volgorde (zoals de nummers op een cd) of als dingen die gehoorzamen aan bepaalde rekenregels. Alle drie klinken ze zo opgesomd een beetje dom en alledrie hebben ze zo hun eigen (onbewuste) aanhangers. Zolang we ons niet buiten de veilige wereld van de natuurlijke getallen wagen, maakt het niet veel uit hoe je tegen getallen aankijkt De verschillen duiken pas op bij verschillende uitbreidingen van ons getallensysteem.

Het zijn de mensen die geloven dat getallen een aantal zijn, die luidkeels beginnen te sputteren als je over negatieve getallen begint: minder dan niets, dat is natuurlijk onzin! De getallen-als-betekenisloze-dingen-met-een-volgorde-mensen hebben echter nergens bezwaar tegen. Het stemt eigenlijk wel overeen met hun rechtvaardigheidsgevoel; waarom zou je naar één kant wel oneindig ver door mogen lopen, en houdt het de andere kant, op een volkomen willekeurig moment, plotseling op? De rekenregel-fetisjisten tenslotte weten er wel een mouw aan te passen, wat leidt tot quasi-onbegrijpelijkheden als 'min keer min is plus'.

Hoewel het tegen getallen aankijken als dingen met rekenregels verreweg de meeste generalisaties mogelijk maakt (denk aan reële en complexe getallen, of aan matrices waarvan een minuscuul deel (diagonaalmatrices met steeds hetzelfde getal op de diagonaal) de natuurlijke (of reële of complexe) getallen op niet-van-echt-te-onderscheiden wijze nabootst), wilde ik deze manier van kijken hier verder buiten beschouwing laten. Een woord als oneindig heeft in de rekenregelwereld namelijk nauwelijks betekenis. Interessanter is de vraag wat oneindig is, en wat voor verschillende soorten oneindig er zijn, wanneer je getallen als hoeveelheden respectievelijk dingen met een volgorde ziet.

Mag het ietsje meer zijn?

Als je een getal als aantal ziet, is het altijd een aantal van iets. En aangezien 'iets' al gauw klinkt als iets uit de echte wereld, en wij wiskundigen daar nog altijd een beetje bang voor zijn, houden we dat iets het liefst zo vaag mogelijk en houden het op 'het aantal elementen van een verzameling'. Algemener kan het haast niet. Het aantal elementen van verzameling A wordt wel genoteerd als $|A|$ en een getal dat op deze manier gedefinieerd is, heet een kardinaalgetal. 5 is een kardinaalgetal, want er zijn genoeg A's te vinden zodat $|A| = 5$. $|\mathbb{N}|$ is ook een kardinaalgetal, wat meestal 'aftelbaar oneindig' genoemd en $|\mathbb{R}|$ is er ook een, en ga zo maar door. Het is nogal duidelijk dat we zodra we de natuurlijke getallen verlaten en het schemergebied van oneindigheid betreden, de notatie ons nogal in de steek laat. In plaats van overzichtelijke symbolen als 3 en 4 zitten we met lelijke voorbeelden van verzamelingen met de juiste grootte, met strepen eromheen. Daar willen we graag iets aan doen, en het eerste wat we daarvoor nodig hebben is een antwoord op de vraag: wanneer is iets meer dan iets anders, en wanneer zijn twee verzamelingen even groot?

We kennen allemaal het verhaal van het Hilberthotel, een hotel met oneindig veel kamers die, dankzij de gunstige ligging en het uitstekende personeel, allemaal bezet zijn (inderdaad, door oneindig veel mensen). Wie dit ontroerende verhaal nog nooit gehoord heeft kan het nalezen in de uitgebreide versie van dit artikel, op de Scoop-site. De clou is dat wanneer we getallen als aantallen beschouwen, een hoop verschillend uitziende vormen van oneindig eigenlijk even groot zijn. Hierbij zeggen we dat twee verzamelingen even groot zijn ($|A| = |B|$) als er een bijectie (dwz één-op-één-afbeelding) tussen de verzamelingen A en B bestaat. Twee oneindige hotels zijn dus even groot als één. Een verzameling A heet kleiner dan of misschien wel even groot als B (in kardinaalgetallen $|A| \leq |B|$) als er een bijectie bestaat tussen A en een deelverzameling van B.

Dit betekent niet dat alle vormen van oneindig hetzelfde zijn: het aantal punten in een lijn (oftewel de reële getallen) is niet netjes over de kamers van een Hilberthotel te verdelen. Meer in het algemeen kunnen we voor iedere verzameling A vrij makkelijk een verzameling maken die strikt groter (dat wil zeggen: wel groter-gelijk maar niet even groot) is dan A zelf, namelijk de verzameling P(A) bestaande uit alle deelverzamelingen van A. Het elegante bewijs dat deze inderdaad groter is dan A, staat in de uitgebreide versie van dit artikel op de Scoop-site. Hier wil ik slechts vermelden dat $\mathbb{R}$ even groot is als $P(\mathbb{N})$.

Om dit in te zien, gebruiken we een oude maar leuke truc. Kies je favoriete deelverzameling D van $\mathbb{N}$ en schrijf op je favoriete stukje kladpapier een 1 als 1 in D zit en een nul als hij er niet in zit, vervolgens een 1 als 2 in D zit, en een 0 als 2 er niet in zit, daarna een 1 als 3 in D zit en een 0 als hij er niet in zit en zo verder. Je krijgt al gauw een oneindige rij nullen en enen, en het is duidelijk dat de verzameling van alle mogelijke rijtjes precies 1-op-1 correspondeert met de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$.

Nu komt het grote wonder. Pak je pen en schrijf “0 komma” voor je rijtje getallen. Kijk er nog eens goed naar. Wat heb je? Een getal tussen 0 en 1, in binaire notatie! Is het geen wonder? Omdat je ieder getal tussen 0 en 1 op die manier kunt vinden, is de verzameling van deelverzamelingen van $\mathbb{N}$, dus gelijk aan het aantal reële getallen tussen 0 en 1. En van deze kun je met behulp van logaritmes, vermenigvuldigen, optellingen en aftrekkingen met niet zo veel moeite laten zien dat hij even groot is als onze goede vriend $\mathbb{R}$.

Hierbij hebben we een stukje van het mysterie opgelost: $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})|$, en met 0, 1, 2, 3, ... $|\mathbb{N}|$, $|P(\mathbb{N})|$, $|P(P(\mathbb{N}))|$, $|P(P(P(\mathbb{N})))|$, ... hebben we een aardige rij van kardinaalgetallen in handen. De vraag is echter of dit ze allemaal zijn, of dat er – bijvoorbeeld – verzamelingen bestaan met een kardinaliteit groter dan die van $\mathbb{N}$, maar kleiner dan die van $\mathbb{R}$. Het antwoord ligt gek genoeg besloten in de generalisatie van de andere manier om naar getallen te kijken: als dingen met een volgorde.

Oneindig maar niet ontelbaar

Tellen is een leuke bezigheid, alleen al omdat het nooit ophoudt. (Met dezelfde argumentatie kun je natuurlijk overtuigend aantonen dat tellen een nogal vervelende bezigheid is, maar laten we in hemelsnaam alles leuk blijven vinden.) Als je het getal 17 echter alleen maar kent, omdat je het onderweg tegenkomt als je van 1 tot 20 telt (of verder) dan is het een interessante vraag wat die 17 nou eigenlijk is. Grofweg zijn er twee antwoorden mogelijk: 17 is de opvolger van 16 of 17 is het kleinste getal dat groter is dan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 en 16, kortom de getallen die je al geteld hebt. Als je vanuit het ‘domme’ tellen ‘interessante’ bewerkingen als optellen en vermenigvuldigen wilt definiëren (zonder te beseffen dat een getal ook een aantal kan zijn) is de opvolgerdefinitie het handigst. Omdat optellen en vermenigvuldigen ons echter geen snars interesseren en oneindig des te meer, kiezen we voor de tweede definitie. Oneindig is immers niet de opvolger van het een of andere getal, maar wel een ‘kleinste getal dat groter is dan’, namelijk het kleinste getal dat groter is dan alle natuurlijke getallen. Getallen die gedefinieerd worden als ‘het kleinste getal dat groter is dan’ en dan een verzameling kleinere getallen, heten ordinaalgetallen, en de ordinale versie van oneindig (het kleinste getal dat groter is dan alle natuurlijke getallen) noemen we meestal ω. Vervolgens hebben we ook $\omega + 1$, het kleinste getal dat groter is dan alle natuurlijke getallen en ω, $\omega + 2$ het kleinste getal groter dan alle natuurlijke getallen, ω en $\omega + 1$ en zo verder met $\omega + 3$, $\omega + 4$, $\omega + 5$ en zo door tot en met $\omega + \omega$, wat we meestal afkorten tot $2\ \omega$. Maar dan hebben we ook $2\ \omega + 1$, $2\ \omega + 2$, $3\ \omega$, $4\ \omega$, $5\ \omega$ en uiteindelijk ω^2, het kleinste getal dat groter is dan ω, $2\ \omega$, $3\ \omega$, etc. Wie zei dat we netjes met stapjes van 1

moesten lopen? ω is óók het kleinste getal dat groter is dan alle even getallen.
Vervolgens hebben we ook $\omega^2 + 1$, $\omega^2 + \omega$, $\omega^2 + 34\omega+724$, ω^3, ω^4, ω^ω, ω^ω^ω, ω^ω^ω^ω^…, etc. Allemaal gratis en voor niets. Je ziet: ordinalen zijn een stuk openhartiger, leuker, gezelliger, spontaner en kindvriendelijker dan die vervelende kardinalen. Het zijn er oneindig veel, het zijn er zelfs oneindig veel op een manier waar je je niet zo een twee drie meer een hotel bij kunt voorstellen. Maar ze vergeten nooit waar ze vandaan zijn gekomen en blijven domweg dingen met een volgorde.
Omdat ieder ordinaalgetal volledig bepaald wordt door de verzameling van ordinaalgetallen die kleiner zijn, kunnen we ieder ordinaalgetal met deze verzameling identificeren zonder dat er informatie bijkomt of verloren gaat. Het ordinaalgetal 4 kun je identificeren met de verzameling van ordinalen die kleiner zijn dan 4, dus 4 = {0, 1, 2, 3}. ω kunnen we identificeren met de verzameling van ordinalen die kleiner zijn dan ω, dus met ℕ. En ω + 1 bestaat als verzameling uit alle natuurlijke getallen, en het element "ω". Dit lijkt niet meer dan een omslachtige manier om er tegenaan te kijken, maar in de verzamelingentheorie speelt het een grote rol (zie voor een indruk hiervan de uitgebreide versie van dit artikel.) Voor ons is het vooral handig om naar de verschillen en verbanden tussen ordinalen en kardinalen te kunnen kijken.

De Grande Finale

We kunnen ons nu afvragen hoe groot ordinaalgetallen zijn, wanneer we ze als verzameling beschouwen. Welk kardinaalgetal geeft me de grootte van een ordinaalgetal α? Voor de kleinste kardinaalgetallen (1, 2, 3, 4,...) is het makkelijk: |n| = n. Voor ω is het ook niet zo moeilijk: ω= ℕ dus, |ω| is gewoon "aftelbaar oneindig", of zoals wiskundigen dan schrijven $\aleph_0$. Maar de grootte van ω + 1 is dan ook $\aleph_0$ (denk aan de nieuwe gast in het hotel) en die van ω^2, ω^3, ω^ω, ω^ω^ω^ω^… met een beetje gegoochel ook. Zijn alle ordinaalgetallen dan aftelbaar? Het antwoord is nee, en dit is waar het handig wordt om ordinaalgetallen als verzameling te beschouwen. Bekijk de verzameling van alle ordinaalgetallen van kardinaliteit $\aleph_0$ of kleiner. Dit is zelf ook een ordinaal getal 'het kleinste ordinaalgetal dat groter is dan alle ordinalen met kardinaliteit kleiner/gelijk $\aleph_0$ en dat noemen we ω_1. ω_1 heeft zelf een grotere kardinaliteit dan 'aftelbaar oneindig' want anders zou hij zelf ook element van (en dus 'kleiner dan') zichzelf zijn, en dat is geen enkele ordinaal. De grootte van ω_1 (de 'kleinste vorm van overaftelbaar') noemen we $\aleph_1$. Op dezelfde manier kunnen we ω_2 definiëren als de verzameling van alle ordinalen met kardinaliteit kleiner dan of gelijk aan die van ω_1 en zo verder: ω_3, ω_4, ω_ω, ω_(ω+1), ω_ω_1, ω_ω_ω_ω_... en al deze ordinalen hebben een verschillende kardinaliteit. Het is niet makkelijk je iets voor te stellen bij deze hoeveelheden, maar het is wel heel makkelijk er en naam aan te geven: $|\omega_1|$ noemen we $\aleph_1$, $|\omega_2|$ = $\aleph_2$, |ω_ω| = $\aleph$_ ω etc... Op deze manier zijn er dus ook overaftelbaar veel verschillende kardinaalgetallen. Aanzienlijk meer dan het aftelbare rijtje |ℕ|, |P(ℕ)|, |P(P(ℕ)|... dat we hierboven geconstrueerd hebben. De vraag dringt zich op hoe deze kardinaliteiten in het duizelingwekkende schema van $\aleph$ passen. In het bijzonder: hoe groot is P(ℕ) = ℝ? Het antwoord is: dat weten we niet. Sterker nog: dat kunnen we niet weten. Het is bewezen dat de definitie van verzameling die we normaal gesproken gebruiken (zie ook het Scoop-artikel van Bram Buijs over het keuze-axioma), niet tot een tegenspraak leidt wanneer we daarnaast aannemen dat |P(ℕ)| = $\aleph_\alpha$, voor welk willekeurig ordinaal getal α dan ook. We kunnen dus zelf kiezen hoe groot ℝ is. Een populaire keuze is de Gegeneraliseerde Continuum Hypothese, die stelt dat |P(ℕ)| = |P(ω)| = $\aleph_1$ en dat bovendien |P(A)| = $\aleph_{\alpha+1}$ voor iedere verzameling A met |A| = $\aleph_\alpha$. Het voordeel hiervan is dat we alle kardinaliteiten netjes overzichtelijk gerangschikt hebben: voor iedere A is |P(A)| de kleinste kardinaliteit die groter is dan |A|. In het bijzonder is er geen verzameling die groter dan ℕ, maar kleiner dan ℝ is.
Dit is natuurlijk leuk en aardig, maar niet te bewijzen of te weerleggen. Als jij wilt geloven dat |ℝ| = ω_{17}, dan kan dat ook, en dan zijn er opeens een hoop verzamelingen die groter dan ℕ maar kleiner dan ℝ zijn te verzinnen: ω_1, ω_2, ω_2 +1 etc... Het is maar net wat je zelf het leukst vindt om te geloven. Zelf ben ik in de loop der jaren alleen maar meer de waarheid van een oude wijsheid in gaan zien: 'Hoeveel is dat nou eigenlijk, oneindig?' 'Oneindig is altijd meer dan je denkt.'